Prof. Dr. R. Wulkenhaar **06.07.2006**
Dr. R. Brüske 10h15-12h45

Klausur zur Mathematik für Physiker II — SS 2006, Version B

Name:

Vorname:

Geburtsdatum:

Übungsgruppenleiter:

Bitte tragen Sie in das Scheinformular Ihre persönlichen Daten vollständig ein.
Füllen Sie auch das zweite Deckblatt aus.

Bitte beginnen Sie jede der Aufgaben 2–8 auf einer neuen Seite.

Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.

Vor der Abgabe Ihrer Klausur legen Sie bitte alles in der richtigen Reihenfolge zusammen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
bearbeitet									
maximale Punktzahl	7	3	4	4	8	4	4	4	38
erreichte Punktzahl									
Korrektor									

Mit 16 Punkten ist die Klausur sicher bestanden.

Name:

Aufgabe 1. Unterstreichen Sie jeweils die richtigen der vier Aussagen (und heften Sie dieses Blatt an die Abgabe!!). Jede Teilaufgabe a)–g) gilt nur dann als gelöst, wenn genau alle richtigen Aussagen unterstrichen sind.

a) Teilmengen eines Vektorraums sind:
zu einer Basis verkürzbar / zu einer Basis ergänzbar / stets zu einem Erzeugendensystem ergänzbar / linear abhängig.

b) $m \times n$-Matrizen mit Rang n:
sind invertierbar / haben mindestens so viele Spalten wie Zeilen / haben mindestens so viele Zeilen wie Spalten / haben n linear unabhängige Zeilen.

c) Eine Determinante
zeigt, ob eine Matrix invertierbar ist / ist für jede Matrix ungleich der Nullmatrix ungleich Null / ist für ganzzahlige Matrizen stets ganzzahlig / ist für quadratische Matrizen erklärt.

d) Sind $U, W \subset V$ Untervektorräume mit $U \cap W = 0$, so gilt
$U + W = U \oplus W$ / $\dim(U) + \dim(W) = \dim(V)$ / $\dim(U) + \dim(W) \leq \dim(V)$ / $U + W = V$.

e) Der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist
manchmal leer / wenn nicht leer, dann mehrelementig / invariant unter Vertauschungen von Spalten / invariant unter Zeilenumformungen.

f) Sei $F : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung endlich-dimensionaler Vektorräume V, W. Dann gilt:
$\dim(W) = \dim(V)$, falls f surjektiv ist / $\dim(\mathrm{im}(F)) = \dim(\ker(F))$ / $\dim(W) \geq \dim(V)$ / $\dim(V) = \dim(\mathrm{im}(F))$.

g) $U, W \subset V$ seien echte Untervektorräume eines Vektorraums V (beide $\neq$ dem Nullvektorraum). Dann gilt:
$U + W$ ist Untervektorraum / $U \cap W \neq \{0\}$ / $U \cap W$ ist Untervektorraum / $U + W = V$.

Aufgabe 2. Es seien X, Y nichtleere Mengen. Zeigen Sie:
Wenn es eine surjektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt, dann existiert auch eine injektive Abbildung $g : Y \to X$.

Aufgabe 3. Gibt es im $\mathbb{R}^{13}$ Untervektorräume U, W mit $\dim(U) = 8$, $\dim(W) = 6$ und $U + W = \mathbb{R}^{13}$ sowie
a) $\dim(U \cap W) = 0$, b) $\dim(U \cap W) = 1$, c) $\dim(U \cap W) = 2$, d) $\dim(U \cap W) = 3$?
Wenn ja, geben Sie jeweils ein Beispiel dafür an.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die $\lambda \in \mathbb{R}$, für die die Abbildung

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto A_\lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & \lambda^2 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$$

nicht injektiv ist.

Aufgabe 5. Es sei

$$\mathcal{B} = \big((1,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0)\big)\,, \qquad \mathcal{C} = \big((1,1,1,0),\ (0,1,1,1),\ (1,0,1,1),\ (1,1,0,1)\big)\,.$$

Zeigen Sie:
a) $\mathcal{B}$ ist Basis des $\mathbb{R}^3$
b) $\mathcal{C}$ ist Basis des $\mathbb{R}^4$
c) Schreiben Sie die Vektoren aus $\mathcal{B}$ in die Spalten einer Matrix A. Berechnen Sie A^{-1}.
d) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{E}_3}(F)$ für

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3\,, \qquad F : (u, v, w, z) \longmapsto (u + v,\ w - z,\ w + 2v + 3z)$$

bzgl. der Einheitsbasen $\mathcal{E}_4$ im $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathcal{E}_3$ im $\mathbb{R}^3$.
e) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(F)$ von F bzgl. der Basen $\mathcal{C}, \mathcal{B}$.

Aufgabe 6. Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3u & + & 5v & + & x & & & = & -1 \\ 3u & - & v & - & x & - & y & = & 4 \\ 2u & + & 4v & & & - & y & = & -1 \\ 3u & + & 3v & - & 5x & - & 7y & = & 2 \end{array}$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie:

$$\text{a) } \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \det \begin{pmatrix} \frac{n}{n} & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & \frac{n-1}{n} & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & \frac{n-2}{n} & & 1 \\ & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ und $A \in M(n, \mathbb{Z})$. Zeigen Sie:
Ist $\det(A) \in \{1, 2, 5, 12\}$, dann gilt $x \in \mathbb{Z}^n$ für jede Lösung x des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ \vdots \\ 60 \end{pmatrix}.$$