

0 Übersicht

1. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Elementare Lösungsmethoden, Existenz und Eindeutigkeit, Lineare Differentialgleichungen, Differentialgleichungen 2. Ordnung

Literatur: O. Forster, "Analysis 2 (Kapitel II)," Vieweg 2005.

2. Hilberträume.

Definition und Eigenschaften, Orthonormalbasen, Fourierreihen, Operatoren auf Hilberträumen, Spektralsatz

Literatur: F. Hirzebruch, W. Scharlau, "Einführung in die Funktionalanalysis," Spektrum 1996.

3. Partielle Differentialgleichungen.

pDGL erster Ordnung; elliptische, parabolische und hyperbolische DGL zweiter Ordnung

1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung versteht man eine Gleichung zwischen einer Funktion y , ihren Ableitungen $y', y'', \dots, y^{(n)}$ und der Variablen x , genauer:

Definition 1.1 Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$ eine Teilmenge mit $n \geq 1$ und $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine n -mal differenzierbare Funktion, so daß für $x \in I$ gilt $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in G$. Die Funktion y erfüllt eine *gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung*, wenn es eine Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I .$$

Läßt sich diese Gleichung nach $y^{(n)}(x)$ auflösen zu

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) ,$$

dann heißt die Differentialgleichung *explizit*.

Viele Probleme der Physik lassen sich durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschreiben. Beispiele sind die eindimensionale Bewegungen in der Mechanik, die durch das Newtonsche Gesetz

$$y''(x) = F(x, y(x), y'(x))$$

beschrieben werden. Dabei ist x die Zeit, y der Ort, $y'(x)$ die Geschwindigkeit, $y''(x)$ die Beschleunigung und F die Kraft. Gesucht ist die *Bahnkurve* $y(x)$. Man möchte wissen, unter welchen Bedingungen die Bahnkurve existiert und durch

welche Bedingungen die Bahnkurve eindeutig bestimmt ist. Wichtige Verallgemeinerungen sind *partielle Differentialgleichungen*, das sind Gleichungen zwischen einer mehrdimensionalen Funktion $y(x_1, \dots, x_n)$, ihren partiellen Ableitungen $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} y$ und dem Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ selbst. Diese werden im 3. Teil behandelt.

Ein weiteres Beispiel einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist der radioaktive Zerfall, beschrieben durch $y'(x) = -\lambda y(x)$. Dabei ist wieder x die Zeit, y die Zahl der Teilchen und y' die Zerfallsrate. Ein ähnliches Gesetz $y'(x) = \lambda y$ beschreibt auch das anfängliche Wachstum von Bakterienpopulationen.

1.1 Elementare Lösungsmethoden

Wir beginnen mit einigen einfachen Klassen gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Definition 1.2 (DGL 1. Ordnung mit getrennten Variablen) Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Dann heißt

$$y'(x) = f(x) g(y)$$

Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Formell können wir diese Differentialgleichung als

$$\frac{dy}{g(y)} = dx f(x)$$

schreiben und beide Seiten getrennt integrieren, wobei gewisse *Anfangsbedingungen* ins Spiel kommen.

Satz 1.1 Zu gegebenem Anfangspunkt $(x_0, y_0) \in I \times J$ definieren wir Funktionen $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int_{x_0}^x dt f(t), \quad G(y) := \int_{y_0}^y \frac{ds}{g(s)}.$$

Ist $I' \subset I$ ein Intervall mit $F(I') \subset G(J)$, dann gibt es genau eine Lösung $y : I' \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' = f(x) g(y)$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$. Diese Lösung erfüllt die Gleichung

$$G(y(x)) = F(x) \quad \text{für alle } x \in I'.$$

Beweis. Der Beweis beruht auf dem Satz über implizite Funktionen. Angenommen, $y(x)$ ist eine Lösung des Problems, d.h. es gilt $y'(x) = f(x) g(y(x))$ und $y(x_0) = y_0$. Wir setzen $x \mapsto t$ und integrieren über t von x_0 nach x :

$$\int_{x_0}^x dt \frac{y'(t)}{g(y(t))} = \int_{x_0}^x dt f(t).$$

Nach Substitution $s = y(t)$ ergibt sich

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^x dt f(t),$$

also $G(y(x)) = F(x)$. Zu beachten ist, daß wir die Zulässigkeit der Substitution $s = y(t)$ nicht prüfen! Das wird nun nachgeholt.

Wir nehmen die Gültigkeit von $G(y(x)) = F(x)$ an. Wegen $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ für alle $y \in J$ ist G streng monoton (und stetig differenzierbar), so daß nach dem Satz über implizite Funktionen eine eindeutige stetig differenzierbare Umkehrfunktion $G^{-1} : G(J) \rightarrow \mathbb{R}$ existiert. Somit gilt $y(x) = G^{-1}(F(x))$ für alle $x \in I'$, d.h. im Fall der Existenz ist die Lösung eindeutig. Andererseits ist $Y := G^{-1} \circ F : I' \rightarrow \mathbb{R}$ nach dem Satz über implizite Funktionen stetig differenzierbar mit

$$Y'(x) = (G^{-1})'(F(x)) \cdot F'(x) = \frac{1}{G'(G^{-1}(F(x)))} \cdot F'(x) = g(Y) \cdot f(x),$$

d.h. Y erfüllt die Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $Y(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0$. Also existiert eine Lösung. \square

Zu beachten ist, daß die Umkehrfunktion G^{-1} im allgemeinen nicht durch elementare Funktionen auszudrücken ist.

Beispiel 1.1 Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = e^y \sin x$ zu beliebigem Anfangspunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist $F(x) = \cos x_0 - \cos x$ und $G(y) = e^{-y_0} - e^{-y}$, also

$$e^{-y(x)} = \cos x - \cos x_0 + e^{-y_0}.$$

Wegen $e^{-y_0} > 0$ gibt es ein offenes Intervall $I' \subset \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I'$, so daß $\cos x - \cos x_0 + e^{-y_0} > 0$ für alle $x \in I'$. Dann ergibt sich die Lösung zu $y = -\ln(\cos x - \cos x_0 + e^{-y_0})$ für alle $x \in I'$.

Definition 1.3 (lineare Differentialgleichung 1. Ordnung) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ und $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann heißt

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

eine *lineare Differentialgleichung 1. Ordnung*. Diese heißt für $b = 0$ *homogen*, sonst *inhomogen*.

Satz 1.2 *Es sei $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' = a(x)y$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, nämlich*

$$y(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x dt a(t)\right).$$

Beweis. Es handelt sich um einen Spezialfall einer Differentialgleichung mit getrennten Variablen. \square

Der inhomogene Fall wird durch *Variation der Konstanten* gelöst. Darunter versteht man den Ansatz $y(x) = \tilde{y}(x)u(x)$, wobei $\tilde{y}(x)$ die homogene Gleichung $\tilde{y}' = a(x)\tilde{y}$ mit $\tilde{y}(x_0) = 1$ löst. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} y'(x) &= \tilde{y}'(x)u(x) + \tilde{y}(x)u'(x) = (a(x)u(x) + u'(x))\tilde{y}(x) \\ &= a(x)u(x)\tilde{y}(x) + b(x), \end{aligned}$$

also $u'\tilde{y}(x) = b(x)$ mit Anfangsbedingung $u(x_0) = y_0$. Das ist wieder eine spezielle Differentialgleichung mit getrennten Variablen mit der eindeutigen Lösung

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^x dt b(t)\tilde{y}^{-1}(t).$$

Somit ist bewiesen:

Satz 1.3 *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sowie $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' = a(x)y + b(x)$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, nämlich*

$$y(x) = \tilde{y}(x) \left(y_0 + \int_{x_0}^x dt b(t)\tilde{y}^{-1}(t) \right) \quad \text{mit} \quad \tilde{y}(s) = \exp \left(\int_{x_0}^s dt a(t) \right).$$

Beispiel 1.2 Betrachtet werde die Differentialgleichung $y' = 2xy + x$ mit $y(0) = c$. Dann hat die homogene Gleichung $\tilde{y}' = 2x\tilde{y}$ mit $\tilde{y}(0) = 1$ die Lösung

$$\tilde{y}(x) = \exp \left(\int_0^x dt 2t \right) = e^{x^2}.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{x^2} \left(c + \int_0^x dt te^{-t^2} \right) = e^{x^2} \left(c + \frac{1}{2} (1 - e^{-x^2}) \right) \\ &= \frac{2c+1}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Beispiel 1.3 (Freier Fall mit Reibung) Es sei x die Zeit. Der freie Fall eines Massenpunktes (in y - z -Ebene) wird bei geschwindigkeitsproportionaler Reibungskraft beschrieben durch die Differentialgleichungen

$$mz'' = -mg - rz', \quad my'' = -ry'.$$

Als Anfangsbedingung sei $z'(0) = v_z$ und $y'(0) = v_y$ gegeben. Damit ergeben sich die Geschwindigkeiten zu

$$\begin{aligned} y'(x) &= v_y \exp \left(\int_0^x dt \left(-\frac{r}{m} \right) \right) = v_y e^{-\frac{r}{m}x}, \\ z'(x) &= e^{-\frac{r}{m}x} \left(v_z - \int_0^x dt g e^{\frac{r}{m}t} \right) = v_z e^{-\frac{r}{m}x} - \frac{mg}{r} (1 - e^{-\frac{r}{m}x}), \end{aligned}$$

Für $x \rightarrow \infty$ fällt der Massenpunkt also mit konstanter Geschwindigkeit $\frac{mg}{r}$ in negative z -Richtung. Die Anfangsgeschwindigkeiten sind exponentiell gedämpft.

Beide Lösungen sind selbst Differentialgleichungen mit getrennten Variablen. Sind die Anfangsbedingungen $z(0) = h$ und $y(0) = 0$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x dt v_y e^{-\frac{r}{m}t} = \frac{v_y m}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{m}x}\right), \\ z(x) &= h + \int_0^x dt \left(v_z e^{-\frac{r}{m}t} - \frac{mg}{r} (1 - e^{-\frac{r}{m}t})\right) \\ &= h + \frac{v_z m}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{m}x}\right) - \frac{mg}{r} \left(x - \frac{m}{r} (1 - e^{-\frac{r}{m}x})\right). \end{aligned}$$

1.2 Exakte Differentialgleichung

Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit $(x, y) \in G$. Unter später diskutierten Voraussetzungen an f geht durch jeden Punkt $((x_0, y_0) \in G$ genau eine Lösung, d.h. die Lösungen bilden eine *Kurvenschar* in der x - y -Ebene. Umgekehrt findet man zu einer differenzierbaren Kurvenschar $F(x, y) = C$, die G einfach überdeckt, eine Differentialgleichung, nämlich

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) y' + \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0.$$

Äquivalent kann man auch eine Parametrisierung der Kurve $x = x(t)$ und $y = y(t)$ wählen. Differentiation von $F(x(t), y(t)) = C$ nach t ergibt

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t)) \dot{y}(t) + \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t)) \dot{x}(t) = 0,$$

was Symmetrien besser zum Ausdruck bringt. "Multiplikation mit dt " ergibt eine Darstellung, die in der Sprache der Differentialformen sinnvoll ist:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dy + \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) dx = 0.$$

Definition 1.4 (Exakte Differentialgleichung) Seien $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $g, h : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Abbildungen. Die Differentialgleichung

$$g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0$$

heißt *exakt*, wenn es eine stetig differenzierbare Abbildung $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß $g = \frac{\partial F}{\partial x}$ und $h = \frac{\partial F}{\partial y}$. In diesem Fall heißt F die *Stammfunktion* der Differentialgleichung.

Die Lösung einer exakten Differentialgleichung ist bis auf eine Konstante eindeutig: Sei \tilde{F} eine zweite Lösung, dann ist $u := F - \tilde{F}$ stetig differenzierbar

mit $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Wegen der stetigen Differenzierbarkeit verschwinden auch alle Richtungsableitungen von u , also ist u konstant. Durch lokale Auflösung der Gleichung $F(x, y) = C$ mittels des Satzes über implizite Funktionen kann die Kurvenschar explizit konstruiert werden.

