0 Überblick

0.1 Der historische Weg zur Dirac-Gleichung

1900 Plancksches Strahlungsgesetz erklärt erstmals Strahlungsspektrum schwarzer Körper, theoretische Herleitung erfordert Strahlungsquanten der Energie $\hbar\omega$

1905 Quantenhypothese erklärt ebenfalls den photoelektrischen Effekt (Einstein)

1913 Bohrsches Atommodell: Bahnen des Elektrons im Atom haben diskrete Wirkung $\hbar$

1925 Matrixmechanik (Heisenberg): Theorie soll ausschließlich durch Observable beschrieben werden, beobachtbar sind Spektrallinien, Kombination der Frequenzen ist Matrixmultiplikation

1926 "Quantisierung als Eigenwertproblem" (Schrödinger): Differentialoperatoren haben diskretes Spektrum und erklären so die Quantisierung der Energieniveaus

Schrödinger-Gleichung für Elektron im elektrischen Feld

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{r}) = \Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial\vec{r}^2} + eV(\vec{r})\Big)\psi(t,\vec{r})$$

Dabei ist $t \in \mathbb{R}$ die Zeit und $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ der Ortsvektor, $-\frac{\partial^2}{\partial\vec{r}^2}$ ist der Laplace-Operator und $V(\vec{r})$ das Coulomb-Potential. Schließlich ist $\psi(t,\vec{r})$ die *Wellenfunktion*. Ursprünglich als echte Elektronenwelle gedacht, später umgedeutet in der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik:

$$\int_X d^3\vec{r}\,|\psi(t,\vec{r})|^2$$

ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron zur Zeit t im Raumgebiet $X \subset \mathbb{R}^3$ anzutreffen. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(t,\vec{r}) := |\psi(t,\vec{r})|^2$ erfüllt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho(t,\vec{r})}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{j}(t,\vec{r})\,, \qquad \vec{j}(t,\vec{r}) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\big(\psi^*(t,\vec{r})\operatorname{grad}\psi(t,\vec{r}) - (\operatorname{grad}\psi^*(t,\vec{r}))\,\psi(t,\vec{r})\big)$$

(wichtig für Kausalität).

Erweiterung auf Magnetfelder: Ableitungen werden zu kovarianten Ableitungen, außerdem muß *Spin* (Stern-Gerlach, 1920) beschrieben werden. Führt auf Pauli-Gleichung (1927)

$$\mathrm{i}\hbar\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathrm{ie}}{\hbar}V\Big)\begin{pmatrix}\psi_1(t,\vec{r})\\ \psi_2(t,\vec{r})\end{pmatrix} = \Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial}{\partial\vec{r}} + \frac{\mathrm{ie}}{\hbar}\vec{A}\Big)^2 - \frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\Big)\begin{pmatrix}\psi_1(t,\vec{r})\\ \psi_2(t,\vec{r})\end{pmatrix}$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Problem: nichtrelativistisch, offensichtliche Asymmetrie zwischen räumlichen und zeitlichen Ableitungen. Erste Lösung: Klein-Gordon-Gleichung

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2}\Big)\psi(t,\vec{r}) = 0 .$$

Problem: nichtlinear in der Zeit, Wahrscheinlichkeitsdichte nicht positiv (deshalb von Schrödinger nicht betrachtet)

Diracs Projekt: relativistische Wellengleichung für das Elektron, die linear in der Zeitableitung ist, beruhend auf der fälschlichen Annahme, daß dann die Wahrscheinlichkeitsdichte positiv ist.

Idee: Nehme die Wurzel aus dem d'Alembert-Operator (wörtliche Umsetzung ist nichtlokal), aufzufassen als Lösung D der Gleichung

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2}$$

Das ist lösbar in Matrizen (vgl. Pauli)!

Dirac-Gleichung (für Elektron im elektromagnetischen Feld, 1928)

$$\Big(\sum_{\mu=0}^{3} \mathrm{i}\hbar\gamma^\mu\Big(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{\mathrm{i}e}{\hbar}A_\mu\Big) - mc\Big)\psi = 0 .$$

Dabei besteht die Wellenfunktion des Elektrons ψ aus 4 Komponenten, und γ^μ sind 4×4-Matrizen. Nichtrelatistischer Grenzfall liefert die Pauli-Gleichung.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist nicht positiv. Umdeutung als Ladungsdichte, Komponenten mit "falscher" Ladung beschreiben *Antiteilchen* (Positronen), die kurz darauf (1932) entdeckt wurden. Ebenso ist Klein-Gordon-Gleichung physikalisch korrekt, sie beschreibt Teilchen und Antiteilchen mit Spin 0.

Die 4 Komponenten von ψ beschreiben Elektron und Positron jeweils mit Spin $\uparrow$ und $\downarrow$. Die Komponenten transformieren sich unter Lorentz-Transformationen (Koordinatentransformationen in Raum und Zeit) in merkwürdiger Weise: Drehungen um 2π liefern ein Vorzeichen, erst Drehung um 4π ist die Identität. Das wird so interpretiert, daß es etwas fundamentaleres als Lorentz-Transformationen gibt, nämlich Spingruppen-Transformationen.

In den 60er Jahren wurde in der Mathematik entdeckt, daß diese Spin-Strukturen eine sehr viel feinere Charakterisierung von Geometrie und Topologie ermöglichen als die bisherige Differentialgeometrie. Der Höhepunkt dieser Entwicklung war das Atiyah-Singer-Indextheorem. Es berechnet den Index eines elliptischen Operators (eine topologisch invariante ganze Zahl) durch ein Integral über lokale Differentialformen (ähnlich dem Gauß-Bonnet-Theorem, das die Euler-Charakteristik als Integral über die Krümmung berechnet).

0.2 Programm

Ziel der Vorlesung ist ein geometrisches Verständnis der Dirac-Gleichung und der in ihr auftretenden Größen

1. Riemannsche Mannigfaltigkeiten, Repèrebündel, Levi-Civita-Zusammenhang
2. Clifford-Algebra, Spin-Gruppe
3. Spin-Struktur, Spin-Bündel, Dirac-Operator
4. Zur Bedeutung in der Mathematik: Index-Theoreme

0.3 Literatur

[1] H. B. Lawson & M.-L. Michelsohn, "Spin Geometry," Princeton University Press, 1989.

[2] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, "Heat Kernels and Dirac Operators," Springer-Verlag, 1992.

[3] H. Baum, "Spin-Strukturen und Dirac-Operatoren über pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten," Teubner, 1981.

1 Differentialgeometrische Grundlagen

1.1 Mannigfaltigkeiten

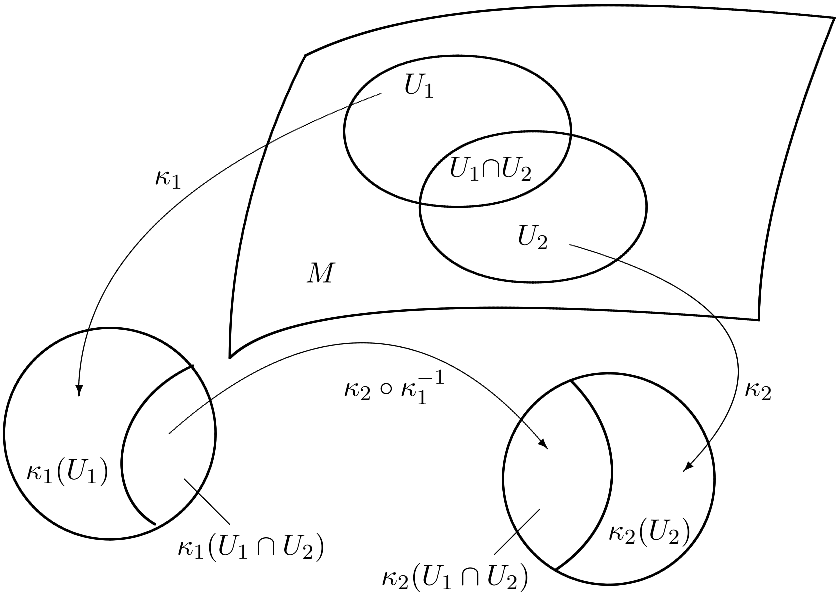
Definition 1 Eine *topologische Mannigfaltigkeit* M ist ein gutartiger topologischer Raum, der lokal einem $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist, d.h. für jeden Punkt $x \in M$ existiert eine Umgebung U und ein Homöomorphismus $\kappa : U \mapsto \kappa(U) \subset \mathbb{R}^n$ (d.h. κ ist bijektiv und κ, κ^{-1} sind stetig). Das Paar (U, κ) heißt lokale Karte.

Definition 2 Ein glatter Atlas $\mathcal{A}$ einer topologischen Mannigfaltigkeit M ist eine Kollektion lokaler Karten $\{(U_\alpha, \kappa_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ mit

- $M = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$, $\quad \kappa_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ sind Homöomorphismen
- die Karten sind miteinander verträglich, d.h. $\forall (U_\alpha, \kappa_\alpha), (U_\beta, \kappa_\beta)$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ist die Abbildung

  $$\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \supset \kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \kappa_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$$

  beliebig oft differenzierbar. Diese Abbildung heißt Kartenwechsel.



Definition 3 Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Untermengen. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt *differenzierbar* in $x \in U$, falls eine stetige lineare Abbildung $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert, so daß

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)(h) + r(x,h) \quad \text{und} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\|r(x,h)\|}{\|h\|} = 0 , \quad h \in \mathbb{R}^n .$$

Die Abbildung $f'(x)$ heißt *Differential* von f in x im Sinne von Fréchet. Die Abbildung $f : U \to V$ heißt differenzierbar auf U, wenn sie in jedem Punkt $x \in U$ differenzierbar ist.

Definition 4 Eine Karte (U, κ) heißt verträglich mit einem Atlas $\mathcal{A}^k$, wenn $A^k \cup (U, \kappa)$ wieder ein Atlas der Klasse C^k ist. Zwei Atlanten $\mathcal{A}_1^k, \mathcal{A}_2^k$ heißen verträglich, wenn $\mathcal{A}_1^k \cup \mathcal{A}_2^k$ wieder ein Atlas der Klasse C^k ist.

Verträglichkeit von Atlanten ist eine Äquivalenzrelation.

Definition 5 Eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit* ist eine topologische Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer Äquivalenzklasse $[\mathcal{A}]$ von glatten Atlanten auf M.

1.2 Tangentialraum und Vektorfelder

Sei M eine (differenzierbare) Mannigfaltigkeit. Wir bezeichnen mit $C^\infty(M)$ die Algebra der (beliebig oft) differenzierbaren reellen Funktionen auf M, d.h. der Abbildungen $f : M \ni x \to f(x) \in \mathbb{R}$, so daß für eine Karte (U, κ) mit $x \in U$ die Abbildung $f \circ \kappa^{-1} : \mathbb{R}^n \ni \kappa_1(U) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Die Algebra-Struktur ist punktweise definiert, d.h. $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ und $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$.

Definition 6 Sei M eine Mannigfaltigkeit. Ein Tangentialvektor v_x im Punkt $x \in M$ ist eine lineare Abbildung $v_x : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, die die Leibniz-Regel erfüllt:

$$\begin{aligned} v_x(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) &= \alpha_1 v_x(f_1) + \alpha_2 v_x(f_2) \;, \\ v_x(f_1 f_2) &= v_x(f_1) f_2(x) + f_1(x) v_x(f_2) \end{aligned}$$

für $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Äquivalent kann man Tangentialvektoren v_x als Äquivalenzklassen von Kurven auffassen, die im Punkt x die gleiche Tangente haben.

Der Raum T_xM aller Tangentialvektoren im Punkt $x \in M$ wird durch $(\alpha v_x + \beta u_x)(f) = \alpha v_x(f) + \beta u_x(f)$ zu einem linearen Raum, dem Tangentialraum der Mannigfaltigkeit im Punkt x.

Definition 7 Der Kotangentialraum T_x^*M in $x \in M$ ist der Raum der linearen Funktionale auf T_xM, d.h. der linearen Abbildungen $T_x^*M \ni \omega_x : T_xM \to \mathbb{R}$.

Definition 8 Ein Vektorfeld X ist eine lineare Abbildung $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, die punktweise mit einem Tangentialvektor übereinstimmt, $(Xf)(x) = X_x(f)$ für ein $X_x \in T_xM$, und die die Leibniz-Regel erfüllt:

$$X(f_1 f_2) = X(f_1) \cdot f_2 + f_1 \cdot X(f_2) \;.$$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{X}(M)$ den unendlich-dimensionalen Vektorraum der Vektorfelder auf M.

Der Raum $\mathfrak{X}(M)$ aller Vektorfelder auf M ist eine Lie-Algebra mit Lie-Klammer gegeben durch $[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))$.

Definition 9 Ein Vektorraum L mit einer bilinearen Abbildung $[\ ,\ ] : L \times L \to L$, der Lie-Klammer, für die $[X, X] = 0\ \forall X \in L$ gilt und die die Jacobi-Identität $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0\ \forall X, Y, Z \in L$ erfüllt, heißt *Lie-Algebra*.

Der Raum $\mathfrak{X}(M)$ aller Vektorfelder auf M ist ein $C^\infty(M)$-Modul, d.h. für $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$ ist $fX \in \mathfrak{X}(M)$ mit $(fX)(f_1) = f \cdot X(f_1)$. Es gilt $(f_1 f_2)X = f_1(f_2 X)$ sowie die üblichen linearen Strukturen der Operation.

Definition 10 Eine differentielle k-Form α auf M ist eine $C^\infty(M)$-multilineare vollständig antisymmetrische Abbildung $\alpha : \times_{i=1}^k \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ mit

$$\begin{aligned} &\alpha(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_j, X_{j+1}, \dots, X_k) \\ &\qquad = -\alpha(X_1, \dots, X_{i-1}, X_j, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_i, X_{j+1}, \dots, X_k) \;, \\ &\alpha(fX + f_1 X_1, X_2, \dots, X_k) = f\alpha(X, X_2, \dots, X_k) + f_1 \alpha(X_1, X_2, \dots, X_k) \;, \end{aligned}$$

für $X, X_I \in \mathfrak{X}(M)$ und $f, f_1 \in C^\infty(M)$.

Wir bezeichnen mit $\Omega^k(M)$ den Raum der differentiellen k-Formen auf M.

1.3 Bündel der linearen Bezugssysteme

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Ein *lineares Bezugssystem* u im Punkt $x \in M$ ist eine geordnete Basis $p_x = (X_1, \ldots, X_n)$ des Tangentialraumes T_xM. Sei $L(M)$ die Menge aller linearen Bezugssysteme p_x an allen Punkten von M. Durch $\pi : p_x \mapsto x$ wird eine surjektive Abbildung $\pi : L(M) \to M$ definiert, die einem linearen Bezugssystem im Punkt x diesen Punkt der Mannigfaltigkeit zuordnet.

Die lineare Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ der invertierbaren reellen $n \times n$-Matrizen wirkt auf natürliche Weise von rechts auf $L(M)$, indem die invertierbare Matrix $a = (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$ ein Bezugssystem $p_x = (X_1, \ldots, X_n)$ in ein neues Bezugssystem $p_x \cdot a := (Y_1, \ldots, Y_n)$ mit $Y_j = \sum_{i=1}^n X_i a_{ij}$ im gleichen Punkt x überführt. Die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ wirkt frei auf dem Urbild $\pi^{-1}(x)$, also der Menge aller Bezugssysteme im Punkt x: für ein beliebiges $p_x \in \pi^{-1}(x)$ folgt aus $p_x \cdot a = p_x$ stets $a_{ij} = \delta_{ij}$. Außerdem wirkt $GL(n, \mathbb{R})$ transitiv auf $\pi^{-1}(x)$: Für beliebige $p_x, q_x \in \pi^{-1}(x)$ existiert ein $a \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $p_x = q_x \cdot a$. Insbesondere ist $\pi(p_x) = \pi(q_x)$ genau dann, wenn $p_x = q_a \cdot a$ für ein $a \in GL(n, \mathbb{R})$.

Die Menge $L(M)$ wird nun zu einer Mannigfaltigkeit durch folgende Konstruktion. Zunächst betrachtet man die Koordinaten-Funktionen $x \mapsto x^i$. Sei $t = (t^1, \ldots t^n) \in \mathbb{R}^n$ und $\pi^i : \mathbb{R}^n \ni t \mapsto t^i \in \mathbb{R}$ die kanonische Projektion, dann sind die Koordinaten-Funktionen in einer gegebenen Karte (U, κ) definiert als $x^i := \pi^i \circ \kappa : U \to \mathbb{R}$, also $x^i(x) = \pi^i(\kappa(x))$. Sei $v_x \in T_xM$ ein Tangentialvektor, dann liefert die Anwendung auf die Koordinatenfunktionen ein Tupel von Zahlen $v_i := v_x(x^i)$. Symbolisch kann man den Tangentialvektor deshalb in gegebener Karte (U, κ) als $v_x = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ darstellen, mit $v_i \in \mathbb{R}$, wobei $\frac{\partial}{\partial x_i} \in T_xM$ durch $\frac{\partial}{\partial x^i}(x^j) = \delta_{ij}$ definiert ist.

Sei $p_x = (X_1, \ldots, X_n)$ ein lineares Bezugssystem im Punkt $x \in U$, dann werden die $X_i \in T_xU$ bezüglich der Karte (U, κ) dargestellt durch $X_i = \sum_{j=1}^n X_{ji} \frac{\partial}{\partial x^j}$. Damit p_x ein Bezugssystem ist, muß die Matrix (X_{ji}) invertierbar sein. Das bedeutet, daß bezüglich der Karte (U, κ) von M gilt $\pi^{-1}(U) \simeq U \times GL(n, \mathbb{R})$.

Mit den so konstruierten Strukturen ist $L(M)$ ein Hauptfaserbündel über M mit Strukturgruppe $GL(n, \mathbb{R})$, das Bündel der linearen Bezugssysteme (oder auch Repère-Bündel, engl. frame bundle).

Definition 11 Seien P, M differenzierbare Mannigfaltigkeiten, G eine Lie-Gruppe und es gelte

1. $\psi : P \times G \ni (p, g) \mapsto \psi_g(p) \in P$ ist eine freie rechte Gruppenwirkung
2. M ist der Faktorraum der Gruppenwirkung, $M = P/G$ mit der kanonischen Projektion $\pi : P \to P/G = M$
3. Es existiert eine Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von M und eine Familie von Diffeomorphismen $\chi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$, den lokalen Trivialisierungen, so daß

- $$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\chi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times G \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$ ein kommutatives Diagramm ist
- $\mathrm{pr}_2 \circ \chi_i(\psi_g(p)) = (\mathrm{pr}_2 \circ \chi_i(p)) \cdot g$

Dann heißt die Struktur $(P, M, G, \pi, \psi, \{\chi_i\})$ ein Hauptfaserbündel über M mit Strukturgruppe G.

Zu zeigen bleibt nur die Äquivarianzeigenschaft der rechten Gruppenwirkung. Für $p = p_x = (X_1, \ldots, X_n)$ ist $\psi_a(p) = (Y_1, \ldots, Y_n)$ mit $Y_i = \sum_{k=1}^n X_k a_{ki}$. Die Trivialisierung χ ist bezüglich der Karte (U, κ) definiert, wo $X_k = \sum_{k=1}^n X_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j}$. Damit erhalten wir

$$Y_i = \sum_{j,k=1}^n X_{jk} a_{ki} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n Y_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} \; .$$

Die Trivialisierung beider Punkte p und $\psi_a(p)$ ist

$$\chi(p) = (x, X_{ji}) \qquad \text{und} \qquad \chi(\psi_a(p)) = (x, Y_{ji}) = \Big(x, \sum_{k=1}^n X_{jk} a_{ki}\Big) \; .$$

1.4 Das Tangentialbündel als assoziiertes Vektorbündel

Die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ wirkt auf natürliche Weise von links auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ (Matrixmultiplikation). Wir bezeichnen diese Gruppenwirkung mit λ. Auf der Produktmannigfaltigkeit $L(M) \times \mathbb{R}^n$ betrachten wir die folgende Äquivalenzrelation:

$$(p_1, y_1) \sim (p_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ so daß } p_2 = p_1 \cdot a \text{ und } y_2 = a^{-1} \cdot y_1 \; .$$

Insbesondere ist $(p \cdot a, y) \sim (p, a \cdot y)$. Wir bezeichnen mit $TM := L(M) \times \mathbb{R}^n / GL(n, \mathbb{R})$ den Quotientenraum von $L(M) \times \mathbb{R}^n$ nach dieser Äquivalenzrelation. Die kanonische Projektion $\pi : L(M) \to M$ induziert eine Projektion $\pi_{TM} : TM \to M$ durch $\pi_{TM}[(p, y)] = \pi(p)$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn $\pi(p)$ ist unabhängig vom gewählten Repräsentaten. Die allgemeinen Strukturen garantieren, daß TM ein zum Hauptfaserbündel $L(M)$ assoziiertes Vektorbündel über M ist mit Strukturgruppe $GL(n, \mathbb{R})$ und typischer Faser $\mathbb{R}^n$.

