Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. R. Brüske **SS 06**

Probeklausur zur Mathematik für Physiker II

Aufgabe 1. Eine Zusammenstellung wahrer und falscher Aussagen wird gegeben, von denen die wahren zu kennzeichnen sind.

Aufgabe 2. Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen nichtleeren Mengen X und Y.
Zeigen Sie:
Ist $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ für alle Teilmengen von X, so ist f injektiv.

Aufgabe 3. Es sei V ein 11-dimensionaler Vektorraum, $U \subset V$ ein 6-dimensionaler Untervektorraum und $W \subset V$ ein 7-dimensionaler Untervektorraum. Zeigen Sie:

$$\dim(U \cap W) \neq 1 \ .$$

Konstruieren Sie U, W wie oben mit $\dim(U \cap W) = 5$.

Aufgabe 4. Gegeben sei eine Abbildung

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \ , \quad F : (x, y, z) \mapsto \big(x + y + 3z,\ 2x + y + 5z,\ 4x + 2y + 10z,\ x + y + 3z\big) \ .$$

a) Zeigen Sie: F ist linear.
b) Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(F)$.
c) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{im}(F)$.
d) Geben Sie alle $v \in \mathbb{R}^3$ an mit $F(v) = \big(5,\ 8,\ 16,\ 5\big)$.

Aufgabe 5. Sei

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \big((0,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,1)\big) \ , \\ \mathcal{C} &= \big((1,1,0,1,1),\ (1,1,1,1,0),\ (0,1,1,0,0),\ (1,1,1,1,1),\ (0,0,0,1,1)\big) \ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie:
a) $\mathcal{B}$ ist Basis des $\mathbb{R}^3$.
b) $\mathcal{C}$ ist Basis des $\mathbb{R}^5$.
c) Schreibe die Vektoren aus $\mathcal{C}$ in die Spalten einer Matrix $A \in M(5, \mathbb{R})$. Berechne A^{-1}.
d) Berechnen Sie die darstellende Matrix von F bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$, wobei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ bzgl. der Standardbasen gegeben sei durch $F : (x, y, z) \mapsto (x - z,\ x + 2y - z,\ z,\ y + z,\ y)$.

Aufgabe 6. a) Berechnen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

b) Zeigen Sie: Ist A eine Matrix aus $M(m, \mathbb{Z})$ mit $A^n = A$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, so gilt $\det(A) \in \{0, -1, +1\}$.

Aufgabe 7. Es seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ und

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} , \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & & b_1 \\ & \iddots & \\ b_n & & 0 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_2 & D_1 \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (a_i^2 - b_i^2) .$$