Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock

WS 19/20

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 5.12.2019 bis 10h00 in den Briefkästen — Blatt 8

Aufgabe 1. Sei $(f_n)_n$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, siehe Blatt 1.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$.
Hinweis: Wie hängen die Fibonacci-Zahlen mit der Folge definiert in Aufgabe 3 von Blatt 6 zusammen?

(b) Zeigen Sie, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ im obigen Konvergenzbereich gilt:

$$F(z) = z + F(z)(z + z^2).$$

(c) Gegen welche rationale Funktion konvergiert $F(z)$ im Inneren des Konvergenzkreises?

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n} \binom{1+3n}{n} z^n$ (b) $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$

(c) $C(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n^4 7^n}$

(d) die *hypergeometrische Reihe* zu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$:

$$D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} z^n, \quad \text{wobei } (\delta)_n := \delta(\delta+1)(\delta+2)\cdots(\delta+n-1).$$

Aufgabe 3. Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ euklidischer Vektorraum, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ und $v, w \in V$. Zeigen Sie:

(a) $\|v\| = \|w\| \iff \langle v - w, v + w\rangle = 0$.

(b) $\|v - w\| = \|v + w\| \iff \langle v, w\rangle = 0$.

(c) $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \iff \langle v, w\rangle = 0$.

(d) Für $w \neq v$ gilt: $\left\| v - 2\frac{\|v\|^2}{\|v - w\|^2}(v - w) \right\| = \|v\| \iff \langle v, w\rangle = 0$.

Aufgabe 4. Welche der folgenden Abbildungen $N_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$ definiert eine Norm? (Begründung erforderlich)

(a) $N_1((x_1, x_2, x_3)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (2x_2 - x_3)^2 + (x_3 - 2x_1)^2}$,

(b) $N_2((x_1, x_2, x_3)) = \sqrt{|x_1 - 2x_2|^3 + |x_2 - 2x_3|^3 + |x_3 - 2x_1|^3}$,

(c) $N_3((x_1, x_2, x_3)) = \sqrt{(x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + (x_3 - 2x_1)^2}$,

(d) $N_4((x_1, x_2, x_3)) = \left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} + \sqrt{|x_3|}\right)^2$