Wir fassen nun $p_x = (X_1, \ldots, X_n) \in L(M)$ als nichtsinguläre lineare Abbildung

$$p_x : \mathbb{R}^n \to T_x M \; , \qquad p_x : e_i \mapsto X_i \; ,$$

auf, indem p_x den Vektor e_i der Standardbasis $\{e_i\}_{i=1}^n$ im $\mathbb{R}^n$ auf $X_i \in T_x M$ abbildet. Entsprechend betrachten wir $p_x \cdot a$ als Hintereinanderausführung der Abbildungen $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\lambda_a} \mathbb{R}^n \xrightarrow{p_x} T_x M$. Bezüglich der durch die Karten (U, κ) definierten Trivialisierungen gilt $p_x(e_i) = \sum_{i,j=1}^n X_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Satz 1 *Die Abbildung*

$$j : \pi_{TM}^{-1}(x) \ni [(p_x, y)] \mapsto p_x(y) \in T_xM$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Beweis. Sei $X \in T_xM$ gegeben, dann läßt sich eine Basis $p_x = (X, X_2, \ldots, X_n)$ von T_xM finden. Nun ist $p_x(e_1) = X$, also ist die Abbildung j surjektiv.

Sei $p_x(y) = \widetilde{p_x}(\tilde{y}) \in T_xM$. Dann sind $p_x, \widetilde{p_x} \in \pi^{-1}(x)$, so daß es ein $a \in GL(n, \mathbb{R})$ gibt mit $\widetilde{p_x} = p_x \cdot a$. Also ist

$$\widetilde{p_x}(\tilde{y}) = (p_x \cdot a)(\tilde{y}) = p_x(a \cdot \tilde{y}) \overset{!}{=} p_x(y) \; .$$

Da p_x nicht singulär ist, folgt $\tilde{y} = a^{-1} \cdot y$ und damit $[(p_x, y)] = [(\widetilde{p_x}, \tilde{y})]$. □

Damit läßt sich TM als *Tangentialbündel* der Mannigfaltigkeit M auffassen. Die Struktur bezüglich einer lokalen Trivialisierung ergibt sich aus folgendem Satz:

Satz 2 *Der Diffeomorphismus* $\chi : \pi^{-1}(U) \to U \times GL(n, \mathbb{R})$ *mit* $U \subset M$ *offen induziert einen Diffeomorphismus* $\chi^{TM} : \pi_{TM}^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$*, so daß das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{cccc} L(M) \times \mathbb{R}^n \supset & \pi^{-1}(U) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\chi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} & (U \times GL(n, \mathbb{R})) \times \mathbb{R}^n \\ & \iota \downarrow & & \downarrow \mathrm{id}_U \times \lambda \\ TM \supset & \pi_{TM}^{-1}(U) & \xrightarrow{\chi^{TM}} & U \times \mathbb{R}^n \\ & \pi_{TM} \searrow & & \swarrow \mathrm{pr}_1 \\ & & U & \end{array}$$

1.5 Tensorbündel

Sei V ein Vektorraum und V^* sein Dualraum, d.h. der Raum der linearen Funktionale auf V. Dann heißt $T^r_s(V) := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V*}_{s}$ der *Tensorraum vom Typ* (r, s) *über* V. Dabei ist das Tensorprodukt $U \otimes V$ zweier Vektorräume U, V gegeben durch die Menge der Paare (u, v), $u \in U$, $v \in V$ mit den Identifizierungen

$$(r_1u_1 + r_2u_2, v) = r_1(u_1, v) + r_2(u_2, v) \; , \qquad (u, r_1v_1 + r_2v_2) = r_1(u, v_1) + r_2(u_2, v_2) \; ,$$

für $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. (Exakter: man bildet den Quotientenraum von $U \times V$ nach der so erhaltenen Äquivalenzrelation.) Der Raum $T(V) := \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} T^r_s(V)$ ist eine assoziative Algebra mit dem Tensorprodukt $\otimes : T^{r_1}_{s_1}(V) \times T^{r_2}_{s_2}(V) \to T^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}(V)$ als Multiplikation. Eine weitere wichtige Operation ist die Kontraktion

$$C^p_q : T^r_s(V) \to T^{r-1}_{s-1}(V)$$
$$C^p_q : (v_1, \ldots, v_r, v_1^*, \ldots, v_s^*) \mapsto v_q^*(v_p)(v_1, \ldots \check{v}_p, \ldots, v_r, v_1^*, \ldots \check{v}_q^*, \ldots, v_s^*) \; .$$

Satz 3 *Die Gruppe der Automorphismen von V ist isomorph zur Gruppe jener Automorphismen der Tensoralgebra $T(V)$, welche den Typ erhalten und mit Kontraktionen kommutieren.*

Beweis. Sei f ein Autorphismus von $T(V)$ mit den geforderten Eigenschaften. Die Einschränkung von f auf $V = T_0^1(V)$ liefert ein $A \in \mathrm{Aut}(V)$. Dann ist die Einschränkung von f auf $\mathbb{R} = T_0^0(V)$ ist die Identität, denn $f(\alpha v) = f(\alpha)f(v) \overset{!}{=} \alpha f(v)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(fv^*)(Av) &= (fv^*)(fv) = C_1^1(fv \otimes fv^*) = C_1^1(f(v \otimes v^*)) = fC_1^1(v \otimes v^*) \\ &= f(v^*(v)) = v^*(v)\end{aligned}$$

für alle $v \in V$, $v^* \in V^*$. Das bedeutet $fv^* = (A^*)^{-1}v^*$, wobei A^* der zur A adjungierte Automorphismus ist. Also ist

$$f(v_1, \ldots, v_r, v_1^*, \ldots, v_s^*) = (Av_1, \ldots, Av_r, (A^*)^{-1}v_1^*, \ldots, (A^*)^{-1}v_s^*) \ . \qquad \square$$

Für $V = \mathbb{R}^n$ ist $\mathrm{Aut}(V) = GL(n, \mathbb{R})$, so daß es eine natürliche linke Gruppenwirkung $\lambda : GL(n, \mathbb{R}) \times T_s^r(\mathbb{R}^n) \to T_s^r(\mathbb{R}^n)$ gibt. Völlig analog zu TM läßt sich dann das *Tensorbündel* $T_s^rM = L(M) \times T_s^r(\mathbb{R}^n)/GL(n, \mathbb{R})$ als zum Hauptfaserbündel $L(M)$ assoziiertes Vektorbündel konstruieren.

Durch Dualisieren der Abbildung $p_x : \mathbb{R}^n \to T_xM$ erhalten wir eine Abbildung

$$p_x^* : T_x^*M \to (\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n \ , \qquad \langle p_x^*\alpha_x, y\rangle := \alpha_x(p_x(y)) \ ,$$

für $\alpha_x \in T_x^*M$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Damit läßt sich eine Abbildung

$$\begin{aligned}j_s^r : \pi_{T_s^rM}^{-1}(x) \ni {} & [(p_x, y_1 \otimes \cdots \otimes y_r \otimes y_1^* \otimes \cdots \otimes y_s^*)] \\ & \mapsto p_x(y_1) \otimes \cdots \otimes p_x(y_r) \otimes (p_x^*)^{-1}(y_1^*) \otimes \cdots \otimes (p_x^*)^{-1}(y_s^*) \in T_s^r(T_xM)\end{aligned}$$

konstruieren, welche wie zuvor $j : \pi_{TM}^{-1} \to T_xM$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Somit werden die Fasern von T_s^rM mit der Tensoralgebra des Tangentialraums von M identifiziert, was die Bezeichnung von T_s^rM als Tensorbündel rechtfertigt.

Definition 12 Ein lokaler glatter Schnitt eines Faserbündels B über M ist eine differenzierbare Abbildung $s : U \to B$ mit $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$, wobei $\pi : B \to M$ die kanonische Projektion ist und $U \subset M$ offen.

Definition 13 Ein *Tensorfeld* vom Typ (r, s) ist ein glatter Schnitt des Tensorbündels T_s^rM. Ein Tensorfeld vom Typ $(1, 0)$ heißt Vektorfeld.

Bemerkungen:

- Der Raum aller Tensorfelder wird auf natürliche Weise zu einem Modul über $C^\infty(M)$, indem man punktweise $(ft_s^r)(x) = f(x)t_s^r(x)$ definiert für $t_s^r : M \to T_s^rM$ und $f \in C^\infty(M)$.

- Die so definierten Vektorfelder X sind auf natürliche Weise identifiziert mit Vektorfeldern im zuvor definierten Sinn als Abbildungen $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, welche die Leibniz-Regel erfüllen.

Satz 4 *Es existiert eine* $1:1$*-Korrespondenz zwischen Tensorfeldern* t^r_s *vom Typ* (r,s) *und äquivarianten Abbildungen* $\widetilde{t^r_s} : L(M) \to T^r_s(\mathbb{R}^n)$*, d.h.* $\widetilde{t^r_s} \circ \psi_a = \lambda_{a^{-1}} \circ \widetilde{t^r_s}$*, so daß*

$$\begin{array}{ccc} L(M) & \stackrel{(\mathrm{id}_{L(M)}, \widetilde{t^r_s})}{\longrightarrow} & L(M) \times T^r_s(\mathbb{R}^n) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \iota \\ M & \stackrel{t^r_s}{\longrightarrow} & T^r_s M \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm ist.

Damit haben wir

$$\widetilde{t^r_s}(p) = (\underbrace{p^{-1} \otimes \cdots \otimes p^{-1}}_{r} \otimes \underbrace{p^* \otimes \cdots \otimes p^*}_{s})(t^r_s(\pi(p)))$$

und insbesondere $\tilde{X}(p) = p^{-1}(X(\pi(p)))$ für Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$.

1.6 Allgemeine Koordinatentransformationen

Definition 14 Ein Diffeomorphismus $\hat{\theta} : L(M) \to L(M)$ heißt Automorphismus des Hauptfaserbündels $L(M)$, falls

- das folgende Diagramm ist kommutativ

$$\begin{tikzcd} L(M) \arrow[r, "\hat{\theta}"] \arrow[d, "\pi"'] & L(M) \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "\mathrm{id}"] & M \end{tikzcd}$$

- $\hat{\theta}$ kommutiert mit der rechten Gruppenwirkung, $\hat{\theta} \circ \psi_a = \psi_a \circ \hat{\theta} \quad \forall a \in GL(n, \mathbb{R})$.

Die Gruppe $\mathcal{G}$ der vertikalen Automorphismen von $L(M)$ heißt Gruppe der allgemeinen Koordinatentransformationen.

Satz 5 *Es gibt eine* $1:1$*-Korrespondenz zwischen allgemeinen Koordinatentransformationen* $\hat{\theta}$ *und äquivarianten Abbildungen* $u : L(M) \to GL(n, \mathbb{R})$ *(differenzierbar) mit* $u(p \cdot a) = a^{-1} u(p) a$.

Beweis. Setze $\hat{\theta}(p) = p \cdot u(p)$. □

Ein vertikaler Automorphismen $\hat{\theta}$ induziert eine Koordinatentransformation von Tensorfeldern durch

$$(\hat{\theta}^* \tilde{t^r_s})(p) = \tilde{t^r_s}(\hat{\theta}(p)) = \tilde{t^r_s}(p \cdot u(p)) = \lambda_{u(p)^{-1}} \tilde{t^r_s}(p) = u(p)^{-1} \cdot \tilde{t^r_s}(p) \; .$$

Dem entspricht eine Koordinatentransformation der Schnitte

$$t^r_s(x) \mapsto \widehat{t^r_s}(x) = [(p, (\hat{\theta}^* \tilde{t^r_s})(p))] = [(p, \lambda_{u(p)^{-1}} \tilde{t^r_s}(p))] = [(p \cdot u(p)^{-1}, \tilde{t^r_s}(p))]$$

Diese Konstruktion ist unabhängig von $p \in \pi^{-1}(x)$, denn

$$[(p \cdot a \cdot u(p \cdot a)^{-1}, \tilde{t^r_s}(p \cdot a))] = [(p \cdot a \cdot a^{-1} \cdot u(p)^{-1} \cdot a, \lambda_{a^{-1}} \tilde{t^r_s}(p))] = [(p \cdot u(p)^{-1}, \tilde{t^r_s}(p))] .$$

Im Falle von Vektorfeldern $X \in \mathfrak{X}(M)$ haben wir $\tilde{X}(p) = p^{-1} \cdot X(x)$ und $\widehat{X}(x) = p \cdot (\hat{\theta}^* \tilde{X})(p) = p \cdot u(p)^{-1} \cdot p^{-1} \cdot X(x)$. Da diese Konstruktion unabhängig von $p \in \pi^{-1}(x)$ ist, können wir bezüglich der Karte (U, κ) von M jenes lineare Bezugssystem $p_0 \in \pi^{-1}(x)$ wählen, für das $p_0(e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ist. Dann gilt für $X(x) = \sum_{j=1}^n X_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$

$$\widehat{X}_i(x) = \sum_{j=1}^n (u(p_0)^{-1})_{ij} X_j(x) .$$

Für die duale Abbildung haben wir $e^i = p_0^*(dx^i)$, denn

$$\delta^i_j = \langle e^i, e_j \rangle = \langle p_0^*(dx^i), (p_0)^{-1}(\tfrac{\partial}{\partial x^j}) \rangle = dx^i(\tfrac{\partial}{\partial x^j}) .$$

Wenn also das Tensorfeld die Kartendarstellung

$$t^r_s(x) = \sum_{i_a, j_b = 1}^n t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(x) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots dx^{j_s}$$

hat, so ist

$$\widehat{t^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s}}(x) = \sum_{i_a, j_b = 1}^n (u(p_0)^{-1})_{k_1 i_1} \cdots (u(p_0)^{-1})_{k_r i_r} (u(p_0)^*)_{l_1 j_1} \cdots (u(p_0)^*)_{l_s j_s} t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(x) .$$

1.7 Lineare Zusammenhänge

Ein *linearer Zusammenhang* ist ein Zusammenhang im Bündel $L(M)$ der linearen Bezugssysteme.

Definition 15 Sei P ein Hauptfaserbündel über M mit Strukturgruppe G und $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G. Eine differentielle Einsform ω auf P mit Werten in $\mathfrak{g}$ heißt Zusammenhangsform, wenn

- $\omega_p(\sigma(A)) = A$,
- $\psi_a^* \omega = \mathrm{Ad}(a^{-1}) \omega$.

Dabei ist $\sigma(A) = A_*$ das durch

$$(A_* f)(p) = \frac{d}{dt}\Big(f \circ \psi_{\exp(tA)}(p)\Big)\Big|_{t=0} , \qquad f \in C^\infty(P) .$$

definierte fundamentale Vektorfeld (oder Killing-Feld) auf P.

Ist ω eine Zusammenhangsform, dann definiert $H_p := \ker \omega_p \subset T_pM$ einen linearen Unterraum des Tangentialraums, den horizontalen Unterraum. Die durch die Zusammenhangsform ω definierte Zuordnung $p \mapsto H_p$ heißt Zusammenhang auf P.

Ist $V_p = \sigma_p(\mathfrak{g}) \subset T_pP$ der vertikale Unterraum (Tangentialraum an die Faser $\pi^{-1}(\pi(p))$ durch p), dann gilt

- Komplementarität: $T_pP = H_p \oplus V_p \qquad \forall p \in P$
- Rechtsinvarianz: $\psi'_g(H_p) = H_{\psi_g(p)}$
- die Zuordnung $p \mapsto H_p$ ist glatt

Die allgemeinen Definitionen und Eigenschaften gelten natürlich auch für das Bündel $L(M)$. Es gibt auf $L(M)$ aber noch eine wichtige Besonderheit:

Definition 16 Die durch

$$\vartheta_p(X) := p^{-1}(\pi'_p(X)) , \quad X \in T_pP$$

definierte Einsform auf P mit Werten im $\mathbb{R}^n$ heißt *kanonische Einsform* oder *Verschmelzungsform*.

Es gilt $\psi_a^*\vartheta = a^{-1} \cdot \vartheta$, denn für $X \in T_pP$ ist

$$(\psi_a^*\vartheta)_p(X) = \vartheta_{p \cdot a}(\psi'_a X) = (p \cdot a)^{-1}(\pi'_{pa}(\psi'_a X)) = a^{-1} \cdot p^{-1}(\pi'_p(X)) = a^{-1} \cdot \vartheta_p(X) .$$

Also ist die Verschmelzungsform eine Einsform auf P mit Werten im $\mathbb{R}^n$ vom Typ $GL(n, \mathbb{R})$.

Sei Γ ein linearer Zusammenhang (definiert durch eine Zusammenhangsform ω auf $L(M)$). Jedem $y \in \mathbb{R}^n$ ordnen wir ein horizontales Vektorfeld $B(y)$ auf $L(M)$ zu, indem $(B(y))_p \in H_p$ der eindeutige horizontalen Vektor ist, für den $\pi'_p(B(y))_p = p(y) \in T_{\pi(p)}M$ ist.

Satz 6 *1. $\vartheta_p(B(y)) = y$ und $\omega_p(B(y)) = 0$ für alle $p \in L(M)$ und $y \in \mathbb{R}^n$*

2. $\psi'_a(B(y)) = B(a^{-1} \cdot y)$

3. Wenn $y \neq 0$, dann verschwindet $B(y)$ nirgends.

Beweis. 1. folgt aus der Definition. Wenn $X = (B(y))_p \in H_p$, dann ist $\psi'_a(X) \in H_{p \cdot a}$ und $\pi'_p(X) = \pi'_{p \cdot a}(\psi'_a X)$. Also ist

$$\pi'_p(B(y))_p = p(y) = (p \cdot a)(a^{-1} \cdot y) = \pi'_{p \cdot a}(B(a^{-1} \cdot y))_{p \cdot a} = \pi'_{p \cdot a}(\psi'_a(B(y))_p) .$$

Schließlich sei $(B(y))_p = 0$ für irgendein $p \in L(M)$, dann ist $p(y) = \pi'_p(B(y)) = 0$. Da $p : \mathbb{R}^n \to T_xM$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist, folgt $y = 0$. $\square$

Definition 17 Sei α eine differentielle k-Form auf $L(M)$ mit Werten in einem beliebigen Vektorraum. Dann definiert ein Zusammenhang Γ auf P eine kovariante Ableitung $D\alpha$ durch

$$(D\alpha)_p(X_1, \ldots, X_{k+1}) := (d\alpha)_p(\mathrm{hor}X_1, \ldots, \mathrm{hor}X_{k+1}) \ ,$$

für $X_i \in \mathfrak{X}(L(M))$.

Dabei ist das äußere Differential einer differentiellen k-Form α gegeben durch

$$\begin{aligned}(d\alpha)(X_0, X_1, \ldots, X_k) := &\sum_{i=0}^{k}(-1)^i X_i(\alpha(X_0, \ldots, \check{X}_i, \ldots, X_k)) \\ &+ \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j}\alpha([X_i, X_j], X_0, \ldots, \check{X}_i, \ldots, \check{X}_j, \ldots, X_k) \ .\end{aligned}$$

Definition 18 Sei ω eine lineare Zusammenhangsform auf $L(M)$. Die kovariante Ableitung $\Omega := D\omega$ von ω heißt *Krümmmungsform* und die kovariante Ableitung $\Theta := D\vartheta$ von ϑ heißt *Torsionsform*.

Satz 7 *Es gelten die Strukturgleichungen*

$$\begin{aligned}\Theta(X,Y) &= (d\vartheta)(X,Y) + \omega(X)\vartheta(Y) - \omega(Y)\vartheta(X) \ , \\ \Omega(X,Y) &= (d\omega)(X,Y) + [\omega(X), \omega(Y)] \ ,\end{aligned}$$

für $X, Y \in \mathfrak{X}(L(M))$. Dabei ist $\omega(X)\vartheta(Y)$ das Matrixprodukt von $\omega(X) \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = M(n,\mathbb{R})$ mit $\vartheta(Y) \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Die 2. Gleichung wurde im letzten Semester bewiesen. Fallunterscheidung für 1. Gleichung:
X, Y vertikal, dann $\Theta(X,Y) = 0$ und $\vartheta(X) = \vartheta(Y) = 0$. Weiter $d\vartheta(X,Y) = X\vartheta(Y) - Y\vartheta(X) - \vartheta([X,Y]) = -\vartheta([X,Y])$. Da $[X,Y]$ vertikal, verschwinden beide Seiten der Strukturgleichung.
X, Y horizontal, dann ist $\omega(X) = \omega(Y) = 0$, und es verbleibt die Definition der kovarianten Ableitung.
X vertikal, Y horizontal. Wir setzen $X = A_* = \sigma(A)$ und $Y = B(y)$. Dann ist $\Theta(X,Y) = 0$, $\omega(Y)\vartheta(X) = 0$ und $\omega(X)\vartheta(Y) = \omega(\sigma(A))\vartheta(B(y)) = A \cdot y$. Andererseits ist

$$\begin{aligned}(d\vartheta)(X,Y) &= A^*\vartheta(B((y)) - B(y)\vartheta(A^*) - \vartheta([A^*, B(y)]) = -\vartheta([A^*, B(y)]) \\ &= -\vartheta(\mathcal{L}_{A^*}(B(y)))\end{aligned}$$

Es gilt

$$\mathcal{L}_{A^*}(B(y)) = \frac{d}{dt}\Big((\psi_{\exp(-At)})_* B(y) - B(y)\Big) = \frac{d}{dt}\Big(B(\exp(At) \cdot y) - B(y)\Big) = B(A \cdot y)$$

und deshalb $(d\vartheta)(X,Y) = -A \cdot y$. □

Satz 8 *Es gelten die Bianchi-Identitäten*

$$(D\Theta)(X,Y,Z) = \Omega(X,Y)\vartheta(Z) + \Omega(Y,Z)\vartheta(X) + \Omega(Z,X)\vartheta(Y) \ ,$$
$$(D\Omega)(X,Y,Z) = 0 \ ,$$

für $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(L(M))$.

