Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock **WS 19/20**

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 21.11.2019 bis 10h00 in den Briefkästen — Blatt 6

Aufgabe 1. Prüfen Sie, ob die Folgen $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$, $(d_n)_n$, gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}, \quad b_n = n^2\Big(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\Big), \quad c_n = \sqrt{n+2\sqrt{n}}-\sqrt{n}, \quad d_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}$$

konvergieren, und bestimmen Sie im Konvergenzfall den Grenzwert.
Hinweis zu b_n und c_n: Es gilt $x - y = \frac{x^2-y^2}{x+y}$.

Aufgabe 2. Die Folge $(x_n)_n$ sei rekursiv definiert durch

$$x_0 := 2, \qquad x_{n+1} := \frac{15-12x_n+4x_n^2}{4} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: Es gilt

a) $\frac{3}{2} \leq x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
b) $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{2}$.

Hinweis zu (b): Welche Gleichung muß der Grenzwert erfüllen?

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die Folge der endlichen Kettenbrüche

$$x_n := \underbrace{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots\, 1+\cfrac{1}{1}}}}}_{n \text{ Bruchstriche}}$$

gegen den *goldenen Schnitt* $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert, indem Sie die Gleichungen $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ und $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ verwenden und induktiv $|x_{n+1} - \Phi| \leq \Phi^{-(n+2)}$ zeigen.

Aufgabe 4. (Beweis von $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{p}{qn})^n = e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^p}$ für $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$) Zeigen Sie schrittweise:

(a) Die Folge $\big((1+\frac{r}{n})^n\big)_{n\in\mathbb{N}^\times,\, n>-r}$ ist für alle $r \in \mathbb{R}^\times$ monoton wachsend.
(b) Für $p, q \in \mathbb{N}^\times$ sind $\big((1+\frac{p}{qn})^n\big)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ und $\big((1-\frac{p}{qn})^n\big)_{n\in\mathbb{N}^\times,\, qn>p}$ beschränkt.
(c) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{p}{qn})^n = \sqrt[q]{e^p}$ für $p, q \in \mathbb{N}^\times$. *Hinweis:* Teilfolgen
(d) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{p}{qn})^n = \frac{1}{\sqrt[q]{e^p}}$ für $p, q \in \mathbb{N}^\times$.