Beispiel 1.4 Die Differentialgleichung $2y dy + 2x dx = 0$ ist exakt, denn $F(x, y) = x^2 + y^2$ ist Stammfunktion. Die Niveaukurven $F(x, y) = R^2$ sind konzentrische Kreise um den Nullpunkt.

Satz 1.4 (Notwendige Bedingung für Exaktheit) *Auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ sei die Differentialgleichung $g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0$ gegeben mit stetig differenzierbaren Abbildungen $g, h : G \rightarrow \mathbb{R}$. Ist die Differentialgleichung exakt, so gilt*

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in G .$$

Beweis. Nach Definition gibt es eine stetig differenzierbare Stammfunktion $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g = \frac{\partial F}{\partial x}$ und $h = \frac{\partial F}{\partial y}$. Da g, h stetig differenzierbar sind, ist F sogar zweimal stetig differenzierbar. Nach dem Satz von Schwarz gilt dann

$$\frac{\partial}{\partial x} h = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} g . \quad \square$$

Wir kommen nun zur Berechnung der Stammfunktion.

Satz 1.5 *Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $G = I \times J$. Die Abbildungen $g, h : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbar, und es gelte $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$ für alle $(x, y) \in I \times J$. Sei $(x_0, y_0) \in I \times J$ ein beliebiger Anfangspunkt. Dann ist*

$$F(x, y) := \int_{x_0}^x dt g(t, y) + \int_{y_0}^y ds h(x_0, s)$$

eine Stammfunktion der Differentialgleichung $g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0$.

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt $\frac{\partial F}{\partial x} = g(x, y)$. Wegen Stetigkeit von g können wir unter dem Integral differenzieren, so daß außerdem gilt

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_{x_0}^x dt \frac{\partial g}{\partial y}(t, y) + h(x_0, y) = \int_{x_0}^x dt \frac{\partial h}{\partial t}(t, y) + h(x_0, y) = h(x, y) . \quad \square$$

Ohne Beweis bemerken wir, daß man die Forderung an das Gebiet G stark abschwächen kann: Es genügt, daß $G \subset \mathbb{R}^2$ *einfach zusammenhängend* ist, d.h. daß sich ein beliebiger geschlossener Weg in G auf einen Punkt zusammenziehen läßt. Ist dann $(x_0, y_0) \in G$ ein beliebiger Anfangspunkt und $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ eine

beliebige (stückweise) differenzierbare Kurve mit $\gamma(a) = (x_0, y_0)$ und $\gamma(b) = (x, y)$, so ist

$$F(x, y) = \int_a^b dt \langle (g(\gamma(t)), h(\gamma(t))), \dot{\gamma}(t) \rangle$$

eine Stammfunktion der exakten Differentialgleichung $g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0$ mit $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$. Diese Formulierung läßt sich direkt auf mehr als zwei Dimensionen verallgemeinern.

Manchmal ist eine Differentialgleichung $g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0$ nicht exakt, aber durch Multiplikation mit einem *integrierenden Faktor* $m(x, y)$ exakt zu machen, d.h. $m(x, y) g(x, y) dx + m(x, y) h(x, y) dy = 0$ ist exakt. Ein integrierender Faktor kann relativ leicht gefunden werden, wenn er nur von x oder nur von y abhängt.

1.3 Existenz- und Eindeutigkeitsatz

Wir betrachten im weiteren die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit $y \in \mathbb{R}^n$. Genauer sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, gesucht ist eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, so daß $(y(x), x) \in G$ für alle $x \in I \subset \mathbb{R}$. Meist sucht man Lösungen mit vorgegebener Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$. Diese Problemstellung heißt *System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung*.

Viele interessantere Differentialgleichungen lassen sich auf ein solches System überführen. Sei z.B. eine explizite gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung gegeben, $z^{(n)} = \tilde{f}(x, z, z', \dots, z^{(n-1)})$, dann setzen wir

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} z \\ z' \\ \vdots \\ z^{(n-2)} \\ z^{(n-1)} \end{pmatrix} \Rightarrow y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ \tilde{f}(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} = f(x, y) .$$

Insbesondere lassen sich Problemstellungen der Mechanik von N Massenpunkten, wenn die Kräfte stetige Funktion der $3N$ Orte und der $3N$ Geschwindigkeiten sind, auf ein solches System aus $n = 6N$ Differentialgleichungen 1. Ordnung überführen, wobei x wieder die Zeit ist.

Wir lösen das System von Differentialgleichungen durch Zurückführen auf eine *Integralgleichung*.

Satz 1.6 *Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung sowie $(x_0, y_0) \in G$. Dann gilt: Eine stetige Abbildung $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eines Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$ und $(x, y(x)) \in G$ für alle $x \in I$ löst genau dann die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ zur Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, wenn folgende*

Integralgleichung gilt:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x dt f(t, y(t)) \quad \text{für alle } x \in I .$$

Beweis. (\Leftarrow) Für $x = x_0$ folgt $y(x_0) = y_0$. Wegen der Stetigkeit von y und f ist auch die Abbildung $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(t) := f(t, y(t))$ stetig auf I . Damit gilt nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^x dt f(t, y(t)) = f(x, y(x)) ,$$

d.h. y ist sogar differenzierbar mit $y'(x) = f(x, y(x))$.

(\Rightarrow) Es gilt

$$\int_{x_0}^x dt f(t, y(t)) = \int_{x_0}^x dt y'(t) = y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0 ,$$

d.h. die Integralgleichung ist erfüllt. \square

Es wird sich zeigen, daß Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bewiesen werden kann, wenn die Funktion f einer *Lipschitz-Bedingung* genügt.

Definition 1.5 Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ genügt einer *Lipschitz-Bedingung* (bezüglich der Variablen y), wenn es ein $L \geq 0$ gibt, so daß

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L \|y - \tilde{y}\| \quad \text{für alle } (x, y), (x, \tilde{y}) \in G .$$

Die Funktion f genügt einer *lokalen Lipschitz-Bedingung*, wenn jeder Punkt $(x_0, y_0) \in G$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ besitzt, so daß f in $G \cap U$ einer Lipschitz-Bedingung mit möglicherweise von U abhängiger Lipschitz-Konstanten $L(U)$ genügt.

Ein nützliches Kriterium ist stetige partielle Differenzierbarkeit nach y :

Satz 1.7 Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar in den letzten n Koordinatenrichtungen y_1, \dots, y_n . Dann genügt f in G lokal einer *Lipschitz-Bedingung*.

Beweis. Wegen der Offenheit von G gibt es zu beliebigem $(x_0, y_0) \in G$ ein $r > 0$, so daß

$$V := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r, \|y - y_0\| \leq r\} \subset G .$$

Mit $(x, y) \in V$ ist auch $(x, y_0 + t(y - y_0)) \in V$ für alle $t \in [0, 1]$. Nach dem Mittelwertsatz und einer Variante des Satzes von Taylor (Satz 2.27 aus dem letzten Semester) gibt es ein $\theta \in [0, 1]$, so daß

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x, y_0) &= \left. \frac{df}{dt}(x, y_0 + t(y - y_0)) \right|_{t=\theta} = \sum_{i=1}^n (y - y_0)_i \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y_0 + \theta(y - y_0)) \\ &= (Df)(x, y_0 + \theta(y - y_0)) \cdot (y - y_0) . \end{aligned}$$

Dabei ist punktweise $(Df) = (\partial_i f_j) \in M(n \times n, \mathbb{R})$, wobei $f = (f_1, \dots, f_n)$. Da f stetig partiell differenzierbar ist, ist die lineare Abbildung $Df : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig auf V , so daß mit der Norm einer linearen Abbildung folgt

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - f(x, y_0)\| &\leq \|(Df)(x, y_0 + \theta(y - y_0))\| \|y - y_0\| \\ &\leq \sup_{(x, y) \in V} \|(Df)(x, y)\| \|y - y_0\|. \end{aligned}$$

Wegen der Kompaktheit von V wird das Supremum $L := \sup_{(x, y) \in V} \|(Df)(x, y)\|$ angenommen. \square

Satz 1.8 (Eindeutigkeitssatz) *Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Sind y, \tilde{y} zwei Lösungen derselben Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ und $\tilde{y}' = f(x, \tilde{y})$ über einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, und in einem Punkt $x_0 \in I$ gelte $y(x_0) = \tilde{y}(x_0)$, so folgt*

$$y(x) = \tilde{y}(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Beweis. Die Eindeutigkeit wird stückweise vom Punkt x_0 aus ausgedehnt.

i) Sei dazu $y(a) = \tilde{y}(a)$ für ein $a \in I$. Dann gilt für alle $x \in I$ die Integralgleichung

$$y(x) - \tilde{y}(x) = \int_a^x dt (f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))).$$

Da f lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, gibt es reelle Zahlen $L \geq 0$ und $\delta > 0$, so daß

$$\|f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))\| \leq L \|y(t) - \tilde{y}(t)\| \quad \text{für alle } t \in I \cap B_\delta(a).$$

Wie üblich ist $B_\delta(a) := \{t \in \mathbb{R} : |t - a| < \delta\}$. Sei nun $\epsilon := \min(\delta, \frac{1}{2L})$ und

$$M := \sup_{t \in I \cap B_\epsilon(a)} \|y(t) - \tilde{y}(t)\|.$$

Dann folgt für alle $x \in I \cap B_\epsilon(a)$

$$\|y(x) - \tilde{y}(x)\| \leq L \left| \int_a^x dt \|y(t) - \tilde{y}(t)\| \right| \leq LM\epsilon \leq \frac{M}{2}.$$

Das bedeutet $M = \sup_{x \in I \cap B_\epsilon} \|y(x) - \tilde{y}(x)\| \leq \frac{M}{2}$ und damit $M = 0$, d.h. die Funktionen y, \tilde{y} stimmen sogar auf $I \cap B_\epsilon(a)$ überein.

ii) Wir zeigen nun $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in I$ mit $x \geq x_0$. Dazu sei

$$x_1 := \sup \{ \xi \in I : y(\xi) = \tilde{y}(\xi) \}.$$

Für $x_1 = +\infty$ oder x_1 gleich dem Intervallende ist nichts mehr zu zeigen. Ansonsten gibt es ein $\delta > 0$ mit $|x_1, x_1 + \delta| \subset I$. Da y, \tilde{y} als Lösungen der Differentialgleichung insbesondere stetig sind, gilt $y(x_1) = \tilde{y}(x_1)$. Dann aber gibt es nach i) ein $\epsilon > 0$, so daß $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in I \cap B_\epsilon(x_1)$, im Widerspruch zur Definition von x_1 . Analog wird der Fall $x \leq x_0$ behandelt. \square

Satz 1.9 (Picard-Lindelöf) Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es zu jedem $(x_0, y_0) \in G$ ein $\epsilon > 0$ und eine Lösung $y : [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$. Nach Satz 1.8 ist diese Lösung eindeutig.

Beweis. Der Beweis verwendet den Banachschen Fixpunktsatz für die zugehörige Integralgleichung. Dazu sei $\mathcal{C}([x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon], \mathbb{R}^n)$ der Banachraum der stetigen Abbildungen $\phi : [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit der Supremumsnorm

$$\|\phi\| := \sup_{x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]} |\phi(x)| .$$

(Die Vollständigkeit beweist man wie im Satz 2.33 aus dem letzten Semester.)