Beweis. Die 2. Bianchi-Identität wurde im letzten Semester beweisen. Zum Beweis der ersten schreiben wir die Strukturgleichung als $\Theta = d\vartheta + \omega \wedge \vartheta$. Dann ist

$$\begin{aligned}(D\Theta)(X,Y,Z) &= (d\Theta)(\mathrm{hor}X, \mathrm{hor}Y, \mathrm{hor}Z) = (d\omega \wedge \vartheta)(\mathrm{hor}X, \mathrm{hor}Y, \mathrm{hor}Z) \\ &= (\Omega \wedge \vartheta)(X,Y,Z) \ . \end{aligned}$$ □

1.8 Kovariante Ableitungen von Tensorfeldern nach Vektorfeldern

Wir bezeichnen mit $\Gamma^\infty(T^r_s M)$ den Raum der Tensorfelder vom Typ (r,s), d.h. die Menge der differenzierbaren Schnitte des entsprechenden Tensorbündels, und mit $\phi : t^r_s \mapsto \widetilde{t^r_s}$ die 1:1-Korrespondenz zwischen Tensorfeldern $t^r_s \in \Gamma^\infty(T^r_s M)$ und äquivarianten Abbildungen $\widetilde{t^r_s} : L(M) \to T^r_s(\mathbb{R}^n)$. Wir haben

$$(\phi(t^r_s))(p) = (\underbrace{p^{-1} \otimes \cdots \otimes p^{-1}}_{r} \otimes \underbrace{p^* \otimes \cdots \otimes p^*}_{s})(t^r_s(\pi(p))) \ .$$

Die Abbildung ϕ ist ein Homomorphismus der Tensoralgebren,

$$\phi(t^{r_1}_{s_1} \otimes t^{r_2}_{s_2}) = \phi(t^{r_1}_{s_1}) \otimes \phi(t^{r_2}_{s_2})$$

welcher mit Kontraktionen kommuiert:

$$\phi(C^a_b t^{r_1}_{s_1}) = C^a_b \phi(t^{r_1}_{s_1}) \ .$$

Ein linearer Zusammenhang definiert eine kovariante Ableitung dieser äquivarianten Abbildungen durch

$$(D\widetilde{t^r_s})(Y) := (d\widetilde{t^r_s})(\mathrm{hor}(Y)) = (\mathrm{hor}(Y))(\widetilde{t^r_s}) \ , \qquad Y \in \mathfrak{X}(P) \ .$$

Hierbei ist $\widetilde{t^r_s}$ als $T^r_s(\mathbb{R}^n)$-wertige Funktion auf $L(M)$ betrachtet.

Das horizontale Vektorfeld $\mathrm{hor}(Y)$ in dieser Definition läßt sich als horizontaler Lift $\mathrm{hor}(Y) = X^*$ eines Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(M)$ auffassen. Dieser horizontale Lift ist gegeben durch $(X^*)_p = (B(p^{-1}(X)))_p$ und $\pi'_p(X^*)_p = X_p$. Nach Rücktransformation in ein Tensorfeld mittels ϕ^{-1} erhalten wir die *kovariante Ableitung eines Tensorfeldes* $t^r_s \in \Gamma^\infty(T^r_s M)$ *nach einem Vektorfeld* $X \in \mathfrak{X}(M)$ zu

$$\nabla_X t^r_s := \phi^{-1}\big((D(\phi(t^r_s)))(X^*)\big) = \phi^{-1}\big(X^*(\phi(t^r_s))\big) \ .$$

Satz 9 *Sei* $T(M) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \Gamma^\infty(T_s^r M)$ *die Algebra der Tensorfelder über* M *und* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*. Die kovariante Ableitung hat folgende Eigenschaften:*

1. $\nabla_X : T(M) \to T(M)$ *ist eine Typ-erhaltende Derivation, die mit beliebigen Kontraktionen kommutiert*
2. $\nabla_X f = Xf$ *für alle* $f \in C^\infty(M) = \Gamma^\infty(T_0^0 M)$
3. $\nabla_{X+Y} = \nabla_X + \nabla_Y$
4. $\nabla_{fX} t_s^r = f \cdot \nabla_X t_s^r$ *für alle* $t_s^r \in \Gamma^\infty(T_s^r M)$

Beweis. 1. folgt aus den gleichen Eigenschaften von ϕ und der Derivationseigenschaft von X^*. Sei $p(h)$ die Integralkurve von X^* durch $p(0) = p$, dann ist

$$(X^*(t \otimes t'))(p) = \frac{d}{dh}(t(p(h)) \otimes t'(p(h)))\Big|_{h=0} = (X^*t)(p) \otimes t'(p) + t(p) \otimes (X^*t')(p) .$$

2. Es gilt $(\phi(f))(p) = f(\pi(p))$, also $\phi\big|_{C^\infty(M)} = \pi^*$, und deshalb

$$\begin{aligned}(X^*\phi(f))(p) &= \frac{d}{dh}(\phi(f))(p(h))\Big|_{h=0} = \frac{d}{dh}(f(\pi(p(h))))\Big|_{h=0} \\ &= \frac{d}{dh}(f(x(h)))\Big|_{h=0} = (Xf)(x) = (\phi(Xf))(p) .\end{aligned}$$

3. und 4. folgen aus der Definition von ∇_X. □

Mittels der Abbildung $p : \mathbb{R}^n \to T_{\pi(p)}M$ lassen sich Torsions- und Krümmungsform in Torsions- und Krümmungstensoren überführen. Für $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ setzen wir

$$(T(X,Y))_x := p(\Theta_p(X^*, Y^*)) , \qquad (R(X,Y)Z)_x := p(\Omega_p(X^*, Y^*) \cdot p^{-1}(Z)) ,$$

wobei X^*, Y^* die horizontalen Lifte von X, Y sind und $p \in \pi^{-1}(x)$ beliebig ist. Der Torsionstensor ist eine antisymmetrische bilineare Abbildung $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, und R ist ein Tensorfeld vom Typ $(1,3)$ mit $R(X,Y) = -R(Y,X)$.

Satz 10 *Es gilt*

$$\begin{aligned}T(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] , \\ R(X,Y)Z &= [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z .\end{aligned}$$

Beweis. Wir zuvor bezeichnen X^*, Y^* die horizontalen Lifte von X, Y. Sei außerdem $p(t)$ die Integralkurve von X^* durch $p = p(0)$. Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned}(\nabla_X Y)_x &= (\phi^{-1}(X^*(\phi(Y))))_x = p\Big(\frac{d}{dt}(p(t)^{-1}(Y_{\pi(p(t))}))\Big|_{t=0}\Big) \\ &= p\Big(\frac{d}{dt}(p(t)^{-1}(\pi'_{p(t)}(Y^*_{\pi(p(t))})))\Big|_{t=0}\Big) = p\Big(\frac{d}{dt}(\vartheta(Y^*)(p(t)))\Big|_{t=0}\Big) \\ &= p((X^*\vartheta(Y^*))_p) .\end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}(T(X,Y))_x &= p((d\vartheta)_p(X^*,Y^*)) = p(X^*(\vartheta(Y^*)) - Y^*(\vartheta(X^*)) - \vartheta([X^*,Y^*]))_p \\ &= (\nabla_X Y - \nabla_Y X)_x - \pi'_p([X^*,Y^*]))_p \ .\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus $\pi'_p([X^*,Y^*]) = [X,Y]_x$, denn sei $f \in C^\infty(M)$ und $p(t)$ die Integralkurve von Y^* durch $p(0) = p$, dann gilt

$$\pi'_p([X^*,Y^*]))_p f = ([X^*,Y^*](f \circ \pi))_p$$

und

$$(Y^*(f \circ \pi))_p = \frac{d}{dt}(f \circ \pi(p(t)))\Big|_{t=0} = (Yf)_{\pi(p)} \ ,$$

also $(X^*(Y^*(f \circ \pi)))_p = (X(Yf))_{\pi(p)}$.

Zum Beweis der zweiten Beziehung betrachten wir

$$\begin{aligned}([\nabla_X,\nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z)_x &= p((X^*(Y^*\vartheta(Z^*)) - Y^*(X^*\vartheta(Z^*)) - [X,Y]^*\vartheta(Z^*))_p) \\ &= p((([X^*,Y^*] - [X,Y]^*)\vartheta(Z^*))_p) \ .\end{aligned}$$

Da $\pi'_p([X^*,Y^*]) = [X,Y]_x = \pi'_p([X,Y]^*)$, ist $[X^*,Y^*] - [X,Y]^* = \mathrm{ver}([X^*,Y^*]) = A_* = \sigma(A)$ ein vertikales Vektorfeld. Es ist das fundamentale Vektorfeld zu $-\Omega(X^*,Y^*) = -(d\omega)(X^*,Y^*) = \omega([X^*,Y^*]) = \omega(\mathrm{ver}([X^*,Y^*])) = A$. Damit gilt

$$\begin{aligned}([\nabla_X,\nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z)_x &= p((\sigma(A)\vartheta(Z^*))_p) \\ &= p\Big(\frac{d}{dt}\vartheta(Z^*)_{p\cdot\exp(At)}\Big|_{t=0}\Big) \\ &= p\Big(\frac{d}{dt}(p\cdot\exp(At))^{-1}(\pi'_{p\cdot\exp(At)}(Z^*_{\pi(p\cdot\exp(At))}))\Big|_{t=0}\Big) \\ &= p\Big(\frac{d}{dt}(p\cdot\exp(At))^{-1}(Z_{\pi(p)})\Big|_{t=0}\Big) \\ &= p(-A\cdot p^{-1}(Z_{\pi(p)})) = p(\Omega_p(X^*,Y^*)\cdot p^{-1}(Z_{\pi(p)})) \\ &= R(X,Y)Z \ . \end{aligned}$$

□

Ohne Beweis erwähnen wir

Satz 11 *Es gelten die Bianchi-Identitäten*

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z - (T(X,Y),Z) - (\nabla_X T)(Y,Z) + \text{zyklisch} &= 0 \ . \\ (\nabla_X R)(Y,Z) + R(T(X,Y),Z) + \text{zyklisch} &= 0 \ .\end{aligned}$$

1.9 Darstellung in lokalen Koordinaten

Durch eine Karte (U, κ) werden die Koordinatenfunktionen $x \mapsto x^\mu$, $\mu = 1, \ldots, n$ definiert und entsprechend die Tangentialvektoren $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \in T_x M$ als Basis des Tangentialraumes. Die Koordinatendifferentiale $dx^\mu \in T_x^* M$ bilden die dazu duale Basis des Kotangentialraumes. Die Tensorprodukte von $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ und dx^μ bilden eine lokale Basis der Tensoralgebra $T(T_x M)$. Wir verwenden von nun an griechische Indizes für die Koordinatenbasen und lateinische für die Basis e_i im $\mathbb{R}^n$.

Ein linearer Zusammenhang definiert nun eine lokale Basis $\{\frac{\partial}{\partial p^\mu}, \frac{\partial}{\partial p_{ij}}\}_{\mu,i,j=1,\ldots,n}$ von $T_p L(M)$. Dabei sind $\frac{\partial}{\partial p^\mu} = (\frac{\partial}{\partial x^\mu})^*$ die horizontalen Lifte der Basisvektoren von $T_x M$ und $\frac{\partial}{\partial p_{ij}} := \sigma_p(e_{ij})$ die Killingvektorfelder der Standardbasis $e_{ij} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Die Verschmelzungsform ist nun gegeben durch

$$\theta_p = \sum_{\mu,i=1}^{n} \theta^i_\mu(p)\, e_i \otimes dp^\mu \ ,$$

denn θ verschwindet auf vertikalen Vektoren. Die Zusammanhangsform hat die Darstellung

$$\omega_p = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \omega^{ij}_{kl}(p)\, e_{ij} \otimes dp^{kl} \ ,$$

denn sie verschwindet auf horizontalen Vektoren.

Entsprechend gilt für Torsions- und Krümmungsform

$$\Theta_p = \sum_{\mu,\nu,i=1}^{n} \frac{1}{2}\Theta^i_{\mu\nu}(p)\, e_i \otimes dp^\mu \wedge dp^\nu \ , \qquad \Omega_p = \sum_{\mu,\nu,i,j=1}^{n} \frac{1}{2}\Omega^{ij}_{\mu\nu}(p)\, e_{ij} \otimes dp^\mu \wedge dp^\nu \ .$$

Dabei ist $\wedge$ das antisymmetrisierte Tensorprodukt.

Zwar kommutieren die Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ von $T_x M$, jedoch ist das nicht mehr der Fall für ihre horizontalen Lifte $\frac{\partial}{\partial p^\mu}$: Die 2. Strukturgleichung liefert

$$\Omega_p(\tfrac{\partial}{\partial p^\mu}, \tfrac{\partial}{\partial p^\nu}) = \sum_{i,j=1}^{n} \Omega^{ij}_{\mu\nu}(p)\, e_{ij} = (d\omega)_p(\tfrac{\partial}{\partial p^\mu}, \tfrac{\partial}{\partial p^\nu}) = -\omega_p([\tfrac{\partial}{\partial p^\mu}, \tfrac{\partial}{\partial p^\nu}]) \ .$$

Folglich gilt

$$[\tfrac{\partial}{\partial p^\mu}, \tfrac{\partial}{\partial p^\nu}] = -\Omega^{ij}_{\mu\nu}(p)\, \tfrac{\partial}{\partial p^{ij}} \ ,$$

denn $\omega_p(\frac{\partial}{\partial p^{ij}}) = \omega_p(\sigma_p(e_{ij}) = e_{ij}$. Die Krümmung ist also ein Maß für die Nichtkommutativität der horizontalen Basisvektoren von $T_p L(M)$. Damit liefert die erste Strukturgleichung

$$\Theta^i_{\mu\nu}(x) = \Theta^i(\tfrac{\partial}{\partial p^\mu}, \tfrac{\partial}{\partial p^\nu}) = \frac{\partial \vartheta^i_\nu(p)}{\partial p^\mu} - \frac{\partial \vartheta^i_\mu(p)}{\partial p^\nu} \ .$$

Die kovarianten Ableitungen der Vektorfelder definieren *Zusammenhangskoeffizienten*

$$\big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \tfrac{\partial}{\partial x^\nu}\big)_x = \sum_{\rho=1}^n \Gamma^\rho_{\mu\nu}(x) \tfrac{\partial}{\partial x^\rho}$$

und Koeffizienten der Torsions- und Krümmungstensoren

$$T(\tfrac{\partial}{\partial x^\mu}, \tfrac{\partial}{\partial x^\nu})_x = \sum_{\rho=1}^n T^\rho_{\mu\nu}(x)\, \tfrac{\partial}{\partial x^\rho}\,, \qquad (R(\tfrac{\partial}{\partial x^\mu}, \tfrac{\partial}{\partial x^\nu}) \tfrac{\partial}{\partial x^\rho})_x = \sum_{\sigma=1}^n R^\sigma_{\mu\nu\rho}(x)\, \tfrac{\partial}{\partial x^\sigma}\,.$$

Die Strukturgleichungen liefern

$$T^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}\,, \qquad R^\sigma_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \sum_{\tau=1}^n (\Gamma^\rho_{\mu\tau}\Gamma^\tau_{\nu\rho} - \Gamma^\rho_{\nu\tau}\Gamma^\tau_{\mu\rho})\,.$$

Der Zusammenhang mit den Koeffizienten der Torsions- und Krümmungsformen ist durch $p(e_i) = \sum_{\mu=1}^n p_i^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ gegeben. Es folgt

$$T^\rho_{\mu\nu}(x) = \sum_{i=1}^n p_i^\rho \Theta^i_{\mu\nu}(p)\,, \qquad R^\sigma_{\mu\nu\rho}(x) = \sum_{i,j=1}^n p_i^\sigma \Omega^{ij}_{\mu\nu}(p)(p^{-1})^j_\rho\,.$$

1.10 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Definition 19 Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist eine Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer Abbildung $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$, dem metrischen Tensorfeld, so daß

- $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ ist symmetrisch,
- Für alle $x \in M$ ist die Bilinearform $g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ nichtausgeartet, d.h. $g_x(v, w) = 0$ für alle $v \in T_xM$ genau dann, wenn $w = 0$.

Im weiteren werden wir die Metrik g auch als nichtausgearteten Schnitt des Tensorbündels T^0_2M auffassen.

Falls $g_x(v, v) > 0$ für alle $x \in M$ und $v \in T_xM$, $v \neq 0$, so ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit im eigentlichen Sinn, ansonsten eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit, die durch die Signatur $(s, n-s)$ charakterisiert ist, also die Zahlen p der positiven und $n-p$ der negativen Eigenwerte von g_x. Im Riemannschen Fall liefert der metrische Tensor in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit ein inneres Produkt von Tangentialvektoren: $\langle v, w\rangle = g_x(v, w)$ für $v, w \in T_xM$.

Eine Metrik definiert eine Reduktion des Bündels $L(M)$ der linearen Bezugssysteme auf das Bündel $O(M)$ der (pseudo)orthonormalen Bezugssysteme.

Definition 20 Sei (P, M, G, π, ψ) ein Hauptfaserbündel und $\eta : H \to G$ eine Homomorphismus von Lie-Gruppen. Eine Reduktion von P ist gegeben durch ein Hauptfaserbündel (Q, M, H, π_Q, ψ^Q) und eine differenzierbare Abbildung $\varrho : Q \to P$, so daß

- $\pi \circ \varrho = \pi_Q$
- $\varrho(\psi_h^Q q) = \psi_{\eta(h)} \varrho(q)$.

In unserem Fall ist $\eta : O(s, n-s) \to GL(n, \mathbb{R})$ die Einbettung der pseudo-orthonormalen Matrizen

$$O(s, n-s) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \ , \quad A^t \eta A = \eta \ , \ \eta = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{s}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-s})\}$$

in die invertierbaren. Das Bündel $Q = O(M)$ ist faserweise definiert als

$$\pi_Q^{-1}(x) := \{p_x = (X_1, \dots, X_n) \in \pi^{-1}(x) \ , \quad g_x(X_i, X_j) = \eta_{ij}\} \ .$$

Aquivalent dazu ist

$$\pi_Q^{-1}(x) := \{p_x \in \pi^{-1}(x) \ , \quad g_x(X, Y) = \langle p_x^{-1}(X), \eta \cdot p_x^{-1}(Y) \rangle_{\mathbb{R}^n} \quad \forall X, Y \in T_x M\} \ .$$

Die $O(s, n-s)$-Invarianz von $\langle \ , \eta \ \rangle_{\mathbb{R}^n}$ garantiert, daß $q \cdot A \in Q$ für alle $q \in Q$ und $A \in O(n, \mathbb{R})$.

Umgekehrt definiert jede Bündelreduktion von $L(M)$ auf $O(M)$ eine pseudo-Riemannsche Metrik durch $g_x(X, Y) = \langle q_x^{-1}(X), \eta q_x^{-1}(Y) \rangle_{\mathbb{R}^n}$. Da Bündelreduktionen in 1:1-Korrespondenz sind mit globalen Schnitten des zu $L(M)$ assoziierten Bündels $E = L(M)/O(n, \mathbb{R})$ mit typischer Faser $GL(n, \mathbb{R})/O(n, \mathbb{R})$, und ein solcher Schnitt immer existiert (wenn M parakompakt), existiert auf jeder parakompakten Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Metrik.

Definition 21 Ein linearer Zusammenhang Γ heißt metrischer Zusammenhang, wenn für jede Kurve $I \supset t \mapsto \gamma(t) \in M$ auf M durch $\gamma(0) = x$ der horizontale Lift $\gamma^*(t)$ durch jeden Punkt $q \in \pi_{O(M)}^{-1}(x)$ vollständig in $O(M)$ liegt, also $\gamma^*(t) \in O(M)$ für alle $t \in I$.

