Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 06**
Dr. R. Brüske

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe: Freitag, den 26.5.06, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen Blatt 7

Aufgabe 1. Man untersuche, ob es jeweils eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung F gibt mit

a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^7$; $F((1,1,1)) = (1,0,1,7,3,2,1)$
$F((1,5,1)) = (0,1,0,1,0,1,1)$

b) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $F((0,1,1)) = (1,1)$
$F((1,0,1)) = (1,1)$
$F((1,1,1)) = (2,3)$

c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $F((0,1,1)) = (1,0)$
$F((2,1,3)) = (1,1)$
$F((1,1,2)) = (5,6)$

Aufgabe 2. a) Zeigen Sie:

$$(0,1,1),(1,1,1),(1,1,0)$$

bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.
b) Für die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, erklärt durch

$$\begin{aligned} F((0,1,1)) &= (2,1,2) \\ F((1,1,1)) &= (0,1,1) \\ F((1,1,0)) &= (1,2,3) \end{aligned}$$

berechne man $F((2,-1,5))$ und $F((1,0,10))$.

Aufgabe 3. $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ sei erklärt durch

$$F((x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)) = (x_1 + x_3 - x_5, x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_4)\ .$$

Man bestimme Basen von $F^{-1}(\{0\})$ und $F(\mathbb{R}^5)$.

Aufgabe 4. Es sei $V = C^\infty(X)$ der Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen über dem Einheitsintervall $X = [0,1]$.
a) Man zeige: $D : V \to V$ definiert durch $F : f \mapsto f'$ und $I : V \to V$ definiert durch $I : f \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ sind lineare Abbildungen.
b) Man berechne $D \circ I, I \circ D, \ker(D \circ I), \ker(I \circ D)$.
c) Man zeige: D ist surjektiv, aber nicht injektiv. I ist injektiv, aber nicht surjektiv.

Aufgabe 5. Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, erklärt durch $F(e_n) = 0, F(e_i) = e_{i+1}$ $(1 \le i \le n-1)$. Man berechne

$$F^k = \underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{k \text{ mal}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ durch Angabe von } F^k(e_i)\ (1 \le i \le n)$$

und

$$G_k := (a \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} + F)^k \text{ durch Angabe von } G_k(e_i)\ (1 \le i \le n)\ .$$