Gewählt sei ein Quader

$$Q_{\delta,r} := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \delta, \|y - y_0\| \leq r\}$$

mit $\delta, r > 0$, so daß die Abbildung f in $Q_{\delta,r}$ einer Lipschitz-Bedingung mit der Lipschitz-Konstanten L genügt. Da f stetig und $Q_{\delta,r}$ kompakt ist, gibt es eine reelle Zahl $M > 0$, so daß $\|f(x, y)\| \leq M$ für alle $(x, y) \in Q_{\delta,r}$. Mit diesen Daten sei $\epsilon := \min(\delta, \frac{r}{M}, \frac{1}{2L})$. Wir betrachten die abgeschlossene Teilmenge

$$A := \{\phi \in \mathcal{C}([x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon], \mathbb{R}^n), \|\phi - y_0\| \leq r\}$$

des Banachraums. Wir zeigen, daß

$$(T(\phi))(x) := y_0 + \int_{x_0}^x dt f(t, \phi(t))$$

eine Kontraktion $T : A \rightarrow A$ definiert.

i) Zunächst ist $T(\phi) \in A$ zu zeigen für alle $\phi \in A$. Nach Konstruktion ist

$$(t, \phi(t)) \in Q_{\delta,r} \subset G \quad \text{für alle } t \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] .$$

Damit ist f sinnvoll erklärt und stetig in t . Es gilt

$$\|(T(\phi))(x) - y_0\| = \left\| \int_{x_0}^x dt f(t, \phi(t)) \right\| \leq |x - x_0| M \leq \epsilon M \leq r ,$$

also $T(\phi) \in A$.

ii) Seien $\phi_1, \phi_2 \in A$, dann gilt

$$\begin{aligned} \|T(\phi_1) - T(\phi_2)\| &= \left\| \int_{x_0}^x dt (f(t, \phi_1(t)) - f(t, \phi_2(t))) \right\| \\ &\leq |x - x_0| L \sup_{t \in [x_0, x]} |\phi_1(t) - \phi_2(t)| \leq \frac{1}{2} \|\phi_1 - \phi_2\| . \end{aligned}$$

Also ist $T : A \rightarrow A$ eine Kontraktion auf einer abgeschlossenen Teilmenge eines Banachraums. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es damit einen Fixpunkt $y \in A$ mit $T(y) = y$, also

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x dt f(t, y(t)) ,$$

d.h. eine (eindeutige) Lösung der Differentialgleichung. \square

Es sei betont, daß die Größe des Intervalls 2ϵ durch die Lipschitz-Bedingung an f und die Norm y bestimmt ist. Wenn die Lösung y also anwächst, wird die Fortsetzbarkeit der Lösung immer kleiner.

Beispiel 1.5 Betrachtet werde die Differentialgleichung $y' = 2xy^2$. Die Funktion $f(x, y) = 2xy^2$ ist auf ganz \mathbb{R}^2 nach y partiell differenzierbar, genügt also auf ganz \mathbb{R}^2 einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Die eindeutige Lösung zu $y(0) = 0$ ist offenbar $y = 0$. Sei dann $y(0) > 0$. Da $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ einfach zusammenhängend ist, ist die entsprechende Differentialgleichung $2x dx - \frac{1}{y^2} dy = 0$ auf G exakt mit Stammfunktion

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x dt (2t) - \int_{y_0}^y \frac{ds}{s^2} = x^2 - x_0^2 + \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} .$$

Die Niveaufunktionen sind also durch $x^2 + \frac{1}{y} = C$ gegeben, d.h. $y = \frac{1}{C-x^2}$, insbesondere $y(0) = \frac{1}{C} > 0$. Die Lösung läßt sich also nur bis zu $]-\sqrt{C}, \sqrt{C}[$ fortsetzen. Im umgekehrten Fall $y(0) < 0$ ergibt sich $y = -\frac{1}{C+x^2}$ mit $y(0) = -\frac{1}{C} < 0$ so daß die Lösung auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt werden kann.

Ohne Beweis erwähnen wir, daß die *Existenz* einer Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ bereits durch die *Stetigkeit* von f garantiert ist:

Satz 1.10 (Peano) *Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und*

$$Q_{\delta, r} := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \delta, \|y - y_0\| \leq r\}$$

für $\delta, r > 0$. Die Funktion $f : Q_{\delta, r} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig (also beschränkt) mit $M := \max_{(x, y) \in Q_{\delta, r}} \|f(x, y)\|$. Dann gibt es mindestens eine Lösung $y : [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, wobei $\epsilon := \min(\delta, \frac{r}{M})$ ist (mit $\epsilon := \delta$ für $M = 0$).

Der Beweis ohne die Lipschitz-Bedingung ist aber aufwendiger und wird deshalb weggelassen.

Beispiel 1.6 Betrachtet werde die Differentialgleichung $y' = (y^2)^{\frac{1}{3}}$ mit $y(0) = 0$. Die Funktion $f(x, y) = (y^2)^{\frac{1}{3}}$ ist stetig auf ganz \mathbb{R}^2 , aber nicht stetig partiell differenzierbar in $y = 0$, und tatsächlich genügt f in keiner Umgebung von $(0, 0)$

einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Nach dem Existenzsatz von Peano gibt es lokal eine Lösung der Differentialgleichung, z.B. $y(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das ist aber nicht die einzige Lösung. Durch Trennen der Variablen findet man, daß $y_c(x) := \frac{1}{27}(x - c)^3$ die Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $y(c) = 0$ erfüllt. Durch Verkleben mit der Nulllösung konstruieren wir zu $c, c' \geq 0$ die Lösung

$$y_{cc'}(x) := \begin{cases} \frac{1}{27}(x - c)^3 & \text{für } x \geq c \geq 0 \\ 0 & \text{für } -c' \leq x \leq c \\ \frac{1}{27}(x + c')^3 & \text{für } x \leq -c' \leq 0 \end{cases}$$

Durch Nachrechnen überprüft man, daß $y_{cc'}$ tatsächlich stetig differenzierbar ist.

Das Verfahren von Picard-Lindelöf über den Banachschen Fixpunktsatz ist konstruktiv und kann deshalb leicht numerisch implementiert werden.

Beispiel 1.7 Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = 2xy$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0$. In einer gewissen Umgebung $[-\epsilon, \epsilon]$ von 0 konvergiert deshalb die Folge $(y_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ von Funktionen mit $y_0(x) = y_0$ und

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_0^x dt f(t, y_k(t))$$

gegen die eindeutige Lösung. Wir finden

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_0^x dt 2ty_0 = y_0(1 + x^2) \\ y_2(x) &= y_0 + \int_0^x dt 2ty_0(1 + t^2) = y_0 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2}\right) \\ y_k(x) &= y_0 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}\right) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Lösung $y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x) = y_0 e^{x^2}$, was man natürlich auch mit elementaren Methoden finden kann.

1.4 Lineare Differentialgleichungen

Wir spezifizieren nun den Existenz- und Eindeutigkeitssatz auf Systeme linearer Differentialgleichungen $y' = A(x)y + b(x)$. Dabei ist $A(x)$ eine Matrix und $b(x)$ ein Vektor. Im Hinblick auf die Diagonalisierbarkeit von A erweist es sich als nützlich, mit komplexen Matrizen zu arbeiten. Sei dazu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die Variable x bleibt aber reell.

Definition 1.6 Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A = (a_{ij}) : I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K})$ eine stetige Abbildung und $b = (b_1, \dots, b_n)^t : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine stetige vektorwertige Funktion. Dann heißt $y' = A(x)y + b(x)$ ein inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem und $y' = A(x)y$ ein (bzw. das zugehörige) homogene(s) lineare(s) Differentialgleichungssystem.

Gesucht sind Lösungen $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$, wobei für $\mathbb{K} = \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ die Differenzierbarkeit komponentenweise betrachtet wird.

Satz 1.11 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A = (a_{ij}) : I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K})$ eine stetige Abbildung und $b = (b_1, \dots, b_n)^t : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine stetige vektorwertige Funktion. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in I$ und jedem $y_0 \in \mathbb{K}^n$ genau eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ der linearen Differentialgleichung $y' = A(x)y + b(x)$ mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$.*

Beweis. i) Wir setzen $f(x, y) = A(x)y + b(x)$. Sei $J \subset I$ ein kompaktes Intervall, dann folgt aus der Stetigkeit von A

$$L := \sup_{x \in J} \|A(x)\| < \infty$$

Somit gilt für beliebige $x \in J$ und $y, \tilde{y} \in \mathbb{K}^n$

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| = \|A(x)(y - \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\| .$$

Folglich genügt $f(x, y)$ auf ganz $J \times \mathbb{K}^n$ einer globalen Lipschitz-Bedingung, so daß nach Satz 1.8 die Lösung auf $J \times \mathbb{K}^n$ eindeutig ist.

ii) Nach Picard-Lindelöf existiert die Lösung in einer Umgebung von x_0 . Zu zeigen bleibt, daß sie auf ganz I existiert. Dazu definieren wir Folgen von Abbildungen $y_k : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ durch

$$y_{k+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^x dt f(t, y_k(t)) , \quad y_0(x) = y_0 .$$

Die so konstruierten Abbildungen y_k sind stetig auf I . Also gilt

$$M := \sup_{x \in J} \|y_1(x) - y_0(x)\| < \infty .$$

Wir zeigen mit vollständiger Induktion

$$\|y_{k+1}(x) - y_k(x)\| \leq M \frac{L^k \|x - x_0\|^k}{k!} .$$

Für $k = 0$ ist das die Definition von M . Der Induktionsschritt ist

$$\begin{aligned} \|y_{k+2}(x) - y_{k+1}(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x dt (f(t, y_{k+1}(t)) - f(t, y_k(t))) \right\| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x dt \|f(t, y_{k+1}(t)) - f(t, y_k(t))\| \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x dt \|y_{k+1}(t) - y_k(t)\| \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x dt M \frac{L^k |t - x_0|^k}{k!} \right| = M \frac{L^{k+1} |x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} . \end{aligned}$$

Setzen wir $r := \sup_{x \in J} |x - x_0|$, dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (y_{k+1}(x) - y_k(x))$ absolut konvergent auf J , da sie durch die Reihe $M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k r^k}{k!} = M e^{Lr}$ majorisiert wird. Somit konvergiert die Folge (y_k) auf jedem kompakten Teilintervall $J \subset I$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion

$$y := \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (y_{k+1} - y_k),$$

welche somit stetig auf J und damit auf I ist. Diese Grenzfunktion erfüllt nach Konstruktion die Integralgleichung

$$y(x) := y_0 + \int_{x_0}^x dt f(t, y(t))$$

und löst deshalb auf I die Differentialgleichung $y' = A(x)y + b(x)$ mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$. \square

Ähnlich wie in der linearen Algebra bilden die Lösungen der homogenen Differentialgleichung, *wenn man keine Anfangsbedingung stellt*, einen Vektorraum:

Satz 1.12 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (nicht-triviales) Intervall und $A : I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K})$ stetig. Dann bildet die Menge V_A aller Lösungen der homogenen Differentialgleichung $y' = A(x)y$ einen n -dimensionalen Vektorraum über \mathbb{K} .*

Für ein k -Tupel von Lösungen $y_{(1)}, \dots, y_{(k)} \in V_A$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) *Die vektorwertigen Funktionen $(y_{(1)}, \dots, y_{(k)})$ sind linear unabhängig.*
- ii) *Es gibt ein $x_0 \in I$, so daß die Vektoren $y_{(1)}(x_0), \dots, y_{(k)}(x_0) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig sind.*
- iii) *Für jedes $x_0 \in I$ sind die Vektoren $y_{(1)}(x_0), \dots, y_{(k)}(x_0) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig.*

Beweis. Klar ist, daß V_A ein Untervektorraum des (unendlich-dimensionalen) Vektorraums $\mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ aller stetigen Abbildungen $f : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ ist, denn

$$\begin{aligned} (\lambda_1 y_{(1)} + \lambda_2 y_{(2)})' &= \lambda_1 y_{(1)}' + \lambda_2 y_{(2)}' = \lambda_1 (A(x)y_{(1)}) + \lambda_2 (A(x)y_{(2)}) \\ &= A(x) \cdot (\lambda_1 y_{(1)} + \lambda_2 y_{(2)}). \end{aligned}$$

Die Äquivalenzen iii) \Rightarrow ii) \Rightarrow i) sind klar, und i) \Rightarrow iii) folgt aus der Eindeutigkeit der Nulllösung. Damit zeigen wir $\dim(V_A) = n$. Seien $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{K}^n$ die Standardbasisvektoren und $x_0 \in I$. Dann gibt nach dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz eindeutige Lösungen $y_{(i)} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ der Differentialgleichung $y_{(i)}' = A(x)y_{(i)}$ mit Anfangsbedingung $y_{(i)}(x_0) = e_i$. Die Lösungen sind linear unabhängig, da sie an der Stelle x_0 linear unabhängig sind. Jede weitere Lösung $y_{(n+1)}$ ist linear abhängig, da sie an der Stelle x_0 linear abhängig ist. \square

Definition 1.7 Unter einem *Lösungs-Fundamentalsystem* der Differentialgleichung $y' = A(x)y$ versteht man eine Basis $(y_{(1)}, \dots, y_{(n)})$ des Vektorraums V_A der Lösungen von $y' = A(x)y$.