Sei $t \mapsto \gamma(t)$ eine Kurve auf M durch $\gamma(0) = x$ und sei $t \mapsto p(t) := \gamma^*(t)$ der horizontale Lift zu einer Kurve auf $L(M)$, d.h. der Tangentialvektor in $p(t)$ ist der horizontale Lift des Tangentialvektors in $\gamma(t)$. Sei $Y \in T_x M$, dann ist der Paralleltransport $Y \mapsto \tau_t(Y) \in T_{\gamma(t)} M$ definiert als $\tau_t(Y) = p(t)(p^{-1}(Y))$. Die Metrik g heißt *parallel*, wenn $g_x(X, Y) = g_{\gamma(t)}(\tau_t(X), \tau_t(Y))$ für jede Kurve $t \mapsto \gamma(t)$.

Satz 12 *Ein linearer Zusammenhang ist genau dann ein metrischer Zusammenhang, wenn die Metrik parallel ist.*

Beweis. Ist Γ ein metrischer Zusammenhang und $p \in O(M)$, dann ist $p(t) \in O(M)$ für alle t, und

$$\begin{aligned} g_{\gamma(t)}(\tau_t(X), \tau_t(Y)) &= \langle p(t)^{-1}(\tau_t(X)), \eta \cdot p(t)^{-1}(\tau_t(Y))\rangle = \langle p^{-1}(X), \eta \cdot p^{-1}(Y)\rangle \\ &= g_x(X, Y) \ . \end{aligned}$$

Umgekehrt folgt aus $g_x(X, Y) = g_{\gamma(t)}(\tau_t(X), \tau_t(Y))$, daß $p(t) \in O(M)$. □

Ist Γ ein metrischer Zusammenhang, dann gilt $\nabla_X g = 0$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$. Denn seien $p(t)$ die Integralkurve von X^* und $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ und C die Kontraktion, so gilt

$$\begin{aligned} (\nabla_X g(Y, Z))_x &= (C \circ (\nabla_X g \otimes Y \otimes Z))_x \\ &= (C \circ (\phi^{-1}(X^* \phi(g)) \otimes \phi^{-1}(\phi(Y)) \otimes \phi^{-1}(\phi(Z))))_x \\ &= (\phi^{-1}(C \circ (X^* \phi(g) \otimes \phi(Y) \otimes \phi(Z))))_x \\ &= \Big(\phi^{-1}\Big(C \circ \Big(\frac{d}{dt}(\phi(g))_{p(t)}\Big|_{t=0} \otimes p^{-1}(Y) \otimes p^{-1}(Z)\Big)\Big)\Big)_x \\ &= \Big(\phi^{-1}\Big(C \circ \Big(\frac{d}{dt}((p(t)^* \otimes p(t)^*)(g_{\pi(p(t))}))\Big|_{t=0} \otimes p^{-1}(Y) \otimes p^{-1}(Z)\Big)\Big)\Big)_x \\ &= \Big(\phi^{-1}\Big(\frac{d}{dt} g_{\pi(p(t))}\big(p(t)(p^{-1}(Y)), p(t)(p^{-1}(Z))\big)\Big|_{t=0}\Big)\Big)_x = 0 \ . \end{aligned}$$

Da ∇_X eine Derivation der Tensoralgebra, gilt allgemein $(\nabla_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$.

Satz 13 *Auf einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit gibt es genau einen torsionsfreien metrischen Zusammenhang, den Levi-Civita-Zusammenhang.*

Beweis. Da g nichtausgeartet, wird $\nabla_X Y$ definiert durch

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y]) \ . \end{aligned} \tag{*}$$

Es folgt

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = Xg(Y, Z) \ ,$$

also $\nabla_X g = 0$, und

$$2g(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], Z) = 0 \ .$$

Damit ist jeder Zusammenhang, für den (*) gilt, ein metrischer torsionsfreier Zusammenhang. Seien zwei Zusammenhänge gegeben, für die (*) gilt, dann stimmen diese auf Vektorfeldern und Funktionen überein. Da Zusammenhänge Deriationen der Tensoralgebra sind, die mit Kontraktionen kommutieren, und die Tensoralgebra durch Vektorfeldern, Funktionen und Kontraktionen generiert ist, stimmen die Zusammenhänge auf der gesamten Tensoralgebra überein. □

In lokalen Koordinaten haben wir $g(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}) =: g_{\mu\nu}$ und für den Levi-Civita-Zusammenhang

$$2g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \frac{\partial}{\partial x^\rho}) = 2\sum_{\sigma=1}^n \Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} = \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \;.$$

Bezeichnen $g^{\mu\rho} = g^{-1}(dx^\mu, dx^\nu)$ die Komponenten der inversen Matrix, $\sum_{\nu=1}^n g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$, so erhalten wir die Zusammenhangskeoffizienten für den Levi-Civita-Zusammenhang (die Christoffel-Symbole)

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \sum_{\sigma=1}^n \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}\Big(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\Big) = \Gamma^\rho_{\nu\mu} \;.$$

Der Krümmungstensor für den Levi-Civita-Zusammenhangs heißt Riemann-Tensor. Seine Komponenten $R^\sigma_{\mu\nu\rho}$ haben in Termen von $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ die gleiche Form wie zuvor. Durch Kontraktion des oberen und mittleren unteren Index werden die Komponenten des Ricci-Tensors erhalten, $R_{\mu\rho} := \sum_{\nu=1}^n R^\nu_{\mu\nu\rho}$. Eine weitere Kontraktion mit der inversen Metrik liefert den Krümmungsskalar $R = \sum_{\mu,\rho=1}^n g^{\mu\rho} R_{\mu\rho}$.

1.11 Einstein-Hilbert-Wirkung

Das Wirkungsfunktional der Einsteinschen Gravitationstheorie ist die Einstein-Hilbert-Wirkung

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\, \sqrt{|\det g|} R$$

Dabei ist $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ die Einsteinsche Gravitationskonstante und G die Newtonsche.

Im Gegensatz zu den Eichtheorien werden nicht die Komponenten $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ des Zusammenhangs, sondern die Komponenten $g_{\mu\nu}$ der Metrik als fundamentale physikalische Objekte betrachtet. Die Variation der Wirkung, erweitert um andere nichtgravitative Teile $S' = \int d^4x\, \sqrt{|\det g|}\mathcal{L}$, nach $g_{\mu\nu}$ liefert die Einsteinschen Feldgleichungen

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa T^{\mu\nu} \;,$$

wobei $R^{\mu\nu} := g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} R_{\rho\sigma}$ und

$$T^{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{|\det g|}} \frac{\delta(\sqrt{|\det g|}\;\mathcal{L})}{\delta g_{\mu\nu}}$$

der symmetrische Energie-Impulstensor ist.

Alternativ kann die Einstein-Hilbert-Wirkung auch mit Differentialformen ausgedrückt werden. Es gilt

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa}\int_M \mathrm{tr}(s^*(\vartheta) \wedge s^*(\vartheta) \wedge *(s^*\Omega)) \;.$$

Dabei ist $s : M \to P$ ein beliebiger Schnitt von $O(M)$, $\star$ der Hodge Operator und die Spur ist in folgender Weise zu verstehen: Wir fassen $s^*(\vartheta) \wedge s^*(\vartheta)$ als $M_n(\mathbb{R})$-wertige 2-Form auf M auf, die mit der $M_n(\mathbb{R})$-wertigen $(n-2)$-Form $*(s^*\Omega)$ zu multiplizieren ist. Davon ist die Spur im Matrix-Anteil zu nehmen, so daß eine n-Form auf M entsteht, welche integriert werden kann.

2 Clifford-Algebra

2.1 Konstruktion

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und q eine symmetrische Bilinearform auf V, also eine bilineare Abbildung $q : V \times V \to \mathbb{K}$ mit $q(v, w) = q(w, v)$. Sei $T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \otimes^k V$ die kontravariante Tensoralgebra über V, mit $\otimes^0 V := \mathbb{K}$, und sei $I_q(V)$ das zweiseitige Ideal von $T(V)$ erzeugt von allen Elementen der Form

$$(v \otimes v - q(v, v)1) \ .$$

Die Clifford-Algebra ist dann die Quotientenalgebra $C\ell(V, q) := T(V)/I_q(V)$. Ein Element von $C\ell(V, q)$ ist damit eine Äquivalenzklasse von Tensoren $[t]$ mit $t_1 \in [t] \ \Leftrightarrow \ t_1 - t \in I_q(V)$.

Die Projektion $\pi_q : T(V) \to C\ell(V, q)$ auf die Äquivalenzklassen ist ein Homomorphismus von Algebren, da

$$[t][t'] := (t + I_q(V)) \otimes (t' + I_q(V)) = t \otimes t' + I_q(V) = [t \otimes t'] \ .$$

Damit wird eine Einbettung $\gamma = \pi_q|_V : V \to C\ell(V, q)$ des Vektorraumes V in die Clifford-Algebra induziert. Für diese gilt

$$0 = \pi_q(v \otimes v - q(v, v)1) = \gamma(v)\gamma(v) - q(v, v) \ ,$$

also $\gamma(v)\gamma(v) = q(v, v)$. Weiter folgt

$$\begin{aligned} q(v + w, v + w) &= q(v, v) + q(w, w) + 2q(v, w) = \gamma(v + w)\gamma(v + w) \\ &= \gamma(v)\gamma(v) + \gamma(w)\gamma(w) + \gamma(v)\gamma(w) + \gamma(w)\gamma(v) \end{aligned}$$

und somit

$$\gamma(v)\gamma(w) + \gamma(w)\gamma(v) = 2q(v, w) \ .$$

Die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung der Tensoralgebra $T(V) = T^+(V) \oplus T^-(V)$ mit $T^+(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \otimes^{2k} V$ und $T^-(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \otimes^{2k+1} V$ induziert eine $\mathbb{Z}_2$-Graduierung der Clifford-Algebra:

$$\begin{aligned} &C\ell(V, q) = C\ell^+(V, q) \oplus C\ell^-(V, q) \ , \\ &C\ell^+(V, q) := \pi_q(T^+(V)) \ , \qquad C\ell^-(V, q) := \pi_q(T^-(V)) \ . \end{aligned}$$

Die Clifford-Algebra ist universell im folgenden Sinn:

Satz 14 *Sei C eine Algebra über $\mathbb{K}$ mit folgenden Eigenschaften*

i) Es existiert eine lineare Abbildung $j : V \to C$, deren Bild C generiert *ii) Für jede Algebra A über $\mathbb{K}$ mit 1_A und für jede lineare Abbildung $F : V \to A$ mit $F(v)F(v) = q(v,v)1_A$ existiert ein Homomorphismus $\tilde{F} : C \to A$, so daß*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & C \\ F \searrow & & \swarrow \tilde{F} \\ & A & \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm ist.

Dann sind C und $C\ell(V,q)$ isomorph.

Satz 15 *Seien $e_1, \dots, e_n$ erzeugende Vektoren von V, die bezüglich q orthogonal sind, $q(e_i, e_j) = 0$ für alle $1 \le i < j \le n$. Dann wird $C\ell(V,q)$ multiplikativ von $\gamma(e_1), \dots, \gamma(e_n)$ erzeugt.*

Die Elemente

$$1,\ \gamma(e_{i_1}),\ \gamma(e_{i_1})\gamma(e_{i_2}),\ \dots, \gamma(e_{i_1})\gamma(e_{i_2})\cdots\gamma(e_{i_s}),\ \dots, \gamma(e_1)\gamma(e_2)\cdots\gamma(e_n) \quad (*)$$

mit $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_s \le n$ bilden eine Vektorraum-Basis von $C\ell(V,q)$, so daß $C\ell(V,q)$ als Vektorraum die Dimension 2^n hat.

Beweis. Da die e_i den Vektorraum V erzeugen, erzeugen ihre Tensorprodukte die Tensoralgebra $T(V)$. Nach Projektion auf $C\ell(V,q)$ erzeugen deshalb Produkte der $\gamma(e_i)$ die Clifford-Algebra.

Wegen $\gamma(e_i)^2 = q(e_i,e_i) \in \mathbb{K}$ und $\gamma(e_i)\gamma(e_j) = -\gamma(e_j)\gamma(e_i)$ für $i \neq j$ wird $C\ell(V,q)$ bereits durch die Elemente (*) linear erzeugt. Ihre Anzahl ist $\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} = 2^n$. □

Die aus jeweils der gleichen Anzahl $k \le n$ von Produkten aus $\gamma(e_i)$ bestehenden Basiselemente spannen einen $\binom{n}{k}$-dimensionalen linearen Unterraum $C\ell^k(V,q) \subset C\ell(V,q)$ auf,

$$C\ell^k(V,q) = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\big(\gamma(e_{i_1})\gamma(e_{i_2})\cdots\gamma(e_{i_k})\big)_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}$$

2.2 Clifford-Moduln

Definition 22 Ein Clifford-Modul E ist ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter linearer Raum, $E = E^+ \oplus E^-$, so daß eine gerade Wirkung der Clifford-Algebra auf E existiert, d.h.

$$C\ell^{\pm}(V,q)\cdot E^+ \subset E^{\pm}\,, \qquad C\ell^{\pm}(V,q)\cdot E^- \subset E^{\mp}\,,$$
$$c_1(c_2\cdot\alpha) = (c_1c_2)\cdot\alpha \qquad \text{für } c_1, c_2 \in C\ell(V,q)\ ,\ \alpha \in E\ .$$

Die Clifford-Algebra ist selbst ein Clifford-Modul. Für $v \in V$ sei $\gamma(v)$ die Wirkung von V auf einem Clifford-Modul.

Ein weiteres wichtiges Beispiel für einen Clifford-Modul ist die äußere Algebra $\Lambda V = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k V$ mit $\Lambda^k V := \underbrace{V \wedge \cdots \wedge V}_{k}$. Sie ist $\mathbb{Z}_2$-graduiert mit $\Lambda^+ V =$

$\bigoplus_{k=0}^{[n/2]} \Lambda^{2k} V$ und $\Lambda^- V = \bigoplus_{k=0}^{[n/2]} \Lambda^{2k+1} V$. Für $v \in V$ und $\alpha \in \Lambda V$ definieren wir das äußere Produkt zu

$$\epsilon(v)\alpha := v \wedge \alpha \ .$$

Zur Definition des inneren Produkts fassen wir die Bilinearform als Abbildung $q : v \to V^*$ auf über $q : v \mapsto q(v, \, . \,)$. Es wird im Moment noch nicht verlangt, daß das ein Isomorphismus ist. Nun definieren wir die Kontraktion eines Kovektors $v^* \in V^*$ mit $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ zu

$$v^* \rfloor (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) := \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} v^*(v_i)(v_1 \wedge \cdots \wedge \check{v_i} \wedge \cdots \wedge v_k) \ .$$

Nun können wir für $v \in V$ und $\alpha \in \Lambda V$ das innere Produkt definieren zu

$$\iota(v)\alpha := q(v) \rfloor \alpha \ .$$

Satz 16 *Die äußere Algebra ist ein Clifford-Modul mit*

$$\gamma(v) := \epsilon(v) + \iota(v) \ .$$

Beweis. Wir nutzen die Universalitätseigenschaft der Clifford-Algebra. Sei $A = \mathrm{End}(\Lambda V)$ und $F = \gamma : V \to A$. Wenn $\gamma(v)\gamma(v) = q(v, v)1_A$, dann existiert ein Homomorphismus $\tilde{\gamma} : C\ell(V, q) \to \mathrm{End}(\Lambda V)$ mit $\tilde{\gamma}(v) = \gamma(v)$.

Sei $\alpha = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$, dann ist

$$\gamma(v)\alpha = v \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} q(v, e_{i_j})(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \check{e_{i_j}} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})$$

und

$$\begin{aligned}
&\gamma(v)(\gamma(v)\alpha) \\
&= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} q(v, e_{i_j}) v \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \check{e_{i_j}} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \\
&+ q(v, v) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j} q(v, e_{i_j}) v \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \check{e_{i_j}} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) \\
&+ \sum_{j=1}^{k} \sum_{h=1}^{j-1} (-1)^{j+h} q(v, e_{i_j}) q(v, e_{i_h}) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \check{e_{i_h}} \wedge \cdots \wedge \check{e_{i_j}} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \\
&+ \sum_{j=1}^{k} \sum_{h=j+1}^{k} (-1)^{j+h+1} q(v, e_{i_j}) q(v, e_{i_h}) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \check{e_{i_j}} \wedge \cdots \wedge \check{e_{i_h}} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \\
&= q(v, v) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Die Modul-Struktur induziert die *Symbolabbildung* $\sigma : C\ell(V,q) \to \Lambda V$ durch

$$\sigma(c) := \gamma(c) \cdot 1 \;, \qquad c \in C\ell(V,q) \;.$$

Die Symbolabbildung ordnet einfach die Basen zu:

$$\sigma : \gamma(e_{i_1})\gamma(e_{i_2}) \cdots \gamma(e_{i_k}) \mapsto e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \;.$$

Deshalb hat die Symbolabbildung hat ein Inverses, die *Quantisierungsabbildung*,

$$\sigma^{-1} : e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mapsto \gamma(e_{i_1})\gamma(e_{i_2}) \cdots \gamma(e_{i_k}) \;.$$

Durch die Symbolabbildung werden Vektorraum-Isomorphismusmen $\sigma : C\ell^k(V,q) \to \Lambda^k V$ definiert. Diese Vektorraum-Isomorphismen induzieren ein vom äußeren Produkt verschiedenes Produkt in ΛV:

$$\alpha * \beta := \sigma(\sigma^{-1}(\alpha) \cdot \sigma^{-1}(\beta)) \;, \qquad \alpha, \beta \in \Lambda V \;.$$

Das Produkt $*$ ist assoziativ. Es erhält die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung, aber nicht die $\mathbb{N}$-Graduierung (für $q \neq 0$). Es stimmt für $q = 0$ mit dem äußeren Produkt überein. Deshalb heißt $*$ auch das quantisierte Produkt der äußeren Algebra.

Ist $V = T_x^*M$ der Raum der Kovektoren im Punkt $x \in M$ und $q = g^{-1}$ eine nichtausgeartete Metrik im Punkt x, dann ist ΛV der Raum der Differentialformen ausgewertet in x. Nehmen wir die Clifford-Wirkung des maximalen Elements $\gamma(e_1) \cdots \gamma(e_n)$ auf eine Differentialform $\alpha \in \Lambda^k(T_x^*M)$, dann stimmt diese bis auf mögliche Vorzeichen mit dem Hodge-Operator überein. Die Clifford-Algebra enthält also mehr Struktur als die Algewbra der Differentialformen. In der nichtkommutativen Geometrie wird das ausgenutzt, um Yang-Mills-Wirkungsfunktionale ausschließlich in der Clifford-Algebra zu konstruieren, ohne die (nur im kommutativen definierte) äußere Algebra und den Hodge-Operator zu verwenden.

2.3 Pin- und Spin-Gruppe

Sei

$$C\ell^\times(V,q) := \{a \in C\ell(V,q) \;,\; \exists a^{-1} \in C\ell(V,q) \text{ mit } a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1\}$$

die Gruppe der invertierbaren Elemente der Clifford-Algebra. Diese Gruppe enthält alle $\gamma(v) \in C\ell^1(V,q)$ mit $q(v,v) \neq 0$, denn $\gamma(v) \cdot \frac{1}{q(v,v)}\gamma(v) = 1$.

Satz 17 *Ist* $\dim(V) = n$*, dann ist* $C\ell^\times(V,q)$ *eine Lie-Gruppe der Dimension* 2^n.

Beweis. Die Zuordnung der Basen definiert einen Vektorraum-Isomorphismus $C\ell(V,q) \simeq \mathbb{K}^{2^n}$ und damit eine differenzierbare Struktur auf $C\ell(V,q)$. Wir zeigen, daß $C\ell^\times(V,q)$ offen in $C\ell(V,q)$ ist und somit zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit wird.

Sei $L : C\ell(V,q) \to \mathrm{End}(C\ell(V,q))$ die Linksmultiplikation $L_a(c) := a \cdot c$. Dann ist $C\ell^\times(V,q) = L^{-1}(\mathrm{Aut}(C\ell(V,q)))$, denn $L_a \circ L_{a^{-1}} = L_1$, so daß $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$. Da L als lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen stetig ist und $\mathrm{Aut}(C\ell(V,q))$ offen in $\mathrm{End}(C\ell(V,q))$, ist $C\ell^\times(V,q)$ offen in $C\ell(V,q)$.

