Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock **WS 19/20**

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 31.10.2019 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 3

Aufgabe 1. Geben Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag der folgenden komplexen Zahlen an:

(a) $\dfrac{1}{2+3\mathrm{i}}$ (b) $\dfrac{3+\sqrt{7}\mathrm{i}}{2+\sqrt{7}\mathrm{i}}+\dfrac{1-\sqrt{7}\mathrm{i}}{2-\sqrt{7}\mathrm{i}}$ (c) $\left(\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}\right)^n, n\in\mathbb{N}$

Aufgabe 2. (a) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $(1+\mathrm{i})z^2+\mathrm{i}z=\frac{1}{1-\mathrm{i}}$ und geben Sie es in der Form $z=x+\mathrm{i}y$ mit $x,y\in\mathbb{R}$ an.

(b) Die Normalform einer kubischen Gleichung ist $z^3+pz+q=0$ mit $p,q\in\mathbb{R}$.
Mit der Diskriminante $D:=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0$ ist die Lösungen dieser kubischen Gleichung gegeben sind durch die Cardanischen Formeln

$$z_1=u+v\,,\qquad z_2=\zeta_1u+\zeta_2v\,,\qquad z_3=\zeta_2u+\zeta_1v$$

mit den dritten Einheitswurzeln $\zeta_1=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\zeta_2=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ sowie

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}\,,\qquad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}\,.$$

Dabei ist $\sqrt[3]{a}=-\sqrt[3]{-a}$ für $a<0$.
Bestimmen Sie die Lösungen von $z^3+6z+2=0$.

Aufgabe 3. Skizzieren Sie folgende Punktemenge der Gaußschen Zahlenebene:

a) $\{z\in\mathbb{C}\,:\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)>\frac{1}{R}\}$ b) $\{z\in\mathbb{C}\,:\,\mathrm{Im}\left(z^2\right)>\mathrm{Re}\,(z)\}$

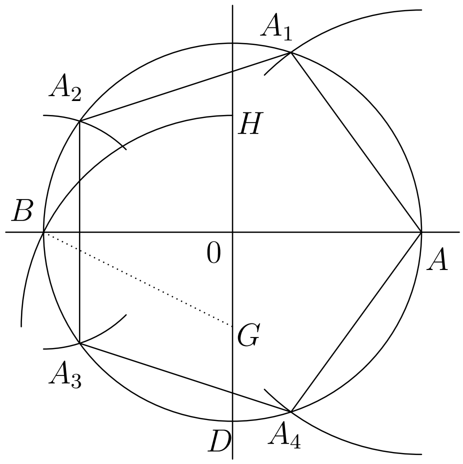
c) $\{z\in\mathbb{C}\,:\,|z|<|z+1|<1\,,|z|<|z+\mathrm{i}|\}$

Aufgabe 4. Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks mit Zirkel und Lineal:

- Konstruiere in der Gaußschen Zahlenebene den Einheitskreis S mit Mittelpunkt 0 und Radius 1. Die Schnittpunkte des Kreises mit der x-Achse seien $A=1\in\mathbb{C}$ und $B=-1\in\mathbb{C}$.
- Konstruiere das Lot L auf $\overline{AB}$ durch 0 (y-Achse). Sei D einer der Schnittpunkte mit dem Einheitskreis S. Konstruiere den Mittelpunkt G von $\overline{0D}$.
- Zeichne um G einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{GB}|$. Der Schnittpunkt des Kreisbogens mit $L(=y$-Achse), welcher innerhalb S liegt, sei H.

- Zeichne um B einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{0H}|$. Die beiden Schnittpunkte mit S seien A_2 und A_3.
- Zeichne um A einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{A_2A_3}|$. Die beiden Schnittpunkte mit S seien A_1 und A_4, wobei A_1, A_2 auf der gleichen Seite von $\overline{AB}$ liegen.

Dann beweisen (a),(b),(c): (A, A_1, A_2, A_3, A_4) sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks.



(a) Zeigen Sie: Die Länge $|\overline{0H}| =: h = g^{-1}$ ist das Inverse des goldenen Schnittes, $h = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Koordinaten $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ der Eckpunkte A_n, mit $n = 1, 2, 3, 4$, gegeben sind durch

$$z_1 = \overline{z_4} = \frac{h}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3+h}\ , \qquad z_2 = \overline{z_3} = -\frac{1+h}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2-h}\ .$$

Hinweis: Für das Inverse des goldenen Schnittes gilt $h^2 = 1 - h$.

(c) Beweisen Sie die Identitäten $(z_1)^2 = z_2$, $(z_2)^2 = z_4$, $z_2z_3 = 1$ und $z_1z_4 = 1$.