Schreibt man das Lösungs-Fundamentalsystem als Matrix $Y = (y_{ij})$, mit $y_{ij} := y_{(j)i}$ (die j -te Spalte von Y ist $y_{(j)}$), dann gilt offenbar $\det Y(x_0) \neq 0$ für wenigstens einen (und damit für jeden) Punkt $x_0 \in I$. Eine beliebige Lösung schreibt sich damit als $y(x) = Y(x) \cdot \lambda$ mit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t \in \mathbb{K}^n$.

Beispiel 1.8 Gegeben sei die Schwingungsdifferentialgleichung $z'' + \omega^2 z = 0$. Wir setzen $y_1 := z$ und $y_2 := -\frac{1}{\omega}z'$, was also auf das Differentialgleichungssystem $y'_1 = -\omega y_2$ und $y'_2 = \omega y_1$ führt. In Matrixschreibweise ergibt sich $y' = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$. Die Lösungstheorie dieses Problems mit konstanten Koeffizienten behandeln wir später. Man bestätigt durch Nachrechnen, daß folgende Funktionen $y_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ Lösungen der Differentialgleichung sind:

$$y_{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \cos \omega x \\ \sin \omega x \end{pmatrix}, \quad y_{(2)}(x) = \begin{pmatrix} -\sin \omega x \\ \cos \omega x \end{pmatrix}.$$

Diese sind in $x_0 = 0$ und damit auf ganz \mathbb{R} linear unabhängig, was man auch durch

$$\det Y(x) = \det \begin{pmatrix} \cos \omega x & -\sin \omega x \\ \sin \omega x & \cos \omega x \end{pmatrix} = 1$$

sieht.

Wir charakterisieren nun den Lösungsraum der inhomogenen Differentialgleichung :

Satz 1.13 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (nicht-triviales) Intervall und $A : I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K})$ und $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetige Abbildungen. Dann gilt: Die Menge aller Lösungen*

$$L_{A,b} := \{y : I \rightarrow \mathbb{K}^n : y' = A(x)y + b(x)\}$$

der inhomogenen Differentialgleichung ist der affine Raum

$$L_{A,b} = \tilde{y} + V_A,$$

wobei V_A der Vektorraum aller Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y' = A(x)y$ und $\tilde{y} \in L_{A,b}$ eine beliebige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.

Mit anderen Worten: die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist die Summe aus einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Beweis. i) Sei $y \in L_{A,b}$ eine Lösung von $y' = A(x)y + b(x)$, dann erfüllt $u := y - \tilde{y}$ die homogene Differentialgleichung $u' = A(x)u$. Das bedeutet $u \in V_A$, also $y \in \tilde{y} + V_A$ und damit $L_{A,b} \subset \tilde{y} + V_A$.

ii) Sei umgekehrt $y \in \tilde{y} + V_A$ gegeben, also $y = \tilde{y} + u$ mit $u' = A(x)u$. Dann gilt

$$y' = \tilde{y}' + u' = (A(x)\tilde{y} + b(x)) + A(x)u(x) = A(x)y + b(x),$$

also $\tilde{y} + V_A \subset L_{A,b}$. □

Die spezielle Lösung \tilde{y} bekommt man wie in den elementaren Lösungsmethoden durch "Variation der Konstanten":

Satz 1.14 (Variation der Konstanten) Sei $Y = (y_{(1)}, \dots, y_{(n)}) : I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K})$ ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung $y' = A(x)y$. Dann wird eine Lösung \tilde{y} der inhomogenen Differentialgleichung $\tilde{y}' = A(x)\tilde{y} + b(x)$ erhalten durch den Ansatz $\tilde{y}(x) = Y(x) \cdot v(x)$, wobei die differenzierbare Abbildung $v : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ der Differentialgleichung $Y(x)v' = b(x)$ genügt. Ihre Lösung ist somit

$$v(x) = \int_{x_0}^x dt Y^{-1}(t) \cdot b(t) + \text{const.}$$

Beweis. Es gilt

$$\tilde{y}'(x) = Y'(x) \cdot v(x) + Y(x)v'(x) = A(x) \cdot Y(x) \cdot v(x) + Y(x)v'(x) \stackrel{!}{=} A(x)\tilde{y}(x) + b(x),$$

also $v'(x) = Y^{-1}(x) \cdot b(x)$. Umgeschrieben in eine Integralgleichung ergibt sich die Lösung. □

Beispiel 1.9 Gegeben sei die Schwingungsdifferentialgleichung mit periodischer äußerer Kraft $z'' + \omega^2 z = b \cos(\Omega x)$. Mit $y_1 := z$ und $y_2 := -\frac{1}{\omega} z'$ ergibt sich $y_1' = -\omega y_2$ und $y_2' = \omega y_1 - \frac{b}{\omega} \cos(\Omega x)$. Die spezielle Lösung ist für $\Omega \neq \pm\omega$ damit

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{x_0}^x dt \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{b}{\omega} \cos \Omega t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{b}{2\omega} \int_{x_0}^x dt \begin{pmatrix} \sin(\omega t + \Omega t) + \sin(\omega t - \Omega t) \\ \cos(\omega t + \Omega t) + \cos(\omega t - \Omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} - \frac{b}{2\omega(\omega + \Omega)} \begin{pmatrix} -\cos(\omega x + \Omega x) \\ \sin(\omega x + \Omega x) \end{pmatrix} - \frac{b}{2\omega(\omega - \Omega)} \begin{pmatrix} -\cos(\omega x - \Omega x) \\ \sin(\omega x - \Omega x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} + \frac{b}{\omega(\omega^2 - \Omega^2)} \begin{pmatrix} \omega \cos \omega x \cos \Omega x + \Omega \sin \omega x \sin \Omega x \\ -\omega \sin \omega x \cos \Omega x + \Omega \cos \omega x \sin \Omega x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$y(x) = Y(x) \cdot v(x) = \begin{pmatrix} c_1' \cos \omega x - c_2' \sin \omega x \\ c_1' \sin \omega x + c_2' \cos \omega x \end{pmatrix} + \frac{b}{(\omega^2 - \Omega^2)} \begin{pmatrix} \cos \Omega x \\ \frac{\Omega}{\omega} \sin \Omega x \end{pmatrix}.$$

Für $\Omega^2 \rightarrow \omega^2$ wird die Amplitude der speziellen Lösung unendlich (Resonanz). Tatsächlich muß das Integral in diesem Fall anders berechnet werden.

$$\begin{aligned} v(x) &= -\frac{b}{2\omega} \int_{x_0}^x dt \begin{pmatrix} \sin(2\omega t) \\ \cos(2\omega t) + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} - \frac{b}{4\omega^2} \begin{pmatrix} -\cos(2\omega x) \\ \sin(2\omega x) + 2\omega x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} y(x) = Y(x) \cdot v(x) &= \begin{pmatrix} c'_1 \cos \omega x - c'_2 \sin \omega x \\ c'_1 \sin \omega x + c'_2 \cos \omega x \end{pmatrix} \\ &+ \frac{b}{4\omega^2} \begin{pmatrix} \cos \omega x \cos 2\omega x + \sin \omega x \sin 2\omega x + 2\omega x \sin \omega x \\ \sin \omega x \cos 2\omega x - \cos \omega x \sin 2\omega x - 2\omega x \cos \omega x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c'_1 + \frac{b}{4\omega^2}) \cos \omega x - c'_2 \sin \omega x \\ (c'_1 - \frac{b}{4\omega^2}) \sin \omega x + c'_2 \cos \omega x \end{pmatrix} + \frac{b}{2\omega} \begin{pmatrix} x \sin \omega x \\ -x \cos \omega x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Amplitude wächst also mit der Zeit x an. Wir werden später eine einfachere Berechnungsmethode für diese Differentialgleichung angeben.

Wir übertragen nun die Aussagen zu linearen Differentialgleichungssystemen auf lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung.

Definition 1.8 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $b, a_k : I \rightarrow \mathbb{K}$ stetige Funktionen für $k = 0, 1, \dots, n-1$. Dann heißt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = b(x)$$

eine *lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung*. Sie heißt *homogen* für $b = 0$, sonst *inhomogen*.

Satz 1.15 In den Bezeichnungen von Definition 1.8 gilt:

- i) Die Menge V_a aller Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung ist ein n -dimensionaler Vektorraum über \mathbb{K} .
- ii) Die Menge $L_{a,b}$ aller Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung ist der affine Raum $L_{a,b} = \tilde{y} + V_a$, wobei \tilde{y} eine beliebige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.
- iii) Ein n -Tupel $(y_{(1)}, \dots, y_{(n)})$ von Lösungen der homogenen Differentialgleichung ist genau dann linear unabhängig, wenn in einem (und damit jedem) Punkt $x \in I$ die "Wronski-Determinante"

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} y_{(1)}(x) & y_{(2)}(x) & \dots & y_{(n)}(x) \\ y'_{(1)}(x) & y'_{(2)}(x) & \dots & y'_{(n)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{(1)}^{(n-1)}(x) & y_{(2)}^{(n-1)}(x) & \dots & y_{(n)}^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

ungleich Null ist.

Beweis. Alle Aussagen folgen sofort aus der zu Beginn des Abschnitts 1.3 gegebenen Umschreibung

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

in ein System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung und den dafür bewiesenen Sätzen. Insbesondere ist $W(x) = \det \hat{Y}(x)$. \square

Beispiel 1.10 Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{2x^2}y = 1 \quad \text{auf } I := \mathbb{R}_+^* .$$

Durch Einsetzen bestätigt man $y_{(1)}(x) = x$ und $y_{(2)}(x) = \sqrt{x}$ als Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung. Die Wronski-Determinante ist damit

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} x & \sqrt{x} \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\sqrt{x} ,$$

d.h. (x, \sqrt{x}) ist ein Lösungsfundamentalsystem. Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, nutzt man, daß für $y = cx^2$ jeder Summand der linken Seite eine Konstante ist. Damit findet man $c = \frac{2}{3}$ in der speziellen Lösung und

$$y = \frac{2}{3}x^2 + c_1x + c_2\sqrt{x}$$

als allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

1.5 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten können auf Eigenwertprobleme für lineare Abbildungen zurückgeführt werden, die wir in der Linearen Algebra behandelt haben.

Zur Fixierung der Bezeichnungen sei $\mathbb{C}[T]$ die Menge aller Polynome (endlicher Ordnung) in einer formalen Größe T , d.h. $P_n(T) := a_0 + a_1T + \dots + a_nT^n \in \mathbb{C}[T]$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{C}$. Die Menge der Polynome $\mathbb{C}[T]$ bildet eine sogenannte Algebra, d.h. einen Vektorraum mit Produkt, wobei alle Distributiv-Gesetze gelten. Wir interessieren uns für die Menge $\mathbb{C}[\frac{d}{dx}]$ der *Differentialoperatoren*.