Die Multiplikation $\mu : C\ell(V,q) \times C\ell(V,q) \to C\ell(V,q)$ ist als bilineare Abbildung differenzierbar. Dann ist auch die Einschränkung auf die offene Teilmenge $C\ell^\times(V,q) \times C\ell^\times(V,q)$ differenzierbar. Die Differenzierbarkeit der Inversenbildung folgt aus dem Satz über implizite Funktionen. □

Wir bezeichnen mit $\alpha : V \to V$ den Vorzeichenwechsel $\alpha(v) = -v$. Da $\gamma(\alpha(v))\gamma(\alpha(v)) = q(v,v)$, folgt aus der Universalitätseigenschaft der Clifford-Algebra die Existenz eines Algebrenhomomorphismus $\alpha : C\ell(V,q) \to C\ell(V,q)$. Dieser Homomorphismus ist gerade die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung. Es gilt $\alpha(c) = \pm c$ für $c \in C\ell^\pm(V,q)$ und $\alpha^2 = \mathrm{id}$.

Die Gruppe $C\ell^\times(V,q)$ wirkt auf $C\ell(V,q)$ über die *(getwistete) adjungierte Darstellung*

$$\mathrm{Ad} : C\ell^\times(V,q) \to \mathrm{Aut}(C\ell(V,q)) , \qquad \mathrm{Ad}_a c := \alpha(a) \cdot c \cdot a^{-1} .$$

Satz 18 *Sei $v \in V$ mit $q(v,v) \neq 0$. Identifizieren wir V mit $\gamma(V)$, dann gilt $\mathrm{Ad}_v V = V$, und explizit $\mathrm{Ad}_v w = w - 2\frac{q(v,w)}{q(v,v)} v$ für alle $w \in V$.*

Beweis. Wegen $v^{-1} = \frac{1}{q(v,v)} v$ haben wir

$$\begin{aligned} q(v,v)\mathrm{Ad}(v)w &= q(v,v)\alpha(v)wv^{-1} = -vwv = vvw - v(vw + wv) \\ &= q(v,v)w - 2q(v,w)v . \end{aligned}$$ □

Geometrisch beschreibt die adjungierte Darstellung Ad_v also eine Reflexion von w an der Hyperebene $v^\perp := \{u \in V \ , \ q(u,v) = 0\}$.

Es ist nun sinnvoll, die Untergruppe jener Elemente $a \in C\ell^\times(V,q)$ zu betrachten, für die $\mathrm{Ad}(a)V = V$ gilt:

$$P(V,q) := \{a \in C\ell^\times(V,q) \ , \quad \mathrm{Ad}_a V = V\} .$$

Da $\mathrm{Ad}_a : V \to C\ell(V,q)$ stetig in a ist, ist $P(V,q)$ abgeschlossen (bezüglich der Konvergenz von Folgen) und damit eine Lie-Gruppe.

Definition 23 Die Untergruppe von $P(V,q)$

$$\mathrm{Pin}(V,q) := \{v_1 \cdot v_2 \cdots v_r \ , \ q(v_i,v_i) = \pm 1\}$$

heißt *Pin-Gruppe* von (V,q). Die zugehörige *Spin-Gruppe* ist definiert als $\mathrm{Spin}(V,q) := \mathrm{Pin}(V,q) \cap C\ell^+(V,q)$.

Die Pin- und Spin-Gruppen sind ebenfalls Lie-Gruppen als abgeschlossene Untergruppen von $P(V,q)$. Ihre Dimensionen sind durch q bestimmt.

Satz 19 *Sei* $\dim(V) = n$ *und* q *nichtausgeartet. Dann ist der Kern des Gruppenhomomorphismus* $\mathrm{Ad} : P(V,q) \to \mathrm{Aut}(V)$ *gegeben durch die Gruppe* $\mathbb{K}^\times$ *der nichtverschwindenden Vielfache von* 1.

Beweis. Wir wählen eine Orthogonalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ von V mit $q(v_i, v_i) \neq 0$ und $q(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$. Angenommen, $a \in C\ell^+(V,q)$ ist im Kern von Ad, also $\alpha(a)v = va$ für alle $v \in V$. Wenn $a = a^+ + a^-$ mit $a^\pm \in C\ell^\pm(V,q)$, so ist $a^+v = va^+$ und $a^-v = -va^-$.

Wir zerlegen a bezüglich der Basis von V und nutzen die Clifford-Relation $vw + wv = 2q(v,w)1$. Dann ist $a^+ = a_0 + v_1 a_1$, wobei a_0, a_1 Polynome in $v_2, \dots, v_n$ sind (die also v_1 nicht enthalten). Offenbar ist v_0 gerade und a_1 ungerade. Wählen wir $v = v_1$, so folgt $(a_0 + v_1 a_1)v_1 = v_1(a_0 + v_1 a_1)$ und aus der Graduierung $(a_0 + v_1 a_1)v_1 = v_1 a_0 - v_1 v_1 a_1$. Da $v_1 v_1 = q(v_1, v_1) \neq 0$, folgt $a_1 = 0$. Durch Wiederholung der Schritte für $a_0 = a_0' + v_2 a_1'$ usw. folgt schließlich $a_0 \in \mathbb{K}$. Analog folgt $a^- = 0$. $\square$

Auf der Tensoralgebra definieren wir die Transposition als die Umkehrung der Reihenfolge der Tensorprodukte,

$$^t : v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto v_n \otimes v_{n-1} \otimes \cdots \otimes v_1 \; .$$

Die Transposition erhält das Ideal und projiziert sich deshalb auf einen Antiautomorphismus $^t : C\ell(V,q) \to C\ell(V,q)$ der Clifford-Algebra mit $(c_1 c_2)^t = c_2^t c_1^t$. Dann definieren wir die *Normabbildung*

$$N : C\ell(V,q) \to C\ell(V,q) \; , \qquad N(c) := \alpha(c^t) \cdot c \; .$$

Es gilt $N(v) = -q(v,v)1$ für alle $v \in V$.

Satz 20 *Sei* q *nichtausgeartet und* $\dim(V) = n$. *Dann liefert die Einschränkung von* N *auf die Gruppe* $P(V,q)$ *einen Gruppenhomomorphismus*

$$N : P(V,q) \to \mathbb{K}^\times \; .$$

Beweis. Sei $a \in P(V,q)$, also $\alpha(a)va^{-1} \in V$ für alle $v \in V$. Transposition ist die Identität auf V, also folgt $\alpha(a)va^{-1} = (a^{-1})^t v \alpha(a^t)$ und damit

$$v = a^t \alpha(a) v a^{-1} (\alpha(a^t))^{-1} = \alpha(\alpha(a^t)a) v (\alpha(a^t)a)^{-1} = \mathrm{Ad}_{\alpha(a^t)a} v \; .$$

Folglich ist $\alpha(a^t)a$ im Kern von Ad. Mit $a \in P(V,q)$ ist auch $\alpha(a^t) \in P(V,q)$ und damit $a^t\alpha(a) \in P(V,q)$. Dann liefert der vorige Satz $\alpha(a^t)a \in \mathbb{K}^\times$.

Dann folgt für $a, b \in P(V,q)$

$$N(ab) = \alpha((ab)^t)ab = \alpha(b^t)\alpha(a^t)ab = \alpha(b^t)N(a)b = N(a)N(b) \; ,$$

und N ist ein Gruppenhomomorphismus. $\square$

Satz 21 *Sei q nichtausgeartet. Die Transformationen* $\mathrm{Ad}_a : V \to V$ *erhält die quadratische Form q für alle $a \in P(V,q)$,*

$$q(\mathrm{Ad}_a v, \mathrm{Ad}_a w) = q(v,w)$$

und liefert damit einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Ad} : P(V,q) \to O(V,q) \ ,$$

wobei $O(V,q) \subset \mathrm{Aut}(V)$ die Gruppe der q-erhaltenden Automorphismen von V ist.

Beweis. Da $N(a) \subset \mathbb{K}^\times$ für $a \in P(V,q)$, ist $\alpha(N(a)) = N(a)$. Dann gilt für alle $a \in P(V,q)$ und $v \in V$

$$\begin{aligned} -q(\mathrm{Ad}_a v, \mathrm{Ad}_a v) &= N(\mathrm{Ad}_a v) = N(\alpha(a) v a^{-1}) = \alpha((a^t)^{-1})\alpha(v) a^t \alpha(a) v a^{-1} \\ &= \alpha(N(a)) N(v) N(a^{-1}) = -q(v,v) \ . \end{aligned}$$

□

Satz 22 *Die Abbildung* $\mathrm{Ad} : P(V,q) \to O(V,q)$ *ist surjektiv (wenn q nicht ausgeartet).*

Beweis. Die Gruppe $P(V,q)$ enthält zumindest Elemente der Form $v_1 \cdot v_2 \cdots v_r$ mit $q(v_i,v_i) \neq 0$. Dann ist

$$\mathrm{Ad}_{v_1 \cdots v_r} = \rho_{v_1} \circ \cdots \circ \rho_{v_r} \ ,$$

wobei $\rho_v w = w - 2\frac{q(v,w)}{q(v,v)} v$ die Reflexion an der Hyperebene $v^\perp$ ist. Ein klassisches Theorem besagt, daß jedes Element $g \in O(V,q)$ als Produkt von r Reflexionen $g = \rho_{v_1} \circ \cdots \circ \rho_{v_r}$ dargestellt werden kann mit $r \leq \dim(V)$. □

Wir führen nun die spezielle orthogonale Gruppe

$$SO(V,q) := \{g \in O(V,q) \ , \ \det g = 1\}$$

und die spezielle Clifford-Gruppe

$$SP(V,q) := P(V,q) \cap C\ell^+(V,q)$$

ein. Es gilt $\det(\rho_v) = -1$ für alle $v \in V$ mit $q(v,v) \neq 0$. Zur Überprüfung wählen wir eine Basis $(v_1 = v, v_2, \ldots, v_n)$ von V mit $q(v_i,v_j) = 0$ für $i \neq j$. Dann ist $\rho_v v_1 = -1$ und $\rho_v v_i = v_i$ für alle $2 \leq i \leq n$. Also ist

$$SO(V,q) := \{\rho_{v_1} \circ \cdots \circ \rho_{v_r} \ , \ q(v_i,v_i) \neq 0 \text{ und } r \text{ gerade } \} \ .$$

Andererseits ist $v_1 \cdots v_r \in SP(V,q)$ für r gerade und $q(v_i,v_i) \neq 0$, so daß $\mathrm{Ad} : SP(V,q) \to SO(V,q)$ surjektiv ist.

Es fragt sich nun, ob auch die Einschränkung von Ad auf $\mathrm{Pin}(V,q)$ bzw. $\mathrm{SPin}(V,q)$ bereits surjektiv ist.

Satz 23 *Die Abbildungen*

$$\mathrm{Ad}: \mathrm{Spin}(V,q) \to \mathrm{SO}(V,q)\ , \qquad \mathrm{Ad}: \mathrm{Pin}(V,q) \to \mathrm{O}(V,q)\ ,$$

sind surjektiv mit $\ker \mathrm{Ad} = \pm 1$ *für* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *und* $\ker \mathrm{Ad} = \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$ *für* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Beweis. Sei $a = v_1 \cdots v_r \in \mathrm{Pin}(V,q) \cap \ker \mathrm{Ad}$. Dann ist $a \in \mathbb{K}^\times$ und $N(a) = \alpha(a^t)a = a^2 = N(v_1)\cdots N(v_r) \in \{\pm 1\}$. Daraus folgt $a \in \{+1,-1\}$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a \in \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Surjektivität folgt aus der Darstellung von $\mathrm{O}(V,q)$ und $\mathrm{SO}(V,q)$ als Reflexionen, zusammen mit der Invarianz von ρ_v unter Skalierungen $\rho_{tv} = \rho_v$ für alle $t \neq 0$, während $q(tv,tv) = t^2 q(v,v)$. Wir können also die Reflexionen auf $q(v,v) = \pm 1$ normieren. □

Im reellen Fall sagt man, daß $Spin(V,q)$ bzw. $Pin(V,q)$ eine zweifache Überlagerung von $SO(V,q)$ bzw. $O(V,q)$ ist.

2.4 Die pseudoorthogonalen Clifford-Algebren

Sei V ein reeler Vektorraum. Ist q nichtausgeartet, dann existiert eine Basis $(e_1,\dots,e_n)$ von V, so daß für $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ gilt

$$q(v,v) = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_{r+s}^2\ .$$

mit $r+s = n$ und $0 \leq r \leq n$. Wir schreiben dann $C\ell(r,s) = C\ell(V,q)$, $Pin(r,s) = Pin(V,q)$, $Spin(r,s) = Spin(V,q)$, $O(r,s) = O(V,q)$ und $SO(r,s) = SO(V,q)$. Ist $s = 0$, so wird s üblicherweise weggelassen.

Das orientierte Volumenelement ist definiert als $\gamma^{n+1} := e_1 e_2 \cdots e_n$. Es ist unabhängig von der Basis definiert, denn ein Basiswechsel $e_i \mapsto \tilde{e}_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} e_j$ ändert γ^{n+1} um $\det g = 1$, da $g \in SO(r,s)$. Es gilt $(\gamma^{n+1})^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+s}$ und $\gamma^{n+1} v = (-1)^{n-1} v \gamma^{n+1}$ für $v \in \mathbb{R}^n$. Damit ist

$$c\gamma^{n+1} = \begin{cases} \gamma^{n+1} c & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \gamma^{n+1}\alpha(c) & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Daran sieht man bereits einen grundlegenden Unterschied z.B. der Clifford-Algebren $C\ell(1,3)$ und $C\ell(4)$.

Ist $(\gamma^{n+1})^2 = 1$, so definieren wir Projektionen $P_R := \frac{1}{2}(1+\gamma^{n+1})$ und $P_L := \frac{1}{2}(1-\gamma^{n+1})$ mit $1 = P^L + P_R$ und $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$ sowie $P_L P_R = P_R P_L = 0$.

Satz 24 *Ist* $(\gamma^{n+1})^2 = 1$ *und* $n = r+s$ *ungerade, so kann* $C\ell(r,s)$ *als direkte Summe isomorpher Unteralgebren zerlegt werden,* $C\ell(r,s) = C\ell^{(L)}(r,s) \oplus C\ell^{(R)}(r,s)$ *mit* $C\ell^{(L/R)}(r,s) = P_{L/R} C\ell(r,s) = C\ell(r,s) P_{L/R}$ *und* $\alpha(C\ell^{(L/R)}(r,s)) = C\ell^{(R/L)}(r,s)$.

Ist $(\gamma^{n+1})^2 = 1$ und $n = r + s$ gerade, so kann jeder Cliford-Modul E in die Eigenräume von γ^{n+1} zum Eigenwert $\pm$ zerlegt werden, $E = E_L \oplus E_R$ mit $E_{L/R} := P_{L/R} \cdot E$. Jeder Vektor $v \in V$ mit $q(v,v) \neq 0$ definiert Isomorphismen $v : E_L \to E_R$ und $v : E_R \to E_L$

Die einfachsten reellen Clifford-Algebren lassen sich leicht ausrechnen:

$$
\begin{aligned}
C\ell(1,0) &= \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\ , & C\ell(0,1) &= \mathbb{C} \qquad e_1 =: \mathrm{i} \\
C\ell(2,0) &= M_2(\mathbb{R})\ , & C\ell(1,1) &= M_2(\mathbb{R}) \\
C\ell(0,2) &= \mathbb{H}
\end{aligned}
$$

In vier Dimensionen ist

$$
\begin{aligned}
C\ell(4,0) = C\ell(0,4) = C\ell(1,3) &= M_2(\mathbb{H})\ , \\
C\ell(3,1) = C\ell(2,2) &= M_4(\mathbb{R})\ .
\end{aligned}
$$

Das bedeutet insbesondere, daß man für Sigmnatur $(4,0)$ und $(1,3)$ die γ-Matrizen durch Blöcke aus Pauli-Matrizen schreiben kann.

Man beweist weiter eine Periodizität der pseudoorthogonalen Clifford-Algebren mit Periode 8. Das ist von Bedeutung in der reellen K-Theorie, die ebenfalls periodisch modulo 8 ist, und in der String-Theorie, wo es Majorana-Weyl-Spinoren in $8n + 2$ Dimensionen geben kann, wobei $2, 10, 26$ besonders interessant sind.

Dagegen sind die komplexen Clifford-Algebren sehr viel einfacher, da es mit komplexen Linearkombinationen keinen Unterschied der Vorzeichen $q(v,v) = \pm 1$ mehr gibt. Wir können also $q(e_i, e_i) = 1$ annehmen. Dann kann stets $(\gamma^{n+1})^2 = 1$ erreicht weden durch Hinzufügen einer geeigneten Potenz von i, also $\gamma^{n+1} = \mathrm{i}^{\frac{n(n-1)}{2}} e_1 \cdots e_n$. Es gibt dann nur einen grundlegenden Unterschied zwischen geraden und ungeraden Dimensionen, was der Bott-Periodizität (modulo 2) der komplexen K-Theorie entspricht.

2.5 Die pseudoorthogonalen Pin- und Spingruppe

Ohne Beweis sei erwähnt:

- $O(n)$ hat zwei Zusammenhangskomponenten, eine davon (mit Determinante 1) ist $SO(n)$
- $Pin(n)$ hat zwei Zusammenhangskomponenten, eine davon ist $Spin(n)$
- $O(r,s)$ hat vier Zusammenhangskomponenten, $SO(r,s)$ hat zwei Zusammenhangskomponenten
- $Pin(r,s)$ hat vier Zusammenhangskomponenten, $Spin(r,s)$ hat zwei Zusammenhangskomponenten

Die adjungierte Darstellung $\mathrm{Ad} : Pin(r,s) \to O(r,s)$ bzw. $\mathrm{Ad} : SPin(r,s) \to SO(r,s)$ ist jeweils eine zweifache Überlagerung jeder der Zusammenhangskomponenten. Für $(r,s) \neq (1,1)$ sind diese Überlagerungen nichttrivial in dem Sinn, daß es einen Weg zwischen -1 und 1 in $Spin(r,s)$ gibt. Ist $q(e_1,e_1) = q(e_2,e_2) = \pm 1$ und $q(e_1,e_2) = 0$, so können wir $\gamma(t) = \pm\cos(2t) + e_1e_2\sin(2t) = (e_1\cos t - e_2\sin t)(e_1\cos t + e_2\sin t)$ wählen. Wegen $q(e_1\cos t \pm e_2\sin t, e_1\cos t \pm e_2\sin t) = \pm 1$ ist $\gamma(t) \in Spin(r,s)$ für alle t sowie $\gamma(0) = \pm 1$ und $\gamma(\frac{\pi}{2}) = \mp 1$.

Ohne Beweis sei erwähnt, daß $Spin(n)$ für $n \geq 3$ einfach zusammenhängend ist, so daß $Spin(n)$ die universelle Überlagerungsgruppe der $SO(n)$ ist.

2.6 Die Lie-Algebra der Pin-Gruppe

Satz 25 *(1) Der Raum $C\ell^2(V,q) := \sigma^{-1}(\Lambda^2 V)$ ist eine Lie-Unteralgebra von $C\ell(V,q)$, wobei die Lie-Klammer durch den Kommutator gegeben ist.*

(2) Ist q nichtausgeartet, dann ist die Lie-Algebra $C\ell^2(V,q)$ isomorph zur Lie-Algebra $so(V,q)$ der Lie-Gruppe $SO(V,q)$. Der Isomorphismus $\tau : C\ell^2(V,q) \to so(V,q)$ ist gegeben durch $\tau(x)v := [x,v]$ für $x \in C\ell^2(V,q)$ und $v \in V$.

(3) Ist q nichtausgeartet, dann ist $C\ell^2(V,q) = spin(V,q)$, also die Lie-Algebra von $Spin(V,q)$.

Beweis. (1) Wir wählen eine bezüglich q orthogonale Basis (e_i) mit $q(e_i,e_j) = 0$ für $i \neq j$. Es ist zu zeigen, daß $\mathrm{span}(e_ie_j)_{1\leq i<j\leq n}$ abgeschlossen unter Kommutatorbildung ist. Man findet für $i < j$ und $k < l$

$$[e_ie_j, e_ke_l] = \begin{cases} 0 & \text{für } i=k,\ j=l \text{ oder } i,j,k,l \text{ verschieden} \\ -2q(e_i,e_i)e_je_l & \text{für } i=k,\ j\neq l \\ 2q(e_i,e_i)e_je_k & \text{für } i=l,\ j\neq k \\ -2q(e_j,e_j)e_ie_k & \text{für } i\neq k,\ j=l \\ 2q(e_j,e_j)e_ie_l & \text{für } i\neq l,\ j=k \end{cases}$$

Die Jacobi-Identität $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ für $x,y,z \in C\ell^2(V,q)$ folgt aus der Assoziativität der Clifford-Algebra.

(2) Sei $x = e_ie_j$ mit $1 \leq i < j \leq n$ und $v = e_k$, dann ist

$$\begin{aligned} \tau(x)v = [x,v] &= e_ie_je_k - e_ke_ie_j \\ &= e_i(e_je_k + e_ke_j) - (e_ke_i + e_ie_k)e_j \\ &= 2q(e_j,e_k)\,e_i - 2q(e_i,e_k)\,e_j \in V\ . \end{aligned}$$

Also ist $\tau(C\ell^2(V,q)) \subset \mathrm{End}(V)$.

