Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock **WS 19/20**

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 24.10.2019 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 2

Aufgabe 1. Es sei M eine endliche Menge aus $n \geq 1$ Elementen. Zeigen Sie:

(a) Für $k \in \{0, \dots, n\}$ gibt es genau $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Teilmengen von M.

(b) M besitzt 2^n verschiedene Teilmengen (einschließlich $\varnothing$ und M selbst).

Aufgabe 2. (a) Für alle $a, b > 0$ ist das *arithmetische, geometrische* beziehungsweise *harmonische Mittel* definiert durch

$$A(a,b) := \frac{a+b}{2}, \qquad G(a,b) := \sqrt{ab}, \qquad H(a,b) := \frac{2ab}{a+b} = \frac{1}{A(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})}.$$

Zeigen Sie, daß gilt:

$$H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b), \qquad H(a,b) = A(a,b) \Leftrightarrow a = b.$$

(b) Seien nun $0 < a < b$ fest. Wir definieren $a_1 := a$ und $b_1 := b$ sowie

$$a_{n+1} := H(a_n, b_n), \qquad b_{n+1} := A(a_n, b_n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$G(a_n, b_n) = \sqrt{ab}\,, \quad a_n < a_{n+1} < \sqrt{ab} < b_{n+1} < b_n \quad \text{und} \quad |b_{n+1} - a_{n+1}| < \frac{1}{2}|b_n - a_n|\,.$$

Aufgabe 3. Für $0 < a < b$ werden rekursiv Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ definiert durch

$$a_0 = a\,,\ b_0 = b\,, \qquad a_n = G(a_{n-1}, b_{n-1})\,, \quad b_n = A(a_{n-1}, b_{n-1})\,,$$

wobei $G(a,b) := \sqrt{ab}$ bzw. $A(a,b) := \frac{a+b}{2}$ das geometrische bzw. arithmetische Mittel sind.

Beweisen Sie: $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Intervallschachtelung.

Hinweis: Ein Teil des Beweises besteht darin, $0 < b_n - a_n < \frac{b}{2^n}$ zu zeigen.

Bemerkung: Die in allen Intervallen liegende reelle Zahl heißt das *arithmetisch-geometrische Mittel* von a, b.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Supremum und Infimum sowie, falls vorhanden, Maximum und Minimum:

(a) $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \dots\right\}$, (b) $\left\{3^{(-1)^n n} \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \dots\right\}$.