Ist $\mathcal{C}^k(I)$ der Vektorraum der k -mal stetig differenzierbaren komplexwertigen Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $P_n(\frac{d}{dx}) = a_0 + a_1\frac{d}{dx} + \dots + a_n\frac{d^n}{dx^n}$ mit $n \leq k$, dann ist dieser Differentialoperator n -ter Ordnung $P_n(\frac{d}{dx})$ eine lineare Abbildung

$$P_n(\frac{d}{dx}) : \mathcal{C}^k(I) \rightarrow \mathcal{C}^{k-n}(I) , \quad f(x) \mapsto a_0 + a_1f'(x) + \dots + a_nf^{(n)}(x) .$$

Wir können $a_n = 1$ annehmen. Insbesondere ist $P_n(\frac{d}{dx})$ ein Endomorphismus des Vektorraums $\mathcal{C}^\infty(I)$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen. Damit läßt sich die Eigenwerttheorie von Endomorphismen eines Vektorraums auf Differentialoperatoren übertragen. Zwar ist $\mathcal{C}^\infty(I)$ ein unendlich-dimensionaler Vektorraum, aber nach Satz 1.15 ist der Vektorraum der Lösungen y von $P_n(\frac{d}{dx})y = 0$ endlich-dimensional.

Die gesamte Theorie der Differentialoperatoren $P(\frac{d}{dx})$ beruht auf der Beobachtung, daß

$$P_n(\frac{d}{dx})e^{\lambda x} = P_n(\lambda)e^{\lambda x} .$$

Folglich gilt:

Satz 1.16 *Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms P_n , d.h. $P(\lambda) = 0$, dann ist $y = e^{\lambda x}$ eine Lösung der Differentialgleichung $P(\frac{d}{dx})e^{\lambda x} = 0$.*

Im einfachsten Fall sind alle n Nullstellen von P_n verschieden:

Satz 1.17 *Sei $P_n(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0$ ein Polynom, welches n paarweise voneinander verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ habe. Dann bilden die Funktionen $y_{(1)}, \dots, y_{(n)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit*

$$y_{(k)}(x) := e^{\lambda_k x} , \quad k = 1, \dots, n ,$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung

$$P_n(\frac{d}{dx})y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y + a_0 = 0 .$$

Beweis. Nach Satz 1.16 ist jede dieser Funktionen $y_{(k)}$ Lösung der Differentialgleichung. Zur Überprüfung der linearen Unabhängigkeit berechnen wir die Wronski-Determinante an der Stelle $x = 0$. Mit $y_{(k)}^{(j)}(x) = \lambda_k^j e^{\lambda_k x}$ ergibt sich

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Das ist genau die Vandermonde-Determinante (Aufgabe 3 von Blatt 11 aus der Linearen Algebra),

$$W(x) = \prod_{k>l} (\lambda_k - \lambda_l) \neq 0 ,$$

da die Nullstellen paarweise verschieden sind. □

Man sieht aber auch, daß für mehrfache Nullstellen die Lösungen $e^{\lambda_k x}$ nicht linear unabhängig sind.

Beispiel 1.11 Gegeben sei die Differentialgleichung $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$. Sie schreibt sich als $P_3(\frac{d}{dx})y = 0$ mit

$$P_3(T) = T^3 - 2T^2 + T - 2 = (T - 2)(T^2 + 1) = (T - 2)(T - i)(T + i) .$$

Alle Nullstellen von P_3 sind paarweise verschieden, so daß

$$y_{(1)} = e^{ix} , \quad y_{(2)} = e^{-ix} , \quad y_{(3)} = e^{2x}$$

ein Lösungsfundamentalsystem bildet. Wegen

$$c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix} = (c_1 + c_2) \cos x + (ic_1 - ic_2) \sin x$$

bildet dann

$$y_{(1)} = \cos x , \quad y_{(2)} = \sin x , \quad y_{(3)} = e^{2x}$$

ein reelles Fundamentalsystem.

Ganz allgemein gilt: Ist $\lambda = i\mu$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ eine rein imaginäre Nullstelle eines reellen Polynoms $P(T) \in \mathbb{R}[T]$, dann ist auch $\bar{\lambda} = -i\mu$ eine Nullstelle, so daß sich die Lösungen $e^{\pm i\mu x}$ der entsprechenden Differentialgleichung äquivalent durch $\cos \mu x$ und $\sin \mu x$ ausdrücken lassen.

Beispiel 1.12 Wir erinnern noch einmal an die Schwingungsdifferentialgleichung $y'' + \omega^2 y = 0$. Mit $P_2(T) = T^2 + \omega^2 = (T - i\omega)(T + i\omega)$ finden wir sofort das Lösungsfundamentalsystem $y_{(1)} = \cos \omega x$ und $y_{(2)} = \sin \omega x$.

Es verbleibt die Diskussion mehrfacher Nullstellen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra können wir jedes Polynom $P_n(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[T]$ in Linearfaktoren zerlegen,

$$P_n(T) = (T - \lambda_1)^{k_1} \dots (T - \lambda_r)^{k_r} ,$$

mit paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_i \in \mathbb{C}$ und $k_1 + \dots + k_r = n$. Wir benötigen zwei Hilfssätze:

Lemma 1 Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$ sowie $I \subset \mathbb{R}$. Für jede k -mal stetig differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^k (f(x) e^{\lambda x}) = f^{(k)}(x) e^{\lambda x} .$$

Beweis. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen, und für $k = 1$ ergibt sich

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)(f(x) e^{\lambda x}) = f'(x) e^{\lambda x} + f(x) (e^{\lambda x})' - \lambda f(x) e^{\lambda x} = f'(x) e^{\lambda x} .$$

Der Induktionsschritt $k \mapsto k + 1$ ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^{k+1}(f(x) e^{\lambda x}) &= \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)(f^{(k)}(x) e^{\lambda x}) \\ &= (f^{(k)}(x))' e^{\lambda x} \end{aligned}$$

nach obiger Rechnung für $k = 1$. □

Lemma 2 Es sei $P_n(T) \in \mathbb{C}[T]$ ein Polynom und $\lambda \in \mathbb{C}$, so daß $P_n(\lambda) \neq 0$. Ist $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion k -ten Grades, so gilt

$$P_n\left(\frac{d}{dx}\right)(g_k(x) e^{\lambda x}) = h_k(x) e^{\lambda x} ,$$

wobei $h_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ebenfalls eine Polynomfunktion k -ten Grades ist.

Beweis. Das Polynom $P_n(T)$ läßt sich (z.B. über den Satz von Taylor) umordnen nach Potenzen von $T - \lambda$:

$$P_n(T) = \sum_{j=0}^n c_j (T - \lambda)^j$$

mit $c_j \in \mathbb{C}$ und $c_0 = P_n(\lambda) \neq 0$. Damit gilt nach Lemma 1

$$P_n\left(\frac{d}{dx}\right)(g_k(x) e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^n c_j \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^j (g_k(x) e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^n c_j g_k^{(j)}(x) e^{\lambda x} .$$

Wegen $c_0 \neq 0$ ist $h_k(x) := \sum_{j=0}^n c_j g_k^{(j)}(x)$ wieder eine Polynomfunktion vom Grad k . □

Satz 1.18 Es sei $P_n(T) = (T - \lambda_1)^{k_1} \dots (T - \lambda_r)^{k_r}$ ein Polynom n -ten Grades mit paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_j \in \mathbb{C}$ der Vielfachheit k_j . Dann besitzt die Differentialgleichung $P\left(\frac{d}{dx}\right)y = 0$ ein Lösungs-Fundamentalsystem aus den Funktionen

$$y_{(jm)}(x) := x^m e^{\lambda_j x} , \quad 1 \leq j \leq r , \quad 0 \leq m \leq k_j - 1 .$$

Beweis. i) Für gewähltes j läßt sich das Polynom P_n schreiben als $P_n(T) = Q_j(T)(T - \lambda_j)^{k_j}$ mit $Q_j(\lambda_j) \neq 0$. Dann gilt nach Lemma 1

$$P_n\left(\frac{d}{dx}\right)(x^m e^{\lambda_j x}) = Q_j\left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_j\right)^{k_j} (x^m e^{\lambda_j x}) = Q_j\left(\frac{d}{dx}\right) (x^m)^{(k_j)} e^{\lambda_j x} = 0$$

wegen $m < k_j$. Somit erfüllen alle Funktionen $y_{(jm)}$ die Differentialgleichung.

ii) Eine Linearkombination der $y_{(jm)}$ hat die Form $\tilde{y}(x) = \sum_{j=1}^r g_{(j)}(x) e^{\lambda_j x}$, wobei $g_{(j)}(x)$ eine Polynomfunktion vom Grad $\leq k_j - 1$ ist (wir lassen den Polynomgrad zur Verbesserung der Lesbarkeit weg). Wir zeigen durch Induktion nach r , daß $\tilde{y} = 0$ genau dann, wenn $g_{(j)} = 0$ für alle j .

Für $r = 1$ folgt aus $\tilde{y}(x) = g_{(1)}(x) e^{\lambda_1 x} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, daß $g_{(1)}(x) = 0$ ist.

Im Schritt von $r - 1$ nach r sei dann $\sum_{j=1}^r g_{(j)}(x) e^{\lambda_j x} = 0$. Ist eines der $g_{(j)}$ gleich Null, so sind wir nach Induktionsannahme fertig. Ansonsten wenden wir

$(\frac{d}{dx} - \lambda_r)^{k_r}$ an und benutzen Lemma 1 und Lemma 2:

$$\begin{aligned} 0 &= (\frac{d}{dx} - \lambda_r)^{k_r} \left(\sum_{j=1}^r g_{(j)}(x) e^{\lambda_j x} \right) = (\frac{d}{dx} - \lambda_r)^{k_r} \left(\sum_{j=1}^{r-1} g_{(j)}(x) e^{\lambda_j x} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{i=0}^{k_r} c_{ji} (\frac{d}{dx} - \lambda_j)^i \left(g_{(j)}(x) e^{\lambda_j x} \right) = \sum_{j=1}^{r-1} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k_r} c_{ji} g_{(j)}^{(i)}(x) \right)}_{h_{(j)}(x)} e^{\lambda_j x}, \end{aligned}$$

wobei $h_{(j)}(x)$ wegen $c_{j0} = (\lambda_j - \lambda_r)^{k_r} \neq 0$ wieder ein Polynom vom Grad $\leq k_j - 1$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $h_{(j)} = 0$ für alle j und weiter wegen $c_{j0} \neq 0$ auch $g_{(j)}^{(0)}(x) = 0$, im Widerspruch zur Annahme. \square

Beispiel 1.13 Gegeben sei die Schwingungsdifferentialgleichung mit kritischer Reibung

$$0 = y'' + 2\omega y' + \omega^2 y = P_2(\frac{d}{dx})(y)$$

mit $P_2(T) = T^2 + 2\omega T + \omega^2 = (T + \omega)^2$. Die allgemeine Lösung ist deshalb $y = (c_1 + c_2 x) e^{-\omega x}$.

Wir betrachten nun inhomogene lineare Differentialgleichungen $P_n(\frac{d}{dx})y = b(x)$. Es bietet sich an, die Lösung der homogenen Gleichung zu bestimmen, sie in die Matrixform einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung zu überführen und dann durch Variation der Konstanten eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems zu berechnen. In manchen Fällen kommt man aber durch einen geeigneten Lösungsansatz schneller ans Ziel.

Zunächst folgende Beobachtung: Ist $b(x) = b_1(x) + \dots + b_k(x)$ und $y_{(k)}$ Lösung von $P_n(\frac{d}{dx})y_{(k)} = b_k(x)$, so ist $y = y_{(1)} + \dots + y_{(k)}$ Lösung von $P_n(\frac{d}{dx})y = b(x)$. Der Lösungsansatz funktioniert dann für rechte Seiten der Form $b(x) = g_m(x)e^{\mu x}$, wobei g_m eine Polynomfunktion vom Grad m ist.