Wir erinnern, daß

$$O(V,q) = \{a \in \mathrm{Aut}(V)\ ,\quad q(av,aw) = q(v,w)\ \forall v,w \in V\}\ .$$

Die Lie-Algebra $so(V,q)$ ist der Tangentialraum von $O(V,q)$ im Einselement. Sei $\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(t) \in O(V,q)$ eine Kurve in $O(V,q)$ mit $\gamma(0) = 1$. (Es gilt sogar $\gamma(t) \in SO(V,q)$.) Dann ist

$$0 = \frac{d}{dt} q(\gamma(t)v, \gamma(t)w)\Big|_{t=0} = q(\dot\gamma(0)v, w) + q(v, \dot\gamma(0)w) \ .$$

Das heißt,

$$so(V,q) = \{A \in \mathrm{End}(V)\ , \quad q(Av,w) + q(v,Aw) = 0 \ \forall v,w \in V\}$$

Für $x = e_i e_j$ mit $i < j$ sowie $v = e_k, w = e_l$ berechnen wir

$$\begin{aligned} & q(\tau(x)v, w) + q(v, \tau(x)w) \\ & = 2q(e_j,e_k)q(e_i,e_l) - 2q(e_i,e_k)\,q(e_j,e_l) + 2q(e_j,e_l)q(e_k,e_i) - 2q(e_i,e_l)\,q(e_k,e_j) \\ & = 0\ . \end{aligned}$$

Folglich ist $\tau(C\ell^2(V,q)) \subset so(V,q)$.

Ist q nicht ausgeartet, dann ist τ injektiv, da aus $[x,v] = 0$ für alle $v \in V$ stets $x = 0$ folgt. Außerdem ist $\dim(C\ell^2(V,q)) = \frac{n(n-1)}{2} = \dim(so(V,q))$, so daß τ surjektiv ist, also ein Isomorphismus.

(3) Wir wählen eine Orthogonalbasis (e_i) von V mit $q(e_i,e_j) = 0$ für $i \neq j$ und $q(e_i,e_i) = \pm 1$ für alle i. Wir konstruieren folgende Kurven $\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma_{ij}(t) \subset Spin(V,q)$:

- Für für $i \neq j$ und $q(e_i,e_i)) = q(e_j,e_j)$ betrachten wir

  $$\gamma_{ij}(t) = (e_i \cos t - e_j \sin t)(e_i \cos t + e_j \sin t) = q(e_i,e_i)\cos 2t + e_i e_j \sin 2t\ .$$

  Wir haben $\gamma_{ij}(t) \in Spin(V,q)$, denn

  $$q(e_i \cos t \pm e_j \sin t, e_i \cos t \pm e_j \sin t) = q(e_i,e_i) = \pm 1\ .$$

  Andererseits ist $\frac{d}{dt}\gamma(t)\big|_{t=0} = 2e_i e_j$, so daß $e_i e_j \in C\ell^2(V,q)$ Tangentialvektor an eine Kurve in $Spin(V,q)$ durch 1 ist, und damit ein Element der Lie-Algebra $spin(V,q)$.
- Für für $i \neq j$ und $q(e_i,e_i)) = -q(e_j,e_j)$ betrachten wir

  $$\gamma_{ij}(t) = (e_i \cosh t - e_j \sinh t)(e_i \cosh t + e_j \sinh t) = q(e_i,e_i)\cosh 2t + e_i e_j \sinh 2t\ .$$

  Wir haben $\gamma_{ij}(t) \in Spin(V,q)$, denn

  $$q(e_i \cosh t \pm e_j \sinh t, e_i \cosh t \pm e_j \sinh t) = q(e_i,e_i) = \pm 1\ .$$

  Andererseits ist $\frac{d}{dt}\gamma(t)\big|_{t=0} = 2e_i e_j$, so daß $e_i e_j \in C\ell^2(V,q)$ Tangentialvektor an eine Kurve in $Spin(V,q)$ durch 1 ist, und damit ein Element der Lie-Algebra $spin(V,q)$.

Aus der doppelten Überlagerung $\mathrm{Ad} : Spin(V,q) \to SO(V,q)$ mit $\ker \mathrm{Ad} = \pm 1$ folgt, daß $\dim(spin(V,q)) = \dim(so(V,q)) = \frac{n(n-1)}{2}$ und somit $C\ell^2(V,q) = spin(V,q)$ $\square$

2.7 Spinor-Darstellungen

Es ist üblich, die Darstellungstheorie für komplexifizierte Clifford-Algebren zu entwickeln. Wir bezeichnen mit $C\ell^{\mathbb{C}}(V,q) := C\ell(V,q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ die Komplexifizierung der Clifford-Algebra (Es werden komplexe Linearkombinationen der reellen Basisvektoren genommen).

Satz 26 *Ist V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und ist q nicht ausgeartet, dann gilt*

$$C\ell^{\mathbb{C}}(V,q) \simeq \begin{cases} M_{2^m}(\mathbb{C}) & \text{für } n = 2m \\ M_{2^m}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^m}(\mathbb{C}) & \text{für } n = 2m+1 \end{cases}$$

Beweis. ($n = 2m$) Seien e_i bezüglich q orthogonale Basisvektoren von V mit $q(e_i, e_j) = 0$ für $i \neq j$ und $q(e_i, e_i) \neq 0$. Wir betrachten Einheitsmatrix und die Pauli-Matrizen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren eine Abbildung $\Phi : C\ell^{\mathbb{C}}(V,q) \to M_{2^m}(\mathbb{C})$ durch

$$\begin{aligned} \Phi_n(e_{2j-1}) &= \sqrt{q(e_{2j-1}, e_{2j-1})}\, \underbrace{\sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{j-1} \otimes \sigma_1 \otimes \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{m-j} \\ \Phi_n(e_{2j}) &= \sqrt{q(e_{2j}, e_{2j})}\, \underbrace{\sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{j-1} \otimes \sigma_2 \otimes \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{m-j} \end{aligned}$$

Dann ist $\Phi_n(e_i)\Phi_n(e_k) + \Phi_n(e_k)\Phi_n(e_i) = 2q(e_i, e_k)1$. Wegen der Universalitätseigenschaft der Clifford-Algebra ist Φ_n ein Isomorphismus. Das Bild hat die komplexe Dimension 2^n und ist damit gleich der gesamten Algebra $M_{2^n}(\mathbb{C})$.

($n = 2m+1$) Wir definieren

$$\begin{aligned} \Phi_n(e_j) &= (\Phi_{n-1}(e_j), \Phi_{n-1}(e_j)) \qquad \text{für } 1 \leq j < n \\ \Phi_n(e_n) &= (\sqrt{q(e_n, e_n)}\, \underbrace{\sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{m}, -\sqrt{q(e_n, e_n)}\, \underbrace{\sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{m}). \end{aligned}$$

Analog zum geraden Fall ist Φ_n wieder ein Isomorphismus □

Definition 24 Die durch Einschränkung auf $\mathrm{Spin}(V,q) \subset C\ell(V,q) \subset C\ell^{\mathbb{C}}(V,q)$ gewonnene Darstellung

$$\begin{aligned} \Phi_{2m} : \mathrm{Spin}(V,q) &\to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^m) && \text{für } \dim(V) = 2m \\ \mathrm{pr}_\alpha \circ \Phi_{2m+1} : \mathrm{Spin}(V,q) &\to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^m) && \text{für } \dim(V) = 2m+1\,, \quad \alpha = 1,2\,, \end{aligned}$$

der Spin-Gruppe heißt Spinor-Darstellung. Ihr Darstellungsraum $\Delta_n = \mathbb{C}^m$ heißt Spinor-Modul.

Im $n = 2m$-dimensionalen Fall betrachten wir $\gamma^{n+1} = \frac{(-\mathrm{i})^m}{\sqrt{q(e_1,e_1)\cdots q(e_n,e_n)}} e_1 e_2 \cdots e_n$. Dann gilt $\Phi_n(\gamma^{n+1}) = \underbrace{\sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{m}$. Das ist eine Diagonalmatrix, in der die Einträge $+1$ und -1 in gleicher Anzahl auftreten. Entsprechend bezeichne $\Delta_{2m}^{\pm}$ den Eigenunterraum von $\Phi_{2m}(\gamma^{n+1})$ zum Eigenwert ± 1. Es ist leicht zu überprüfen, daß γ^{n+1} mit allen Elementen aus $\mathrm{Spin}(V, q)$ kommutiert. Die Unterräume $\Delta_{2m}^{\pm}$ sind also invariant unter $\mathrm{Spin}(V, q)$. Ohne Beweis erwähnen wir:

Satz 27 *Die* $\mathrm{Spin}(V, q)$*-Darstellungen* $\Delta_{2m}^{\pm}$ *und* Δ_{2m+1}^{α} *sind irreduzibel.*

Für $v \in V$ und $\psi \in \Delta_n$ bezeichnen wir mit $v \cdot \psi := \Phi_n(v)\psi$ die Clifford-Multiplikation. Diese ist ein Homomorphismus der $\mathrm{Spin}(V, q)$-Darstellungen, wobei $\mathrm{Spin}(V, q)$ über die adjungierte Darstellung auf V wirkt:

$$\mathrm{Ad}_a(v) \cdot \Phi_n(a)\psi = \Phi_n(a)(v \cdot \psi) \ .$$

2.8 Bilinearformen auf dem Spinor-Modul

Wir bezeichnen mit $(\ ,\ )_{\Delta_n}$ das kanonische positiv-definite Skalarprodukt auf dem Spinor-Modul $\Delta_n = \mathbb{C}^{[n/2]}$. Wir wählen nun eine geordnete pseudo-orthonormale Basis (e_i) von V mit $q(e_i, e_i) = 1$ für $1 \leq i \leq r$, $q(e_i, e_i) = -1$ für $r + 1 \leq i \leq n$ und $q(e_i, e_j) = 0$ für $i \neq j$.

Das kanonische Skalarprodukt ist für indefinites q nicht invariant unter der Spin-Gruppe. Angenommen, $(\ ,\ )_{\Delta_n}$ wäre $\mathrm{Spin}(r, n-r)$-invariant, also $(\phi, \psi)_{\Delta_n} = (a\phi, a\psi)_{\Delta_n}$ für $a \in \mathrm{Spin}(r, n-r)$. Da die Lie-Algebra von $\mathrm{Spin}(r, n-r)$ durch Produkte $e_i e_j$ mit $i < j$ aufgespannt wird, wäre $(e_i e_j \phi, \psi)_{\Delta_n} + (\phi, e_i e_j \psi)_{\Delta_n} = 0$. Wir wählen $i \leq r$ und $j > r$, also $q(e_i, e_i) = 1$ und $q(e_j, e_j) = -1$. Für $a \in \mathrm{Spin}(r, n-r)$ ist auch $e_i e_j a \in \mathrm{Spin}(r, n-r)$. Ist $\phi, \psi \neq 0$, so wäre

$$(\phi, \psi)_{\Delta_n} = (e_i e_j a\phi, e_i e_j a\psi)_{\Delta_n} = -(a\phi, e_i e_j e_i e_j a\psi)_{\Delta_n} = -(a\phi, a\psi)_{\Delta_n} = -(\phi, \psi)_{\Delta_n} \ .$$

Der beste Kompromiß ist die folgende Konstruktion: Wir führen ein Element

$$b := \mathrm{i}^{\frac{r(r-1)}{2}} e_1 \cdots e_r \in C\ell(r, n-r)$$

ein. Es gilt $b^2 = 1$. Dann definieren wir eine indefinites Skalarprodukt auf Δ_n durch

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\Delta_n} = (b \cdot \phi, \psi)_{\Delta_n} \ .$$

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Spin}^+(V, q) := \mathrm{Spin}(V, q) \cap N^{-1}(1)$ die positive Spin-Gruppe. Man kann zeigen, daß sie die Zusammenhangskomponente der Eins in $\mathrm{Spin}^+(V, q)$ ist.

Satz 28 $\langle \phi, \psi \rangle_{\Delta_n}$ *ist invariant unter der Wirkung von* $\mathrm{Spin}^+(r, n-r)$*.*

Beweis. Wegen der Selbstadjungiertheit der Pauli-Matrizen gilt $(e_i \cdot \phi, \psi)_{\Delta_n} = (\phi, e_i \cdot \psi)_{\Delta_n}$ für $1 \leq i \leq r$ und $(e_i \cdot \phi, \psi)_{\Delta_n} = -(\phi, e_i \cdot \psi)_{\Delta_n}$ für $r+1 \leq i \leq n$. Sei $v = v' + v'' \in V$ mit $v' \in \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_r)$ und $v'' \in \mathrm{span}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\langle v \cdot \phi, \psi \rangle_{\Delta_n} &= (b \cdot v' \cdot \phi, \psi)_{\Delta_n} + (b \cdot v'' \cdot \phi, \psi)_{\Delta_n} \\
&= (-1)^{r-1} (v' \cdot b \cdot \phi, \psi)_{\Delta_n} + (-1)^r (v'' \cdot b \cdot \phi, \psi)_{\Delta_n} \\
&= (-1)^{r-1} (b \cdot \phi, v' \cdot \psi)_{\Delta_n} + (-1)^{r-1} (b \cdot \phi, v'' \cdot \psi)_{\Delta_n} \\
&= (-1)^{r-1} \langle \phi, v \cdot \psi \rangle_{\Delta_n}
\end{aligned}$$

Sei nun $a = v_1 \cdots v_{2l} \in \mathrm{Spin}^+(r, n-r)$, dann haben wir

$$\langle a \cdot \phi, a \cdot \psi \rangle_{\Delta_n} = \langle \phi, a^t \cdot a \cdot \psi \rangle_{\Delta_n} = \langle \phi, \psi \rangle_{\Delta_n} \ .$$

3 Spin-Struktur

Die in Verbindung mit der Clifford-Algebra eines Vektorraumes eingeführten Strukturen werden nun auf die gesamte Mannigfaltigkeit ausgedehnt, so daß sie sich punktweise im (Ko-)Tangentialraum auf die bisherigen Strukturen reduzieren.

3.1 Vorbemerkungen

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Das Hauptfaserbündel $O(M)$ der pseudo-orthonormalen Bezugssysteme war faserweise erhalten durch

$$\pi^{-1}_{O(M)}(x) := \{(X_1,\dots,X_n) \in T_xM \times \cdots \times T_xM \;, \quad \text{linear unabhängig} \;, \\ g_x(X_i,X_j) = \eta_{ij}\} \;.$$

Dabei nehmen wir $\eta = \operatorname{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{r},\underbrace{-1,\dots,-1}_{n-r})$ an. Je nach Orientierbarkeit zerfällt $O(M)$ in mehrere Zusammenhangskomponenten. Die Lie-Gruppe $G = O(r,n-r)$ besitzt die abgeschlossene Lie-Untergruppe $H = O(r)\times O(n-r)$. Aus allgemeinen Eigenschaften des homogenen Raumes G/H folgt, daß $O(M)$ reduzierbar ist auf ein Unterbündel $O_{r,n-r}(M)$ über M mit Strukturgruppe $O(r)\times O(n-r)$.

Wir fassen das Tangentialbündel TM als assoziiert zu $O(M)$ auf, $TM = O(M)\times_{O(r,n-r)} \mathbb{R}^n$. Es gibt einen Isomorphismus $TM \simeq O_{r,n-r}(M)\times_{O(r)\times O(n-r)} \mathbb{R}^n$, durch den sich TM in eine direkte Summe $TM = T^{(Z)}M \oplus T^{(R)}M$ zerlegt. Dabei sind Schnitte τ von $T^{(Z)}M$ zeitartigen Tangentialvektoren mit $g_x(\tau,\tau) > 0$, und Schnitte ρ von $T^{(R)}M$ sind raumartige Tangentialvektoren mit $g_x(\rho,\rho) < 0$. Diese Aufteilung ist orthogonal bezüglich der Metrik, $g_x(\tau,\rho) = 0$.

Definition 25 Die pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) heißt orientierbar/zeitorientierbar/raumorientierbar, wenn das Bündel $TM/T^{(Z)}M/T^{(R)}M$ orientierbar ist.

Satz 29 *Ist (M,g) orientierbar, dann hat $O(M)$ zwei Zusammenhangskomponenten und läßt sich auf das Bündel $SO(M)$ mit Strukturgruppe $SO(r,n-r)$ reduzieren. Ist (M,g) raum- und zeitorientierbar, dann hat $O(M)$ vier Zusammenhangskomponenten und läßt sich auf das Bündel $SO^+(M)$ mit Strukturgruppe $SO^+(r,n-r)$ reduzieren, also die Untergruppe der eigentlichen Lorentz-Transformationen*

$$SO^+(r,n-r) = \Big\{a = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{pmatrix} \in O(r,n-r) \;, \quad \det a_1 > 0 \;\textit{und}\; \det a_2 > 0\Big\} \;.$$

3.2 Definition

Definition 26 Sei (M, g) eine pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit und, je nach Orientierbarkeit, $P = O(M)$, $P = SO(M)$ bzw. $P = SO^+(M)$ die Bündel der orthonormalen, speziellen orthonormalen und eigentlichen speziellen orthonormalen Bezugssysteme mit Strukturgruppe $G = O(r, n-r)$, $G = SO(r, n-r)$ bzw. $G = SO^+(r, n-r)$.

Eine *Spin-Struktur* auf (M, g) besteht, je nach Orientierbarkeit, aus einem Hauptfaserbündel $\tilde{P} = Pin(M)$, $\tilde{P} = Spin(M)$, $\tilde{P} = Spin^+(M)$ über M mit Strukturgruppe $\tilde{G} = \mathrm{Pin}(r, n-r)$, $\tilde{G} = \mathrm{Spin}(r, n-r)$ bzw. $\tilde{G} = \mathrm{Spin}^+(r, n-r)$, so daß folgendes gilt:

- Es gibt eine zweifache Überlagerung $\xi : \tilde{P} \to P$
- Die rechte Gruppenwirkung $\tilde{\psi} : \tilde{P} \times \tilde{G} \to \tilde{P}$ ist verträglich mit der rechten Gruppenwirkung $\psi : P \times G \to P$, d.h.

$$\xi(\tilde{\psi}_{\tilde{g}}\tilde{p}) = \psi_{\mathrm{Ad}_{\tilde{g}}}(\xi(\tilde{p})) \qquad \forall \tilde{p} \in \tilde{p}\ ,\ \tilde{g} \in \tilde{G}\ .$$

Besitzt (M, g) eine Spin-Struktur, so heißt (M, g) Spinmannigfaltigkeit. Das Hauptfaserbündel $Spin(M)$ heißt Spin-Bündel.

Lokal sind diese Eigenschaften immer erfüllt. Sei $\tilde{\chi}(\tilde{p}) = (\tilde{\pi}(p), \tilde{\kappa}(\tilde{p})) \in M \times \tilde{G}$ die lokale Trivialisierung von $\tilde{P}$, dann erfüllt $\xi = \mathrm{id}_M \times \mathrm{Ad}$ die beiden Eigenschaften. Es kann aber globale Obstruktionen für die Existenz einer Spin-Struktur geben. Ohne Erläuterungen und Beweis sei bemerkt:

Satz 30 *Eine pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit besitzt genau dann eine Spin-Struktur, wenn ihre zweite Stiefel-Whitney-Klasse verschwindet. In diesem Fall werden die Spin-Strukturen von (M, g) durch die erste Stiefel-Whitney-Klasse klassifiziert.*

Über die Spinor-Darstellung $\mathrm{Spin}(r, n-r) \to \mathrm{Aut}(\Delta_n)$ können wir das *Spinor-Bündel* $S(M)$ als ein zum Spin-Bündel assoziiertes komplexes Vektorbündel definieren:

$$S(M) := Spin(M) \times_{\mathrm{Spin}(r,n-r)} \Delta_n\ .$$

Schnitte $s : M \to S(M)$ des Spinor-Bündels heißen *Spinorfelder* oder kurz *Spinoren.* Sie sind, wie üblich, in 1:1-Korrespondenz zu äquivarianten Abbildungen $\tilde{s} : Spin^+(M) \to \Delta_n = \mathbb{C}^{[n/2]}$ mit $\tilde{s}(\tilde{\psi}_{\tilde{g}}\tilde{p}) = \Phi_n(\tilde{g}) \circ \tilde{s}(\tilde{p})$, für $\tilde{a} \in \mathrm{Spin}(r, n-r) \subset C\ell^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \eta)$ und $\tilde{p} \in Spin(M)$.

Ebenso läßt sich das Tangentialbündel TM als assoziiert zu $Spin(M)$ auffassen durch

$$TM = Spin(M) \times_{\mathrm{Spin}(r,n-r)} \mathbb{R}^n\ .$$

Dabei ist die linke Gruppenwirkung durch die adjungierte Darstellung gebeben, $\mathrm{Ad} : \mathrm{Spin}(r, n-r) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

3.3 Der Spin-Zusammenhang

Sei Γ ein Zusammenhang auf $SO(M)$, z.B. der Levi-Civita-Zusammenhang. Dieser ist durch eine Zusammenhangsform ω auf $SO(M)$ charakterisiert. Die Spin-Struktur induziert dann $so(r,n-r)$-wertige Einsform

$$\tilde{\omega} = \tau^{-1}(\xi^*\omega) \;, \qquad \tilde{\omega}_{\tilde{p}}(\tilde{X}) = \tau^{-1}(\omega_{\xi(\tilde{p})}(\xi'(\tilde{X}))) \;,$$

auf $Spin(M)$. Dabei ist $\tau : spin(r,n-r) = C\ell^2(r,n-r) \to so(r,n-r)$ der Isomorphismus der Lie-Algebren, $\tau(\tilde{A})v = [\tilde{A}, v]$.

Satz 31 *Die Einsform $\tilde{\omega} = \tau^{-1}(\xi^*\omega)$ ist eine Zusammenhangsform auf $Spin(M)$.*

Beweis. (1) Per Konstruktion nimmt $\tilde{\omega}$ Werte in der Lie-Algebra $spin(r,n-r)$ der Strukturgruppe $\mathrm{Spin}(r,n-r)$ von $Spin(M)$ an. Ein $\tilde{A} \in spin(r,s)$ generiert das fundamentale Vektorfeld $\tilde{\sigma}(\tilde{A})$ durch

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{p}}(\tilde{A})(\tilde{f}) = \frac{d}{dt}\tilde{f}(\tilde{\psi}_{\exp(t\tilde{A})}\tilde{p})\Big|_{t=0}$$

für $\tilde{f} \in C^\infty(Spin(M))$. Damit ist $\tilde{\sigma}_{\tilde{p}}(\tilde{A}) \in T_{\tilde{p}}Spin(M)$ der Tangentialvektor an die Kurve $t \mapsto \tilde{\psi}_{\exp(t\tilde{A})}\tilde{p}$ in $t=0$. Entsprechend ist $\xi'\tilde{\sigma}_{\tilde{p}}(\tilde{A}) \in T_{\xi(\tilde{p})}SO(M)$ der Tangentialvektor an die Kurve

$$t \mapsto \xi(\tilde{\psi}_{\exp(t\tilde{A})}\tilde{p}) = \psi_{\mathrm{Ad}_{\exp(t\tilde{A})}}(\xi(\tilde{p}))$$

in $t=0$. Wir betrachten die Kurve $t \mapsto \mathrm{Ad}_{\exp(t\tilde{A})} \in SO(r,n-r) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ durch das Einselement. Deren Tangentialvektor ist offenbar $\tau(\tilde{A}) \in so(r,n-r)$, so daß

$$\mathrm{Ad}_{\exp(t\tilde{A})} = \exp(t\tau(\tilde{A}))$$

gilt (zunächst für infinitesimale t, aus der eindeutigen Lösung der Differentialgleichungen aber auch für endliche t). Damit ist $\xi'\tilde{\sigma}_{\tilde{p}}(\tilde{A}) \in T_{\xi(\tilde{p})}SO(M)$ der Tangentialvektor an die Kurve $t \mapsto \psi_{\exp(t\tau(\tilde{A}))}(\xi(\tilde{p}))$. Diese generiert aber das fundamentale Vektorfeld zu $\tau(\tilde{A})$ auf $SO(M)$, so daß

$$\xi'\tilde{\sigma}_{\tilde{p}}(\tilde{A}) = \sigma_{\xi(\tilde{p})}(\tau(\tilde{A})) \;.$$

Folglich haben wir

$$\tilde{\omega}_{\tilde{p}}(\tilde{\sigma}(\tilde{A})) = \tau^{-1}(\omega_{\xi(\tilde{p})}(\xi'(\tilde{\sigma}(\tilde{A})))) = \tau^{-1}(\omega_{\xi(\tilde{p})}(\sigma(\tau(\tilde{A})))) = \tilde{A} \;.$$

(2) Bleibt die Überprüfung der Kompatibilität der rechten Gruppenwirkung: Für Tangentialvektoren $\tilde{X} \in T_{\tilde{p}}Spin(M)$ an die Kurve $t \mapsto \tilde{p}(t)$ ist

$$(\tilde{\psi}_{\tilde{g}}^*\tilde{\omega})_{\tilde{p}}(\tilde{X}) = \tilde{\omega}_{\tilde{\psi}_{\tilde{g}}\tilde{p}}(\tilde{\psi}'_{\tilde{g}}\tilde{X}) = \tau^{-1}\big((\xi^*\omega)_{\tilde{\psi}_{\tilde{g}}\tilde{p}}(\tilde{\psi}'_{\tilde{g}}\tilde{X})\big) = \tau^{-1}\big(\omega_{\xi(\tilde{\psi}_{\tilde{g}}\tilde{p})}(\xi'\tilde{\psi}'_{\tilde{g}}\tilde{X})\big) \;.$$

Es gilt

$$\xi(\tilde{\psi}_{\tilde{g}} p) = \psi_{\mathrm{Ad}_{\tilde{g}}} \xi(\tilde{p}) \ , \qquad \xi' \tilde{\psi}'_{\tilde{g}} \tilde{X} = \psi'_{\mathrm{Ad}_{\tilde{g}}} \xi'(\tilde{X}) \ .$$

Denn $\tilde{\psi}'_{\tilde{g}} \tilde{X}$ ist der Tangentialvektor an die Kurve $t \mapsto \tilde{\psi}_{\tilde{g}}(\tilde{p}(t))$, und entsprechend ist $\xi' \tilde{\psi}'_{\tilde{g}} \tilde{X}$ der Tangentialvektor an die Kurve

$$t \mapsto \xi(\tilde{\psi}_{\tilde{g}}(\tilde{p}(t))) = \psi_{\mathrm{Ad}_{\tilde{g}}} \xi(\tilde{p}(t)) \ .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}(\tilde{\psi}^*_{\tilde{g}} \tilde{\omega})_{\tilde{p}}(\tilde{X}) &= \tau^{-1}\big(\omega_{\psi_{\mathrm{Ad}_{\tilde{g}}} \xi(\tilde{p})}(\psi'_{\mathrm{Ad}_{\tilde{g}}} \xi' \tilde{X})\big) = \tau^{-1}\big((\psi^*_{\mathrm{Ad}_{\tilde{g}}} \omega)_{\xi(\tilde{p})}(\xi' \tilde{X})\big) \\ &= \tau^{-1}\big(\mathrm{Ad}_{(\mathrm{Ad}_{\tilde{g}})^{-1}}(\omega_{\xi(\tilde{p})}(\xi' \tilde{X}))\big) = \tau^{-1}\big(\mathrm{Ad}_{\mathrm{Ad}_{\tilde{g}^{-1}}}(\tau(\tilde{\omega}_{\tilde{p}}(\tilde{X})))\big) \ .\end{aligned}$$

Somit verbleibt zu zeigen, daß für beliebige $\tilde{A} \in spin(r, n-r) = C\ell^2(r, n-r)$ gilt

$$\mathrm{Ad}_{\mathrm{Ad}_{\tilde{g}^{-1}}}(\tau(\tilde{A})) = \tau(\mathrm{Ad}_{\tilde{g}^{-1}}(\tilde{A})) \in so(r, n-r) \subset \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \ .$$

Wir wenden die rechte Seite auf $v \in \mathbb{R}^n \subset C\ell(r, n-r)$ an und berücksichtigen $A \in C\ell^2(r, n-r)$:

$$\begin{aligned}\tau(\mathrm{Ad}_{\tilde{g}^{-1}}(\tilde{A}))v &= \tau(\tilde{g}^{-1} \tilde{A} \tilde{g})v = [\tilde{g}^{-1} \tilde{A} \tilde{g}, v] = \tilde{g}^{-1}[\tilde{A}, \tilde{g} v \tilde{g}^{-1}]\tilde{g} \\ &= \mathrm{Ad}_{\tilde{g}^{-1}} \circ \tau(\tilde{A}) \circ \mathrm{Ad}_{\tilde{g}}(v) = \mathrm{Ad}_{\mathrm{Ad}_{\tilde{g}^{-1}}}(\tau(\tilde{A}))v \ .\end{aligned}$$

Somit ist $\tilde{\omega}$ eine Zusammenhangsform. $\square$

Definition 27 Sei Γ der Levi-Civita-Zusammenhang auf $SO(M)$ und ω seine Zusammenhangsform. Dann heißt der durch die Zusammenhangsform $\tilde{\omega} = \tau^{-1}(\xi^* \omega)$ auf $Spin(M)$ definierte Zusammenhang $\tilde{\Gamma}$ der *Spin-Zusammenhang* auf $Spin(M)$.

3.4 Kovariante Ableitungen der Spinoren

Der Spin-Zusammenhang definiert kovariante Ableitungen von Schnitten in jedem zu $Spin(M)$ assoziierten Vektorbündel. Das liefert insbesondere die kovarianten Ableitungen der Spinoren (Schnitte im Spinor-Bündel). Wir können jedoch wie zuvor in den Tensorbündeln auch kovariante Ableitungen der Schnitte nach einem Vektorfeld auf der Basismannigfaltigkeit M definieren:

Sei $s \in \Gamma^\infty(S(M))$ ein Spinorfeld und $\phi : s \to \tilde{s}$ die $1:1$-Korrespondenz zu äquivarianten Abbildungen $\tilde{s} : Spin(M) \to \Delta_n$. Dann definiert der Spin-Zusammenhang die kovariante Ableitung dieser äquivarianten Abbildungen durch

$$(D\tilde{s})(\tilde{X}) := (d\tilde{s})(\mathrm{hor}(\tilde{X})) = (\mathrm{hor}(\tilde{X}))(\tilde{s})$$

für $\tilde{X} \subset \mathfrak{X}(Spin(M))$. Wie im ersten Kapitel fassen wir $\mathrm{hor}(\tilde{X})$ als horizontalen Lift $\mathrm{hor}(\tilde{X}) = X^*$ eines Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(M)$ auf. Der horizontale Lift ist bestimmt durch die beiden Gleichungen

$$\tilde{\pi}'(X^*)_{\tilde{p}} = X_{\tilde{\pi}(\tilde{p})} \in T_{\tilde{\pi}(\tilde{p})}M \ , \qquad \tilde{\omega}_{\tilde{p}}(X^*) = 0 \ .$$

Nun erhalten wir die kovariante Ableitung des Spinorfeldes $s \in \Gamma^\infty(S(M))$ nach einem Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ zu

$$\nabla^S_X s := \phi^{-1}\big((D(\phi(s)))(X^*)\big) = \phi^{-1}\big(X^*(\phi(s))\big) .$$

3.5 Der Dirac-Operator des Spin-Zusammenhangs

Entscheidend ist nun, die kovariante Ableitung ∇^S aufzufassen als Abbildung

$$\nabla^S : \Gamma^\infty(S(M)) \to \Gamma^\infty(T^*M \otimes S(M)) .$$

Die pseudoriemannsche Metrik g auf M induziert eine Abbildung der Kovektorfelder in Vektorfelder,

$$g^{-1} : \Gamma^\infty(T^*M) \to \Gamma^\infty(TM)$$

und somit eine Abbildung

$$(g^{-1} \otimes \mathrm{id}) \circ \nabla^S : \Gamma^\infty(S(M)) \to \Gamma^\infty(TM \otimes S(M)) .$$

Wir definieren nun die Clifford-Multiplikation $\mu : \Gamma^\infty(TM \otimes S(M)) \to \Gamma^\infty(S(M))$ wie folgt: Das Bündel $TM \otimes S(M)$ ist assoziiert zum Spin-Bündel $Spin(M)$, so daß eine $1:1$-Korrespondenz ϕ zwischen Schnitten $t \in \Gamma^\infty(TM \otimes S(M))$ und äquivarianten Abbildungen $\tilde{t} : Spin(M) \to \mathbb{R}^n \otimes \Delta_n$ existiert. Fassen wir $\mathbb{R}^n \subset C\ell^{\mathbb{C}}(r, n-r)$ auf, dann gibt es einen Isomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathrm{End}(\Delta_n)$. Rückführung mittels ϕ^{-1} in Schnitte von $S(M)$ ergibt die Clifford-Multiplikation

$$\mu = \phi^{-1} \circ \Phi \circ \phi : \Gamma^\infty(TM \otimes S(M)) \to \Gamma^\infty(S(M)) .$$

Definition 28 Der durch Komposition dieser Abbildungen

$$\Gamma^\infty(S(M)) \xrightarrow{\nabla^S} \Gamma^\infty(T^*M \otimes S(M)) \xrightarrow{g^{-1}\otimes \mathrm{id}} \Gamma^\infty(TM \otimes S(M)) \xrightarrow{\mu} \Gamma^\infty(S(M))$$

definierte Operator $D : \Gamma^\infty(S(M)) \to \Gamma^\infty(S(M))$ heißt der *Dirac-Operator des Spin-Zusammenhangs*.

Wir berechnen den Dirac-Operator in lokalen Koordinaten, die durch die Koordinatenfunktionen $x \mapsto x^\mu$, $\mu = 1, \dots, n$ zu gegebener Karte (U, κ) von M induziert werden. Dann ist $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ eine Basis von T_xM und $\{dx^\mu\}$ die dazu duale Basis von T^*_xM. Die Koordinaten der Metrik in diesen Basen sind $g_{\mu\nu} = g(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu})$.

Die Faser $\pi^{-1}(x) \subset SO(M)$ des Bündels der pseudo-orthonormalen Bezugssysteme ist gegeben durch

$$\pi^{-1}(x) = \{\text{Basen } (X_1, \dots, X_n) \text{ von } T_xM \text{ mit } g(X_i, X_j) = \eta_{ij}\}$$

und Orientierbarkeit des Kartenwechsels. Ein Schnitt $e : U \to \pi^{-1}(U) \subset SO(M)$ ist die Zuordnung eines pseudoorthonormalen Bezugssystems zu jedem Punkt

$x \in U$, d.h. $e(x) = (e_1, \ldots, e_n)$ ist eine pseudo-orthonormale Basis von T_xM mit $g(e_i, e_j) = \eta_{ij}$. Wir fassen Punkte $p \in SO(M)$ als Abbildung $p : \mathbb{R}^n \to T_xM$ auf. Ist ϵ_i der i-te Basisvektor im $\mathbb{R}^n$, so ist

$$e(x)(\epsilon_i) = e_i = \sum_{\mu=1}^{n} e_i^\mu(x) \, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ .$$

Dann folgt

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu = \eta_{ij} \ .$$

Als Transformationsmatrizen sind die e_i^μ in jedem Punkt $x \in U$ invertierbar,

$$\sum_{i=1}^{n} e_\nu^i e_i^\mu = \delta_\nu^\mu \ , \qquad \sum_{m=1}^{n} e_\mu^j e_i^\mu = \delta_i^j \ .$$

Somit finden wir $g_{\mu\nu} = \sum_{i,j=1}^n e_\mu^i e_\nu^j \eta_{ij}$.

Sei $(X_1, \ldots, X_n) \in \pi^{-1}(x)$ eine andere Basis von T_xM, so gibt es zunächst $A \in GL(n, \mathbb{R})$ mit

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} e_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} A_{ik} e_k^\mu \tfrac{\partial}{\partial x^\mu} \ .$$

Dann gilt

$$\eta_{ij} = g(X_i, X_j) = \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} A_{ik} A_{jl} e_k^\mu e_l^\nu g_{\mu\nu} = \sum_{k,l=1}^{n} A_{ik} A_{jl} \eta_{kl} = (A \eta A^T)_{ij} \ .$$

Damit ist $A \in SO(r, n-r)$. Somit definiert der lokale Schnitt e eine lokale Trivialisierung $\chi(p) = (x, A)$, wenn $p = (X_1, \ldots, X_n) \in \pi^{-1}(x)$ und $X_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} e_k$.

Satz 32 *Der Dirac-Operator ist über U gegeben durch $D = \sum_{i=1}^n \eta^{ij} e_j \cdot \nabla_{e_i}^S$. Dabei bezeichnet $\cdot$ die Clifford-Multiplikation.*

Beweis. Wir bezeichnen mit τ die zu e duale Basis von T_x^*M $\tau^j(e_i) = \delta_i^j$. Andererseits definiert die Metrik einen Isomorphismus $g : T_xM \to T_xM$ durch $g(e_i)(e_j) = g(e_i, e_j) = \eta_{ij}$, so daß $\tau^j = \sum_{i=1}^n \eta^{ji} g(e_i)$, wenn η^{ji} die Komponenten der zu η inversen Matrix sind. Entsprechend ist $g^{-1}(e_i) = \sum_{j=1}^n \eta_{ij} \tau^j$.

Sei $\nabla_{e_i}^S s$ die kovariante Ableitung des Spinorfeldes s nach dem Vektorfeld e_i, dann gilt

$$\nabla^S s = \sum_{i=1}^{n} \tau^i \otimes \nabla_{e_i}^S s = \sum_{i,j=1}^{n} \eta^{ij} g(e_j) \otimes \nabla_{e_i}^S s \ .$$

Anwendung der inversen Metrik ergibt

$$(g^{-1} \otimes \mathrm{id})(\nabla^S s) = \sum_{i,j=1}^{n} \eta^{ij} e_j \otimes \nabla^S_{e_i} s \ .$$

Damit ist der Dirac-Operator gegeben durch

$$D = \sum_{i,j=1}^{n} \eta^{ij} \mu(e_j, \nabla^S_{e_i} s) \ ,$$

wobei μ die Clifford-Multiplikation bezeichnet. □

3.6 Der Dirac-Operator in lokalen Koordinaten

Satz 33 *Zwischen den Christoffel-Symbolen und den Komponenten $A^i_{\mu j}$ des lokalen Eichpotentials $A = e^*\omega$ zum Levi-Citita-Zusammenhang besteht die Beziehung*

$$\frac{\partial e^i_\nu}{\partial x^\mu} + \sum_{j=1}^{n} A^i_{\mu j} e^j_\nu - \sum_{\rho=1}^{n} \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^i_\rho = 0 \ , \qquad \frac{\partial e^\rho_i}{\partial x^\mu} - \sum_{j=1}^{n} e^\rho_j A^j_{\mu i} + \sum_{\nu=1}^{n} \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^\nu_i = 0 \ .$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Levi-Civita-Zusammenhang. Sei ω seine Zusammenhangsform. Wir stellen die kovariante Ableitung einmal über die Christoffel-Symbole dar und zum anderen aus der Definition. Im ersten Fall ist

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \sum_{\rho=1}^{n} \Gamma^\rho_{\mu\nu}(x) \frac{\partial}{\partial x^\rho} \ , \qquad \Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu} \ .$$

Im zweiten Fall ist

$$\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big)_x = \phi_p^{-1} \circ \Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big)^*_p \phi\big(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\big)\Big) \ , \qquad p \in \pi^{-1}(x) \ .$$

Für Tangentialvektoren gilt

$$(\phi(\frac{\partial}{\partial x^\nu}))(e(x)) = e(x)^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big) \ ,$$

wobei $e(x) : T_x M \to \mathbb{R}^n$ ist. Des weiteren ist $(\frac{\partial}{\partial x^\mu})^*$ der horizontale Lift. Zunächst ist

$$e(x)^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^\nu}) = \sum_{i=1}^{n} e(x)^{-1}(e^i_\nu(x) e_i(x)) = \sum_{i=1}^{n} e^i_\nu(x) \epsilon_i = \sum_{i=1}^{n} e^i_\nu(\pi(e)) \epsilon_i \ .$$

Der Schnitt e definiert einen kanonischen Lift

$$e' : T_x M \to T_{e(x)} SO(M) \ , \qquad \pi'(e'(\frac{\partial}{\partial x^\mu})) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ .$$

Jedoch wird dieser im allgemeinen nicht horizontal sein. Sei $B_\mu \in so(r, n-r)$, dann ist $\sigma_e(B_\mu)$ ein vertikaler Vektor. Wir setzen also

$$(\frac{\partial}{\partial x^\mu})^* = e'(\frac{\partial}{\partial x^\mu}) - \sigma_e(B_\mu) \ .$$

Anwenden von ω liefert

$$0 = \omega((\frac{\partial}{\partial x^\mu})^*) = \omega(e'(\frac{\partial}{\partial x^\mu})) - B_\mu \ .$$

Nun ist $\omega(e'(\frac{\partial}{\partial x^\mu})) = (e^*\omega)_x(\frac{\partial}{\partial x^\mu}) = A_\mu(x) \in so(r, n-r)$ das lokale Eichpotential. Damit gilt

$$(\frac{\partial}{\partial x^\mu})^* = e'(\frac{\partial}{\partial x^\mu}) - \sigma_e(A_\mu(x)) \ .$$

Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned}\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big)_x &= \phi^{-1}_{e(x)}\Big((\frac{\partial}{\partial x^\mu})^*(\sum_{i=1}^n e^i_\nu(x)\epsilon_i)\Big) \\ &= \phi^{-1}_{e(x)}\Big(\Big(e'(\frac{\partial}{\partial x^\mu}) - \sigma_{e(x)}(A_\mu(x))\Big)\Big(\sum_{i=1}^n (e^i_\nu \circ \pi)(e(x))\epsilon_i\Big)\Big) \ .\end{aligned}$$

Nun war $\phi(\frac{\partial}{\partial x^\nu}) : SO(M) \to \mathbb{R}^n$ eine äquivariante Abbildung mit $(\phi(\frac{\partial}{\partial x^\nu})(p) = (\sum_{i=1}^n e^i_\nu(\pi(p))\epsilon_i)$, $p = e(x)$. Im ersten Term sei $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ tangential and die Kurve $t \mapsto \gamma(t) \in U$. Dann haben wir

$$\big(e'(\frac{\partial}{\partial x^\mu})(e^i_\nu \circ \pi)\big)(e(x)) = \frac{d}{dt}(e^i_\nu \circ \pi)(e(\gamma(t))\Big|_{t=0} = \Big(\frac{\partial}{\partial x^\mu} e^i_\nu\Big)(x) \ .$$

Für die Anwendung des vertikalen Vektors erhalten wir unter Verwendung der Äquivarianzeigenschaft:

$$\begin{aligned}\sigma_{e(x)}(A_\mu(x))\Big(\sum_{i=1}^n (e^i_\nu \circ \pi)(e(x))\epsilon_i\Big) &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^n (e^i_\nu \circ \pi)\big(e(x)\cdot \exp(tA_\mu(x))\big)\epsilon_i\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^n (e^i_\nu \circ \pi)(e(x))\big(\exp(-tA_\mu(x))\cdot \epsilon_i\big)\Big|_{t=0} \\ &= -A_\mu(x)\cdot\Big(\sum_{i=1}^n e^i_\nu(x)\,\epsilon_i\Big) \ .\end{aligned}$$

In der letzten Zeile steht dabei das Matrixprodukt von $A(x) \in so(r, n-r) \subset M_n(\mathbb{R})$ mit einem Vektor aus $\mathbb{R}^n$.