Satz 1.19 Sei $P_n(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0 \in \mathbb{C}[T]$ ein Polynom und $\mu \in \mathbb{C}$, so daß $P(\mu) \neq 0$ (keine Resonanz). Dann gilt:

- i) Die Differentialgleichung $P_n(\frac{d}{dx})y = e^{\mu x}$ besitzt die spezielle Lösung $y(x) = \frac{1}{P_n(\mu)} e^{\mu x}$.
- ii) Ist $g_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion vom Grad m , so besitzt die Differentialgleichung $P_n(\frac{d}{dx})y = g_m(x)e^{\mu x}$ eine spezielle Lösung der Form $y(x) = h_m(x)e^{\mu x}$, wobei $h_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ wieder eine Polynomfunktion vom Grad m ist.

Beweis. i) ist klar wegen $P_n(\frac{d}{dx})e^{\mu x} = P_n(\mu)e^{\mu x}$.

ii) mit Induktion nach m . Der Fall $m = 0$ ist Teil i). Nach Lemma 2 ist $P_n(\frac{d}{dx})(x^m e^{\mu x}) = \tilde{h}_m(x)e^{\mu x}$ für eine Polynomfunktion $\tilde{h}_m(x)$ vom Grad m . Wir

schreiben $g_m(x) = c\tilde{h}_m(x) + g_{m-1}(x)$ für ein $c \in \mathbb{C}$ und ein Polynom $g_{m-1}(x)$ vom Grad m . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Polynomfunktion $h_{m-1}(x)$ vom Grad $m-1$, so daß $P_n(\frac{d}{dx})y = g_{m-1}(x)e^{\mu x}$ die spezielle Lösung $y(x) = h_{m-1}(x)e^{\mu x}$ hat. Dann hat $P_n(\frac{d}{dx})y = g_m(x)e^{\mu x}$ die spezielle Lösung $y(x) = (cx^m + h_{m-1}(x))e^{\mu x}$. \square

Beispiel 1.14 Gegeben sei die Differentialgleichung $y''' - y = x$, also $P_3(\frac{d}{dx})y = b(x)$ mit $P_3(T) = T^3 - 1 = (T-1)(T^2 + T + 1) = (T-1)(T - \tau_1)(T - \tau_2)$ und $b(x) = xe^{0x}$. Damit ist $P_3(0) \neq 0$, so daß es eine spezielle Lösung $y = c_1x + c_0$ der Differentialgleichung gibt. Wir testen

$$\left(\frac{d^3}{dx^3} - 1\right)(c_1x + c_0) = -c_1x - c_0 \stackrel{!}{=} x,$$

was auf $c_0 = 0$ und $c_1 = -1$ führt. Zusammen mit der allgemeinen Lösung $(\tau_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3})$ des homogenen Problem ergibt sich als allgemeinste Lösung

$$y = -x + ae^x + e^{-\frac{1}{2}x} \left(b \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right).$$

Satz 1.20 Sei $P_n(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0 \in \mathbb{C}[T]$ ein Polynom und $g_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion vom Grad m . Die komplexe Zahl $\mu \in \mathbb{C}$ sei eine k -fache Nullstelle von P_n (Resonanzfall). Dann besitzt die Differentialgleichung $P_n(\frac{d}{dx})y = g_m(x)e^{\mu x}$ eine spezielle Lösung der Form $y(x) = h_{m+k}(x)e^{\mu x}$, wobei $h_{m+k}(x) = \sum_{j=k}^{m+k} c_j x^j$ eine Polynomfunktion vom Grad $m+k$ ist, in der die untersten Potenzen x^j mit $j < k$ nicht auftreten.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Darstellung $P_n(T) = Q_{n-k}(T)(T - \mu)^k$ mit $Q_{n-k}(\mu) \neq 0$. Nach Satz 1.19 gibt es eine Polynomfunktion $\tilde{h}_m(x)$, so daß $Q_{n-k}(\frac{d}{dx})(\tilde{h}_m(x)e^{\mu x}) = g_m(x)e^{\mu x}$. Es gibt dann eine Polynomfunktion $h_{m+k}(x) = \sum_{j=k}^{m+k} c_j x^j$, so daß $h_{m+k}^{(k)}(x) = \tilde{h}_m(x)$. Nach Lemma 1 gilt damit

$$\begin{aligned} P_n\left(\frac{d}{dx}\right)(h_{m+k}(x)e^{\mu x}) &= Q_{n-k}\left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{d}{dx} - \mu\right)^k(h_{m+k}(x)e^{\mu x}) \\ &= Q_{n-k}\left(\frac{d}{dx}\right)(h_{m+k}^{(k)}(x)e^{\mu x}) = Q_{n-k}\left(\frac{d}{dx}\right)(\tilde{h}_m(x)e^{\mu x}) \\ &= g_m(x)e^{\mu x}. \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel 1.15 Wir betrachten noch einmal die Differentialgleichung $y'' + \omega^2 y = b \cos \Omega x = \operatorname{Re}(be^{i\Omega x})$. Wir rechnen im Komplexen und nehmen am Ende den Realteil der Lösung. Wir haben $P_2(T) = (T - i\omega)(T + i\omega)$. Zunächst sei $\Omega^2 \neq \omega^2$. Wegen $P_2(i\Omega) = \omega^2 - \Omega^2$ ergibt sich für $\Omega \neq \omega$ die komplexe Lösung zu

$$y = c_1 e^{i\omega x} + c_2 e^{-i\omega x} + \frac{b}{\omega^2 - \Omega^2} e^{i\Omega x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Der Realteil ist

$$\operatorname{Re}(y) = a_1 \cos \omega x + a_2 \sin \omega x + \frac{b}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \Omega x, \quad a_1 = \operatorname{Re}(c_1 + c_2), \quad a_2 = \operatorname{Im}(c_2 - c_1).$$

Im Resonanzfall $\Omega = \pm\omega$ ist Ω eine einfache Nullstelle, so daß eine spezielle Lösung die Form $cx e^{i\omega x}$ hat. Wegen

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right)(cx e^{i\omega x}) = 2ic\omega e^{i\omega x}$$

ergibt sich

$$y = c_1 e^{i\omega x} + c_2 e^{-i\omega x} + \frac{bx}{2i\omega} e^{i\omega x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Der Realteil ist

$$\operatorname{Re}(y) = a_1 \cos \omega x + a_2 \sin \omega x + \frac{b}{2\omega} x \sin \omega x, \quad a_1 = \operatorname{Re}(c_1 + c_2), \quad a_2 = \operatorname{Im}(c_2 - c_1).$$

Wir bestätigen damit die zuvor in Beispiel 1.9 erhaltenen Lösungen.

1.6 Differentialgleichungen 2. Ordnung

Viele Probleme der Physik führen auf Differentialgleichungen 2. Ordnung. Das typische Beispiel ist das Newtonsche Gesetz für die eindimensionale Bewegung der Mechanik $y'' = f(y)$, dabei ist f die durch die Masse dividierte Kraft. Die übliche Anfangsbedingung ist die Vorgabe von Ort und Geschwindigkeit zur Zeit x_0 , d.h. $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = v_0$. Diese Differentialgleichung läßt sich in ein System linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung überführen und dann durch Variation der Konstanten lösen. Es bietet sich aber noch ein anderer Weg an: Da \mathbb{R} einfach zusammenhängend ist, ist das Potential

$$U(y) := - \int_{y_0}^y ds f(s)$$

unabhängig vom Integrationsweg. Es gilt $\frac{dU}{dy}(y) = -f(y)$. Durch Multiplikation des Newtonschen Gesetzes mit der Geschwindigkeit y' ergibt sich dann

$$0 = y'' y' + \frac{dU}{dy} y' = \left(\frac{1}{2} y'^2 + U(y) \right)'$$

Die Lösung ist der Energieerhaltungssatz $\frac{1}{2} y'^2 + U(y) = E = \frac{1}{2} v_0^2 + U(y_0) = \text{const.}$ Das ist nun eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen mit der Lösung

$$x - x_0 = \pm \int_{y_0}^y \frac{ds}{\sqrt{2(E - U(s))}} =: T(y).$$

Der Ort selbst bestimmt sich dann durch die Umkehrfunktion zu $y(x) = T^{-1}(x - x_0)$.

Beispiel 1.16 Die Differentialgleichung des mathematischen Pendels ist $y'' = -\omega^2 \sin y$. Dabei ist y der Auslenkungswinkel und $\omega^2 = \frac{g}{L}$, mit g der Schwerebeschleunigung und L der Fadenlänge. Für kleine Winkel ist $\sin y \approx y$, und es wird die einfachere lineare Schwingungsdifferentialgleichung (harmonischer Oszillator) erhalten. Wir stellen aber nicht die Bedingung kleiner Winkel. Das Potential ergibt sich zu

$$U(y) = - \int_0^y ds (-\omega^2 \sin s) = \omega^2(1 - \cos y) = 2\omega^2 \sin^2 \frac{y}{2}.$$

Dieses entspricht der Gesamtenergie im maximalen Auslenkungswinkel $a = y(0)$, so daß sich folgende Lösung ergibt:

$$x = \frac{1}{2\omega} \int_y^a \frac{ds}{\sqrt{\sin^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{s}{2}}}$$

Es interessiert die Zeit $\frac{T}{2}$ einer halben Schwingung zum anderen Umkehrpunkt $y = -a$. Wir substituieren $\sin \frac{s}{2} = \sin \frac{a}{2} \sin u$, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos \frac{s}{2} ds &= \sin \frac{a}{2} \cos u du \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{s}{2}} ds = \sin \frac{a}{2} \sqrt{1 - \sin^2 u} du \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 u} ds = \sqrt{\sin^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{s}{2}} du. \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{\omega} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 u}} = \frac{2}{\omega} E(\sin \frac{a}{2}),$$

wobei $E(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}$ ein elliptisches Integral ist. Man findet $\lim_{a \rightarrow 0} E(\sin \frac{a}{2}) = \frac{\pi}{2}$ und damit $\lim_{a \rightarrow 0} T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Wir betrachten nun einige Beispiele für Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche sich aus wichtigen partiellen Differentialgleichungen ergeben, wenn gewisse Symmetrien vorliegen. Ihre Lösungen sind spezielle Polynome.

Die *Legendresche Differentialgleichung* auf dem Intervall $I =]-1, 1[$ ist gegeben durch

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Satz 1.21 *Das Legendresche Polynom n -ter Ordnung*

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n$$

ist Lösung der Legendreschen Differentialgleichung zum Parameter n .

Beweis. Der Vorfaktor ist hier irrelevant, er kommt von der Orthonormalitätseigenschaft der Legendreschen Polynome. Aus dem Pascalschen Dreieck folgt die Leibniz-Regel n -ter Ordnung

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (fg)(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f^{(j)}(x) g^{(n-j)}(x).$$

Wir betrachten die $(n+1)$ -ste Ableitung von $z(x) := (x^2 - 1)\frac{d}{dx}(x^2 - 1)^n = 2nx(x^2 - 1)^n$:

$$\begin{aligned} & \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left((x^2 - 1) \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^n \right) \\ &= \binom{n+1}{0} (x^2 - 1) \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} (x^2 - 1)^n + \binom{n+1}{1} 2x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^n + \binom{n+1}{2} 2 \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \\ &= (x^2 - 1) \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} (x^2 - 1)^n + 2(n+1)x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^n + n(n+1) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \\ &\equiv \binom{n+1}{0} 2nx \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^n + \binom{n+1}{1} 2n \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \\ &= 2nx \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^n + 2n(n+1) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \end{aligned}$$

Zusammenfassung der Terme liefert

$$0 = (1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x). \quad \square$$

Die Legendreschen Polynome treten bei der Lösung der sehr wichtigen partiellen Differentialgleichung

$$\Delta\psi + U(r)\psi = 0$$

in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) auf (Δ ist der Laplace-Operator). Beispiele sind die (zeitunabhängige) Schrödinger-Gleichung mit kugelsymmetrischen Potential (z.B. Wasserstoffatom). Der Ansatz $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ führt mit der Normierungsbedingung für die Wahrscheinlichkeit $\int_{\mathbb{R}^3} dx |\psi(r, \theta, \phi)|^2 = 1$ auf Lösungen, die im allgemeinen durch ganze Zahlen parametrisiert werden (Quantisierung der Energieniveaus). Man findet (bis auf Vorfaktoren) $\Theta_{l0}(\theta) = P_l(\cos \theta)$.