Sei $E_i{}^j \in M_n(\mathbb{R})$ die Standardmatrix mit $E_i{}^j \cdot \epsilon_k = \delta^j_k \epsilon_i$. Wir zerlegen $A = \sum_{i,j=1}^n A^i{}_j E_i{}^j \in M_n(\mathbb{R})$ nach der Standardbasis und berechnen mit $\langle \epsilon_i, \epsilon_j\rangle = \eta_{ij}$ die Bedingung für $A \in so(r, n-r)$:

$$A \cdot \epsilon_k = \sum_{i=1}^n A^i{}_k \epsilon_i \quad \Rightarrow \quad \langle A\cdot\epsilon_i, \epsilon_j\rangle + \langle \epsilon_i, A\cdot\epsilon_j\rangle = \sum_{k=1}^n (A^k{}_i \eta_{kj} + A^k{}_j \eta_{ik}) = 0 \ .$$

Somit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big)_x &= \phi^{-1}_{e(x)}\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial e^i_\nu}{\partial x^\mu}\epsilon_i + \sum_{i,j=1}^n e^i_\nu(x) A^j_{\mu i}(x)\,\epsilon_j\Big) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial e^i_\nu}{\partial x^\mu} e_i(x) + \sum_{i,j=1}^n e^i_\nu(x)\, A^j_{\mu i}(x)\, e_j(x) \\
&= \sum_{\rho=1}^n \Big(\sum_{k=1}^n \frac{\partial e^k_\nu}{\partial x^\mu} e^\rho_k(x) + \sum_{k,j=1}^n e^j_\nu(x)\, A^k_{\mu j}(x)\, e^\rho_k(x)\Big)\frac{\partial}{\partial x^\rho} \equiv \sum_{\rho=1}^n \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\;.
\end{aligned}
$$

Folglich gilt

$$
\frac{\partial e^i_\nu}{\partial x^\mu} + \sum_{j=1}^n A^i_{\mu j} e^j_\nu - \sum_{\rho=1}^n \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^i_\rho = 0\;, \qquad \frac{\partial e^\rho_i}{\partial x^\mu} - \sum_{j=1}^n e^\rho_j A^j_{\mu i} + \sum_{\nu=1}^n \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^\nu_i = 0\;. \qquad \square
$$

Wir geben nun die lokale Darstellung des Spin-Zusammenhangs an.

Satz 34 *Für $A = \sum_{i,j=1}^n A^i{}_j E_i{}^j \in so(r, n-r)$, d.h. $\sum_{k=1}^n (A^k{}_i \eta_{kj} + A^k{}_j \eta_{ik}) = 0$ gilt*

$$
\tau^{-1}(A) = \frac{1}{8}\sum_{i,j,l=1}^n A^i{}_l \eta^{lj}(\epsilon_i\epsilon_j - \epsilon_j\epsilon_i) \in spin(r, n-r)\;.
$$

Beweis. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\tau\Big(\frac{1}{8}\sum_{i,j,l=1}^n A^i{}_l \eta^{lj}(\epsilon_i\epsilon_j - \epsilon_j\epsilon_i)\Big)\epsilon_k = \frac{1}{8}\sum_{i,j,l=1}^n A^i{}_l \eta^{lj}\big[(\epsilon_i\epsilon_j - \epsilon_j\epsilon_i), \epsilon_k\big] \\
&= \frac{1}{8}\sum_{i,j,l=1}^n A^i{}_l \eta^{lj}\big(4\eta_{jk}\epsilon_i - 4\eta_{ik}\epsilon_j\big) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n A^i{}_k \epsilon_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j,l=1}^n A^i{}_k \eta^{lj}\eta_{il}\epsilon_j \\
&= \sum_{i=1}^n A^i{}_k \epsilon_i = A\cdot\epsilon_k
\end{aligned}
$$

$\square$

Satz 35 *Sei $\xi : Spin(M) \to SO(M)$ die Spin-Struktur und $\tilde{s} : Spin(M) \to \mathbb{C}^{2^{[n/2]}}$ die das Spinorfeld $s = \tilde{\phi}^{-1}(\tilde{s}) \in \Gamma^\infty(S(M))$ beschreibende äquivariante Abbildung. Sei $\tilde{e} : U \to \tilde{\pi}^{-1}(U)$ ein Schnitt des Spinor-Bündels $Spin(M)$. Dann hat der Dirac-Operator die lokale Darstellung*

$$
\big(\tilde{\phi}(D\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{s}))\big)(\tilde{e}(x)) = \sum_{i,j=1}^n \sum_{\mu=1}^n e^\mu_i(x)\eta^{ij}\gamma_j \cdot \Big(\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} + \frac{1}{8}\sum_{k,l,m=1}^n A^k_{\mu m}\eta^{ml}(\gamma_k\gamma_l - \gamma_l\gamma_k)\cdot\psi\Big)\;.
$$

Dabei ist $e(x) = \xi(\tilde{e}(x)) \in SO(M)$, mit $\tilde{\pi}(\tilde{e}(x)) = \pi(e(x)) = x$, und $\psi(x) = (\tilde{s}\circ\tilde{e})(x)$ sowie $\gamma_i = \Phi(\epsilon_i) \in M_{2^{[n/2]}}(\mathbb{C})$. Schließlich sind die $A^k_{\mu m}$ die Komponenten des lokalen Eichpotentials $A = e^*\omega$ zum Levi-Civita-Zusammenhang.

Beweis. Wir betrachten

$$\tilde{\phi}(\nabla^S_{e_i} s)(\tilde{e}(x)) = \big((e_i)^* \tilde{s}\big)_{\tilde{e}(x)}$$

wobei $(e_i)^* \in \mathfrak{X}(Spin(M))$ der horizontale Lift von $e_i \in T_x M$ ist. Dieser drückt sich im Punkt $\tilde{e}(x)$ durch den kanonischen Lift $\tilde{e}'(e_i(x))$ und einen vertikalen Anteil aus:

$$((e_i)^*)_{\tilde{e}(x)} = \tilde{e}'(e_i(x)) - \tilde{\sigma}_{\tilde{e}(x)}(\tilde{B}_i) ,$$

für $\tilde{B}_i \in spin(r, n-r)$. Anwenden der Zusammenhangsform $\tilde{\omega} = \tau^{-1}(\xi^* \omega)$ liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\omega}_{\tilde{e}(x)}((e_i)^*) = \tilde{\omega}_{\tilde{e}(x)}(\tilde{e}'(e_i(x))) - \tilde{B}_i \\ &= \tau^{-1}((\tilde{e}^*(\xi^*\omega))_x(e_i(x))) - \tilde{B}_i = \tau^{-1}((\xi \circ \tilde{e})^*\omega)_x(e_i(x)) - \tilde{B}_i \\ &= \tau^{-1}(A_i(x)) - \tilde{B}_i , \end{aligned}$$

mit $A = e^*\omega$ und $A_i(x) = A_x(e_i(x))$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\nabla^S_{e_i} s)(\tilde{e}(x)) &= \big(\tilde{e}'(e_i(x))\tilde{s}\big)_{\tilde{e}(x)} - \big(\tilde{\sigma}_{\tilde{e}(x)}(\tau^{-1}(A_i(x)))\tilde{s}\big)_{\tilde{e}(x)} \\ &= e_i(x)(\tilde{e}^*\tilde{s}) - \frac{d}{dt}\tilde{s}\big(\tilde{\psi}_{\exp(t\tau^{-1}(A_i(x)))}(\tilde{e}(x))\big)\Big|_{t=0} \\ &= \sum_{\mu=1}^n e_i^\mu(x)\frac{\partial(\tilde{e}^*\tilde{s})}{\partial x^\mu}(x) - \frac{d}{dt}\Big(\Phi\big(\exp(-t\tau^{-1}(A_i(x)))\big) \cdot \tilde{s}\Big)(\tilde{e}(x))\Big|_{t=0} \\ &= \sum_{\mu=1}^n e_i^\mu(x)\Big(\frac{\partial(\tilde{e}^*\tilde{s})}{\partial x^\mu}(x) + \Phi(\tau^{-1}(A_\mu(x))) \cdot (e^*\tilde{s})(x)\Big) . \end{aligned}$$

Nun erhalten wir den Dirac-Operator zu

$$\begin{aligned} \big(\tilde{\phi}(Ds)\big)_{\tilde{e}(x)} &= \sum_{i,j=1}^n \eta^{ij}\Phi(\tilde{\phi}_{\tilde{e}(x)}(e_j)) \cdot \big(\tilde{\phi}(\nabla^S_{e_i} s)\big)_{\tilde{e}(x)} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \eta^{ij}\Phi(\epsilon_j) \cdot \sum_{\mu=1}^n e_i^\mu(x)\Big(\frac{\partial(\tilde{e}^*\tilde{s})}{\partial x^\mu}(x) + \Phi(\tau^{-1}(A_\mu(x))) \cdot (e^*\tilde{s})(x)\Big) . \end{aligned}$$

Setzen wir $(\tilde{e}^*\tilde{s})(x) = \psi(x)$ und $\Phi(\epsilon_i) = \gamma_i \in M_{2^{[n/2]}}\mathbb{C}$, so erhalten wir

$$\big(\tilde{\phi}(Ds)\big)_{\tilde{e}(x)} = \sum_{i,j=1}^n \sum_{\mu=1}^n e_i^\mu(x)\eta^{ij}\gamma_j \cdot \Big(\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} + \frac{1}{8}\sum_{k,l,m=1}^n A^k_{\mu m}\eta^{ml}(\gamma_k\gamma_l - \gamma_l\gamma_k) \cdot \psi\Big) .$$

□

3.7 Eichtransformationen und Dirac-Wirkung

Per Konstruktion ist $\big(\tilde{\phi}(Ds)\big) : Spin(M) \to \mathbb{C}^{2^{[n/2]}}$ eine äquivariante Abbildung, d.h. $\big(\tilde{\phi}(Ds)\big)(\tilde{p}\cdot\tilde{a}) = \Phi(\tilde{a}^{-1})\cdot\big(\tilde{\phi}(Ds)\big)(\tilde{p})$ für alle $\tilde{p} \in Spin(M)$ und $\tilde{a} \in \mathrm{Spin}(r,s)$.

Vertikale Automorphismen des Spin-Bündels $\tilde{\theta} : Spin(M) \to Spin(M)$, mit $\tilde{\pi} \circ \tilde{\theta} = \mathrm{id}_M$ und $\tilde{\theta}(\tilde{p} \cdot \tilde{a}) = (\tilde{\theta}(\tilde{p})) \cdot \tilde{a}$, liefern Eichtransformationen

$$\tilde{s}(\tilde{p}) \mapsto \hat{\tilde{s}}(\tilde{p}) := \tilde{s}(\tilde{\theta}(\tilde{p}))$$

Ausgedrückt durch die über $\tilde{\theta}(\tilde{p}) =: \tilde{p} \cdot \tilde{u}(\tilde{p})$ definierte äquivariante Abbidlung $\tilde{u} : \tilde{p} \to \mathrm{Spin}(r, n-r)$ erhalten wir so für die Eichtransformation

$$\tilde{s}(\tilde{p}) \mapsto \hat{\tilde{s}}(\tilde{p}) = \Phi(\tilde{u}^{-1}(\tilde{p})) \cdot \hat{\tilde{s}}(\tilde{p}) \ .$$

Dann gilt ganz allgemein für die Eichtransformation des Dirac-Operators

$$\big(\widehat{\tilde{\phi}(Ds)}\big)(\tilde{p}) := \big(\tilde{\phi}(Ds)\big)(\tilde{\theta}(\tilde{p})) = \Phi(\tilde{u}^{-1}(\tilde{p})) \cdot \big(\tilde{\phi}(Ds)\big) \ .$$

Die Überprüfung in lokalen Koordinaten ist eine sehr umfangreiche Rechnung. Insbesondere ist zu beachten, daß sich die lokalen Basisvektoren $e_i \in T_xM$ und die Komponenten des lokalen Eichpotentials $A^i_{\mu j} \in so(r, n-r)$ mit den durch die Spin-Struktur projizierten Gruppenelementen $(u \circ e)(x) = \mathrm{Ad}_{\tilde{u}(\tilde{e}(x))} \in SO(r, n-r)$ transformieren, während die Spinorfelder sich mit $\tilde{u}(\tilde{e}(x)) \in spin(r, n-r)$ transformieren.

Wir können so (zu gegebener Spin-Struktur und mit Raum- und Zeitorientierung) die folgende Dirac-Wirkung definieren:

$$S_D[\psi, g] := \int_M *\langle \psi, (\mathcal{D} + m)\psi \rangle_{\mathbb{C}^{2^{[n/2]}}}$$

Dabei ist $\psi = \tilde{e}^* \tilde{s} : U \to \mathbb{C}^{2^{[n/2]}}$ die lokale Darstellung des Spinorfeldes $\tilde{s} = \tilde{\phi}(s) : Spin^+(M) \to \mathbb{C}^{2^{[n/2]}}$ mittels eines beliebigen Schnittes $\tilde{e} : U \to Spin^+(M)$ und $\mathcal{D}\psi := \mathrm{i}\tilde{e}^* \tilde{\phi}(Ds)$. Außerdem ist $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}^{2^{[n/2]}}}$ nicht das kanonische Skalarprodukt, das wir mit $(\ ,\ )_{\mathbb{C}^{2^{[n/2]}}}$ bezeichnen, sondern das durch

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{\mathbb{C}^{2^{[n/2]}}} := (b \cdot \psi_1, \psi_2)_{\mathbb{C}^{2^{[n/2]}}} \ , \qquad b := \mathrm{i}^{\frac{r(r-1)}{2}} \gamma_1 \cdots \gamma_r$$

definierte $Spin^+(r, n-r)$ invariante Skalarprodukt. Somit ergibt $\langle \psi, \mathcal{D}\psi \rangle_{\mathbb{C}^{2^{[n/2]}}}$ eine Funktion auf M, die über den Hodge-Operator $*$ in eine n-Form überführt wird. Mit m wird die Masse bezeichnet.

Damit ist die Dirac-Wirkung wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl des (durch $\xi \circ \tilde{e}$ definierten) Bezugssystems. Außerdem ist die Dirac-Wirkung invariant unter lokalen Eichtransformationen, die durch vertikale Automorphismen von $Spin^+(M)$ hervorgerufen werden.

In lokalen Koordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned} S_D[\psi, g] := \int_M d^n x \ \sqrt{|\det g|} \ \psi^* (\mathrm{i}^{\frac{r(r-1)}{2}} \gamma_1 \cdots \gamma_r) \Big(m\psi + \sum_{i,j=1}^n \sum_{\mu=1}^n \mathrm{i} e_i^\mu(x) \eta^{ij} \gamma_j \ \cdot \\ \cdot \Big(\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + \frac{1}{8} \sum_{k,l,m=1}^n A^k_{\mu m} \eta^{ml} (\gamma_k \gamma_l - \gamma_l \gamma_k) \cdot \psi \Big) \Big) \ . \end{aligned}$$

3.8 Weitere Betrachtungen zum Dirac-Operator

Für die Physik interessant sind geladene Spinorfelder. Sei P ein Hauptfaserbündel über M mit Strukturgruppe G, dann läßt sich ein Produktbündel $SO(M) \times P$ konstruieren, welches ein Hauptfaserbündel über M mit Strukturgruppe $Spin(r, n-r) \times G$ ist. Dabei kommuieren die Einschränkungen der rechten Gruppenwirkungen auf $Spin(r, n-r)$ und G. Es wird wieder eine Spin-Struktur, also eine doppelte Überlagerung von $SO(M) \times P$ benötigt. Dabei hat man jetzt durch die zusätzliche Gruppe G etwas mehr Freiheit, was die schwächere Spin^c-Struktur ermöglicht. Es gibt also Mannigfaltigkeiten, die eine Spin^c-Struktur, aber keine Spin-Struktur erlauben. Die Zusammenhangsform ist dann eine $spin(r, n-r) \oplus \mathfrak{g}$-wertige Einsform auf $Spin(SO(M) \times P)$.

Die Gruppenwirkung von $Spin(r, n-r) \times G$ auf $C^{2^{[n/2]}} \otimes \Delta$, wobei Δ ein geeignter Darstellungsraum von G ist, liefert dann geladene Spinorfelder als äquivariante Abbildungen $\tilde{s} : SO(M) \times P \to C^{2^{[n/2]}} \otimes \Delta$. Da die Gruppenwirkungen von $Spin(r, n-r)$ und G miteinander kommutieren, ergibt sich in der lokalen Form des Dirac-Operators die Summe aus gravitativem $so(r, n-r)$-Anteil und Yang-Mills $\mathfrak{g}$-Anteil.

Damit die Dirac-Wirkung existiert, muß ψ ein geeigneter, zumindest quadratintegrabler lokaler Repräsentant des Spinorfeldes sein. Im Riemannschen Fall positiv definiter Metrik wird so ein Hilbert-Raum $H = L^2(\Gamma^\infty(S(M)))$ erhalten, und der Dirac-Operator ist dann ein unbeschränkter linearer Operator auf H. Man kann zeigen, daß eine selbstadjungierte Erweiterung existiert, mit der dann D identifiziert wird. Im gerade-dimensionalen Fall definieren dann die Eigenräume $H^\pm$ von $\gamma^{n+1} = \mathrm{i}^? \gamma_1 \cdots \gamma_n$ zum Eigenwert ± 1 eine $\mathbb{Z}_2$-Graduierung. Der Dirac-Operator (einschließlich Yang-Mills-Anteil) ist ungerade und hat somit die Darstellung

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} , \qquad D^+ : H^+ \to H^- \, , \; D^- = (D^+)^* : H^- \to H^+ \, .$$

Operatoren F, für die $\ker(F)$ und $\ker(F^*)$ endlich-dimensional sind und für die $\mathrm{im}(F)$ abgeschlossen ist, heißen Fredholm-Operatoren. Es läßt sich zeigen (durch den Kalkül der Pseudodifferentialoperatoren), daß D^+ ein Fredholm-Operator ist. Dann ist der Index des Dirac-Operators definiert als

$$\mathrm{ind}(D) = \dim(\ker(D^+)) - \dim(\ker(D^-)) \, .$$

Der Index ist eine topologische Invariante der Mannigfaltighkeit. Obwohl also zur Konstruktion des Dirac-Operators die Metrik und die Spin-Struktur benötigt werden, ist der Index nur von der Topologie abhängig. Das Atiyah-Singer-Indextheorem berechnet diesen Index durch ein lokales Integral über eine geeignete Differentialform (in der Chern-Klassen auftreten).