Die Legendresche Differentialgleichung ist durch die Legendreschen Polynome noch nicht vollständig gelöst, da gemäß der allgemeinen Theorie linearer Differentialgleichungen n -ter Ordnung eine zweite linear unabhängige Lösung benötigt wird. In den Übungen wird gezeigt, daß man diese zweite Lösung durch das folgende Reduktionsverfahren erhalten kann:

Satz 1.22 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ stetige Funktionen. Es sei $y_{(1)} : I \rightarrow \mathbb{K}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ und in einem Intervall $J \subset I$ gelte $y_{(1)}(x) \neq 0$ für alle $x \in J$. Dann erhält man auf*

J eine zweite linear unabhängige Lösung $y_{(2)} : J \rightarrow \mathbb{K}$ der Differentialgleichung durch den Ansatz $y_{(2)}(x) = u(x)y_{(1)}(x)$, wobei u dann eine nichtkonstante Lösung der Differentialgleichung

$$u'' + \left(2 \frac{y'_{(1)}(x)}{y_{(1)}(x)} + a(x) \right) u'(x) = 0$$

ist, die im ersten Schritt zu

$$u'(x) = \frac{1}{y_{(1)}^2(x)} \exp \left(- \int_{x_0}^x dt a(t) \right)$$

integriert werden kann.

Sehr ähnlich werden folgende Differentialgleichungen behandelt:

Beispiel 1.17 Die *Hermitesche Differentialgleichung* zum Parameter $n \in \mathbb{N}$ ist

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Eine Lösung ist das *Hermitesche Polynom* n -ter Ordnung

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}.$$

Es tritt auf als Lösung der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung für das Potential $U(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ eines harmonischen Oszillators.

Beispiel 1.18 Die *Laguerresche Differentialgleichung* zum Parameter $n \in \mathbb{N}$ ist

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Eine Lösung ist das *Laguerresche Polynom* n -ter Ordnung

$$L_n(x) := \frac{1}{n!} e^x \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^n e^{-x}).$$

Es tritt auf als Lösung der zweidimensionalen Schrödinger-Gleichung in Radialkoordinaten für das $U(x) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2$ eines harmonischen Oszillators.

Beispiel 1.19 Die *hypergeometrische Differentialgleichung* zu den 3 Parametern $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0, \quad x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}.$$

Eine Lösung ist gegeben durch die *hypergeometrische Funktion*

$$F \left(\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| x \right) := 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \cdot \frac{x^1}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Ist α oder β eine negative ganze Zahl $-n$ (und γ geeignet), dann bricht die Reihe ab, und $F\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{smallmatrix} \middle| x\right)$ wird ein Polynom n -ter Ordnung in x .

Durch die sehr allgemeine 3-parametrische Form lassen sich viele andere spezielle Funktionen durch hypergeometrische ausdrücken. Viele Integrale berechnen sich zu hypergeometrischen Funktionen, wichtig ist dabei die Identität

$$F\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{smallmatrix} \middle| x\right) = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 dt t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tx)^{-\alpha}.$$

Beispiel 1.20 Die *Besselsche Differentialgleichung* zum Parameter $p \in \mathbb{R}$ ist

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p}{x^2}\right)y = 0, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist zunächst $x \in \mathbb{R}_+^*$, jedoch kann man die Gleichung auf $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ausdehnen. Die Besselsche Differentialgleichung tritt auf bei zweidimensionalen Schwingungen und Wellen in Radialkoordinaten. Die Gleichung $\Delta u = -u$ in 2 Dimensionen liefert mit dem Ansatz $u(r, \phi) = f(r)e^{ip\phi}$ die Besselsche Differentialgleichung für $y(x) \mapsto f(r)$. Die Gleichung $\Delta u = -u$ entsteht z.B. aus der Wellengleichung $(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2})\psi$ mit dem Ansatz $\psi(r, \phi, t) = u(r, \psi)e^{it}$.

Die Lösungen der Besselschen Differentialgleichung heißen *Zylinderfunktionen*. Die einfachste ist die *Besselfunktion* (zum Parameter $p \in \mathbb{R}$)

$$J_p(x) = \frac{x^p}{2^p} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(p+k+1)}.$$

Eine zweite linear unabhängige Lösung ist die Neumannsche Funktion $N_p(x)$. Für $x \in \mathbb{C}$ sind die komplexen Linearkombinationen $H_p(x) = J_p(x) \pm iN_p(x)$ (Hankel-Funktionen) nützlich.

Es gibt nützliche Integraldarstellungen der Besselfunktion, z.B.

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(n\theta - x \sin \theta), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt $|J_n(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, was aus der Reihenformel nicht offensichtlich ist. Bestimmte Integrale mit Zylinderfunktionen sind elementar berechenbar (zumindest tabelliert). Ihre Bedeutung ist vergleichbar mit Sinus und Cosinus bzw. Exponentialfunktion. Die Nullstellen der Besselfunktion sind wichtig bei zweidimensionalen *Randwertproblemen*, z.B. bei Schwingungen einer am Rand eingespannten Membran.

2 Hilbert-Räume und Operatoren

Hilbert-Räume sind Banachräume mit Skalarprodukt. Sie verallgemeinern damit die (endlich-dimensionalen) euklidischen und unitären Vektorräume. Viele aus der endlich-dimensionalen Situation bekannte Strukturen lassen sich auf Hilbert-Räume übertragen. Operatoren auf Hilbert-Räumen verallgemeinern die Endomorphismen von euklidischen und unitären Vektorräumen.

2.1 Definition und Eigenschaften

Wie zuvor ist \mathbb{K} der Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 2.1 Sei X ein Vektorraum über \mathbb{K} . Ein *Skalarprodukt* auf X ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ mit

- i) $\langle w, \lambda u + \mu v \rangle = \lambda \langle w, u \rangle + \mu \langle w, v \rangle \quad \forall u, v, w \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
(*Linearität in der 2. Komponente*)
- ii) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} \quad \forall v, w \in X$ (*hermitesch*)
- iii) $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in X$ und $\langle v, v \rangle = 0$ genau dann, wenn $v = 0$
(*positiv definit*).

Achtung: In der mathematischen Literatur wird das Skalarprodukt als *linear in der ersten Komponente definiert*. Mit der hier gewählten physikalischen Konvention ergibt sich aus (i) und (ii)

$$\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle u, w \rangle + \overline{\mu} \langle v, w \rangle \quad \forall u, v, w \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Das Standardbeispiel eines Skalarprodukts ist $\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i$ auf \mathbb{K}^n , wenn $u = (u_1, \dots, u_n)$ und $v = (v_1, \dots, v_n)$. Das folgende Beispiel führt bereits über die unitären Vektorräume hinaus:

Beispiel 2.1 Es sei

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty \right\}.$$

Dann definiert

$$\langle f, g \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \overline{f(n)} g(n), \quad f, g \in \ell^2(\mathbb{N})$$

ein Skalarprodukt auf $\ell^2(\mathbb{N})$. Dabei wird verwendet, daß wegen $|\overline{f(n)} g(n)| = |f(n)| |g(n)| \leq \frac{1}{2}(|f(n)|^2 + |g(n)|^2)$ die unendliche Reihe existiert.

Beispiel 2.2 Es sei $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ der Vektorraum der stetigen (damit beschränkten) komplexwertigen Funktionen auf dem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dann definiert

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b dx \overline{f(x)} g(x), \quad f, g \in \mathcal{C}([a, b])$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{C}([a, b])$. Wegen der Stetigkeit von f folgt aus $\int_a^b dx |f(x)|^2 = 0$, daß $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.

Satz 2.1 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) *Es sei X ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann wird durch $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Norm auf X definiert. Insbesondere gilt die Ungleichung von Cauchy-Schwarz*

$$|\langle v, w \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 \quad \text{für alle } v, w \in X$$

mit Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis. Siehe Satz 1.2 aus dem letzten Semester. □

Damit ist das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ insbesondere stetig, denn es gilt

$$\begin{aligned} |\langle v, w \rangle - \langle v', w' \rangle| &= |\langle v - v', w \rangle - \langle v', w' - w \rangle| \\ &\leq |\langle v - v', w \rangle| + |\langle v', w' - w \rangle| \\ &\leq \|v - v'\| \|w\| + \|v'\| \|w' - w\|. \end{aligned}$$

Der folgende Satz liefert ein Kriterium, wann das Skalarprodukt aus der Norm zurückgewonnen werden kann:

Satz 2.2 (Parallelogrammgleichung) *Es sei X ein normierter Vektorraum. Es gibt genau dann ein stetiges Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ auf X , wenn das Parallelogramm-Gesetz gilt,*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + \|w\|^2 \quad \text{für alle } v, w \in X.$$

Beweis. Die Richtung (\Rightarrow) ist klar. Die Umkehrung ist eine sehr mühsame Rechnung (eine ganze Seite in Hirzebruch/Scharlau), daß

$$\langle v, w \rangle := \begin{cases} \frac{1}{2}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2) & \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 + i\|v + w\|^2 - i\|v - w\|^2) & \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

die Eigenschaften eines Skalarprodukts hat. □

Definition 2.2 Sei H ein Vektorraum über \mathbb{K} mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann heißt H ein *Prä-Hilbert-Raum*. Ist H vollständig, so heißt H *Hilbert-Raum*.

Beispiel 2.3 1) $H = \mathbb{K}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt ist ein Hilbert-Raum.

2) $\ell^2(\mathbb{N})$ aus Beispiel 2.1 ist ein Hilbert-Raum.

3) $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ aus Beispiel 2.2 ist *kein* Hilbert-Raum (Cauchy-Folgen stetiger Funktionen können gegen unstetige Funktion konvergieren).

2.2 Die L^p -Räume

Sehr wichtige Beispiele für Hilbert-Räume sind die Vektorräume der *quadrat-integrierbaren* Funktionen. Wir müssen dazu das Lebesgue-Integral ein wenig weiterentwickeln. Zunächst eine Zusammenfassung zum Lebesgue-Integral:

Definition 2.3 Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, falls es endlich viele paarweise disjunkte Quader Q_1, \dots, Q_k gibt, so daß

- i) Für jedes $1 \leq i \leq k$ ist die Einschränkung $f|_{Q_i}$ von f auf Q_i eine konstante Funktion.
- ii) $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus (\bigcup_{i=1}^k Q_i)$.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt *Lebesgue-integrierbar*, wenn es eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen gibt, so daß für die L^1 -Halbnorm gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_1 = 0$. Dann heißt $\int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} dx f_k(x)$ das *Lebesgue-Integral* von f .

Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Lebesgue-meßbar*, wenn seine charakteristische Funktion δ_X Lebesgue-integrierbar ist.

Eine wichtige Rolle spielen *Nullmengen*, das sind Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ mit Lebesgue-Maß Null. Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge. Eine Eigenschaft gilt *fast überall*, wenn die Menge der Punkte, an denen sie nicht gilt, eine Nullmenge ist.

Definition 2.4 Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt *Lebesgue-meßbar*, wenn sie fast überall Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen ist.

Einige Eigenschaften (ohne Beweis):

Satz 2.3 Für meßbare Funktionen f, g und $c \in \mathbb{R}$ sind auch $cf, f + g, |f|, fg, \max(f, g), \min(f, g), f_+, f_-$ meßbar.

Jede stetige Funktion und jede integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist meßbar.

Eine meßbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist genau dann integrierbar, wenn $|f|$ integrierbar ist.

Satz 2.4 Für $p \in \mathbb{R}_+^*$ sei

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} : f \text{ ist meßbar und } |f|^p \text{ ist integrierbar}\}.$$

Dann ist $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ ein Vektorraum.

Beweis. Klar ist, daß für $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Seien $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f + g$ meßbar und ebenso $|f + g|^p$. Weiter gilt

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq (2 \sup(|f|, |g|))^p \leq 2^p \sup(|f|^p, |g|^p).$$

Nach Voraussetzung sind $|f|^p$ und $|g|^p$ integrierbar, also ist auch $|f + g|^p$ integrierbar. \square

Für $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ sei

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} dx |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Das ist zunächst keine Norm, denn aus $\|f\|_p = 0$ folgt nur, daß $|f|^p = 0$ fast überall (damit $f = 0$ fast überall). Sei

$$\mathcal{N}^p(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) : \|f\|_p = 0\}$$

der Untervektorraum von $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ aller fast überall verschwindenden Funktionen und

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) / \mathcal{N}^p(\mathbb{R}^n)$$

der Quotientenraum, bestehend aus Äquivalenzklassen fast überall gleicher Funktionen aus $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Dann ist auch $\|\cdot\|_p$ auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ definiert, da $\int_{\mathbb{R}^n} dx |f(x)|^p = \int_{\mathbb{R}^n} dx |g(x)|^p$ wenn $f = g$ fast überall.

Satz 2.5 Für $p \geq 1$ ist $L^p(\mathbb{R}^n)$ zusammen mit $\|\cdot\|_p$ ein normierter Vektorraum, und insbesondere gilt die Minkowskische Ungleichung

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \text{für alle } f, g \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Für $p = 1$ haben wir das im letzten Semester erarbeitet. Für $p > 1$ verbleibt der Beweis der Dreiecksungleichung. Wir beweisen zunächst

Satz 2.6 (Höldersche Ungleichung) Es seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sowie $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und es gilt die Höldersche Ungleichung

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Beweis. (Wir dürfen hier die Dreiecksungleichung noch nicht verwenden!)

i) Wir zeigen zunächst $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ für alle $a, b \geq 0$. Das ist klar für $a = 0$ oder $b = 0$. Für festgehaltenes $a > 0$ bestimmen wir die lokalen Extrema der Funktion $F(b) := \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab$ für $b > 0$. Wegen $\frac{1}{q-1} = p-1$ und $p \cdot q = p+q$ gilt

$$\begin{aligned} 0 = F'(b) &= b^{q-1} - a \quad \Leftrightarrow \quad b = a^{p-1}, \\ F''(b) \Big|_{b=a^{p-1}} &= (q-1)a^{(p-1)(q-2)} = (q-1)a^{2-p} > 0. \end{aligned}$$

Somit gibt es ein lokales Minimum bei $b = a^{p-1}$. Dort gilt

$$F(b)|_{b=a^{p-1}} = \frac{a^p}{p} + \frac{a^{(p-1)q}}{q} - ab = a^p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \right) = 0.$$

ii) Für $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$ ist die jeweilige Funktion fast überall gleich Null und damit auch das Produkt fg , also gilt die Ungleichung. Sei also $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$. Wir bezeichnen mit \tilde{f}, \tilde{g} einen beliebigen Repräsentanten von f, g . Dann gilt punktweise

$$l(x) := \frac{|\tilde{f}(x)| |\tilde{g}(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|\tilde{f}(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|\tilde{g}(x)|^q}{\|g\|_q^q} =: r(x).$$

Die Funktion l der linken Seite ist meßbar, die Funktion r der rechten Seite integrierbar. Also gibt es eine Folge von Treppenfunktionen $(l_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $l = \lim_{k \rightarrow \infty} l_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf(l_k, r)$ fast überall. Da $|\inf(l_k, r)| \leq r$ integrierbar ist für alle k , ist nach dem Satz von Lebesgue auch l integrierbar. Somit gilt

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} = \int_{\mathbb{R}^n} dx \frac{|\tilde{f}(x)| |\tilde{g}(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} dx \frac{|\tilde{f}(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^n} dx \frac{|\tilde{g}(x)|^q}{\|g\|_q^q} = 1. \quad \square$$

Beweis der Minkowskischen Ungleichung. Seien jetzt $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $p > 1$. Sei $q > 1$ definiert durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt punktweise

$$|f + g|^p = |f + g|^{p-1} |f + g| \leq |f + g|^{p-1} |f| + |f + g|^{p-1} |g|.$$

Alle auftretenden Funktionen sind meßbar, und wegen $(|f + g|^{p-1})^q = |f + g|^p$ ist $|f + g|^{p-1} \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Nach der Hölderschen Ungleichung sind $|f + g|^{p-1} |f|$ und $|f + g|^{p-1} |g|$ integrierbar mit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} dx |f(x) + g(x)|^p &\leq \int_{\mathbb{R}^n} dx (|f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| + |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)|) \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} dx |f(x) + g(x)|^p \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} dx |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^n} dx |f(x) + g(x)|^p \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} dx |g(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Für $\|f + g\|_p = 0$ ist alles klar. Ist $\|f + g\|_p \neq 0$, dann können wir die Gleichung durch $\left(\int_{\mathbb{R}^n} dx |f(x) + g(x)|^p \right)^{\frac{1}{q}}$ dividieren, was wegen $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ die Minkowskische Ungleichung liefert. \square

Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, so daß ihre charakteristische Funktion δ_A meßbar ist, dann definieren wir $L^p(A)$ als die entsprechende Einschränkung, startend mit

$$\mathcal{L}^p(A) := \{f = f\delta_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} : f \text{ ist meßbar und } |f|^p \text{ ist integrierbar}\}$$

und Übergang zu den Äquivalenzklassen fast überall gleicher Funktionen. Wichtig ist auch die *Komplexifizierung* der L^p -Räume, d.h.

$$L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n) := \{[f] : f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ ist meßbar und } |f|^p \text{ ist integrierbar}\}.$$

Entsprechend definiert sich $L^p_{\mathbb{C}}(A)$. Wir werden die symbolische Unterscheidung zwischen $L^p_{\mathbb{C}}$ und L^p meist weglassen.

Wir führen auch noch den Raum $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ein, startend mit

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} : f \text{ ist meßbar und fast überall beschränkt}\}.$$

Eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ wird wie folgt definiert:

$$\|f\|_\infty := \inf\{c \in \mathbb{R} : \text{außerhalb einer Nullmenge gilt } |f(x)| < c\}.$$

Offenbar ist $\|f\|_\infty = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast überall. Der $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dann die Menge aller Äquivalenzklassen fast überall gleicher $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ -Funktionen, und zusammen mit $\|\cdot\|_\infty$ ein normierter Raum (die Dreiecksungleichung ist klar). Die Höldersche Ungleichung verallgemeinert sich wie folgt:

Satz 2.7 Für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Beweis. Das folgt sofort aus der Definition von $\|\cdot\|_\infty$. □

Satz 2.8 (Riesz-Fischer) Der normierte Vektorraum $L^p(\mathbb{R}^n)$ (bzw. $L^p(A)$ bzw. deren Komplexifizierung) ist vollständig für alle $p \geq 1$ und für $p = \infty$, also ein Banachraum. Insbesondere ist $L^2(\mathbb{R}^n)$ ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} dx \overline{f(x)} g(x), \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Beweis. Wir zeigen den Fall $p < \infty$.

i) Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, d.h. $0 \leq \|f_n - f_m\|_p < \epsilon$ für alle $m, n \geq N(\epsilon)$. Wegen $|\|f_n\|_p - \|f_m\|_p| \leq \|f_n - f_m\|_p < \epsilon$ ist dann auch $(\|f_n\|_p)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} . Insbesondere ist $\|f_n\|_p \leq M$ beschränkt für alle n , und damit ist $|f_n(x)| < \infty$ fast überall.

ii) Es sei $(f_{n_k})_{k=1,2,\dots}$ eine Teilfolge mit $n_1 < n_2 < \dots$ und $\|f_n - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$ für alle $n \geq n_k$. Dann gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p \leq 1$. Sei $g_k(x) := f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)$ und $G_n(x) := \sum_{k=1}^n |g_k(x)|$ sowie $G(x) := \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|$. Dabei ist G_n fast überall endlich nach i), während wir das für G jetzt zeigen: Mit $G_n^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx (G_n(x))^p = \|G_n\|_p^p \leq \left(\sum_{k=1}^n \|g_k\|_p \right)^p \leq 1.$$

Nach dem Satz von Beppo Levi ist die punktweise gebildete Grenzfunktion $G^p := \lim_{n \rightarrow \infty} G_n^p$ integrierbar, d.h. $\|G^p\|_1 = \|G\|_p^p < \infty$. Insbesondere ist $G(x)$

fast überall endlich. Also existiert fast überall punktweise der Limes $g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ mit absoluter Konvergenz der Reihe.

iii) Wir zeigen $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Zunächst ist g meßbar als Limes meßbarer Funktionen. Die Folge der Partialsummen $s_n := \left| \sum_{k=1}^n g_k \right|^p$ konvergiert fast überall punktweise gegen $|g|^p$ mit $|s_n| \leq |g|^p$ fast überall. Wegen

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx \left| \sum_{k=1}^n g_k(x) \right|^p = \left(\left\| \sum_{k=1}^n g_k \right\|_p \right)^p \leq \left(\sum_{k=1}^n \|g_k\|_p \right)^p \leq 1$$

sind die Integrale der Partialsummen s_n beschränkt. Nach dem Satz von Lebesgue ist dann $|g|^p$ integrierbar, also $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Damit ist $f := f_{n_1} - g = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

iv) Die Folge $|f - f_{n_k}|^p$ konvergiert für $k \rightarrow \infty$ fast überall gegen Null. Außerdem ist nach Abänderung auf einer möglichen Nullmenge $|f - f_{n_k}|^p \leq |g|^p$ für alle k , und $|g|^p$ ist integrierbar. Nach dem Satz von Lebesgue gilt dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} dx |f(x) - f_{n_k}(x)|^p = \int_{\mathbb{R}^n} dx \left(\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x) - f_{n_k}(x)|^p \right) = 0,$$

d.h. (f_n) konvergiert in der L^p -Norm gegen die punktweise gebildete Grenzfunktion $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. \square

Ist X ein Prä-Hilbert-Raum, so ist seine Vervollständigung $H := \overline{X}$ in kanonischer Weise ein Hilbert-Raum (der Beweis erfolgt über das Parallelogramm-Gesetz). Die Vervollständigung ist im wesentlichen eindeutig, d.h. wenn es zwei Vervollständigungen $j : X \rightarrow H$ und $\tilde{j} : X \rightarrow \tilde{H}$ gibt, so existiert ein isometrischer (normerhaltender) Isomorphismus $u : H \rightarrow \tilde{H}$ mit $\tilde{j} = u \circ j$.

Beispiel 2.4 Für $X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ ist

$$\begin{aligned} H &:= \overline{X} = L^2([a, b], \mathbb{C}) \\ &= \left\{ [f] : f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ ist meßbar und } \int_{[a, b]} dx |f(x)|^2 < \infty \right\} \end{aligned}$$

mit $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ fast überall $\Leftrightarrow \int_{[a, b]} dx |f(x) - g(x)|^2 = 0$.

Zu beachten ist, daß $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ zusammen mit der Supremumsnorm $\|f\| := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ein Banachraum ist, nicht jedoch mit der L^2 -Norm $\|f\|_2$.

2.3 Der Rieszsche Darstellungssatz

Wir erarbeiten zunächst einige Eigenschaften konvexer Teilmengen. Eine Teilmenge $A \subset V$ eines Vektorraums V heißt *konvex*, wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 \in A$.

Satz 2.9 Sei H ein Hilbert-Raum und $A \subset H$ eine nichtleere abgeschlossene (bezüglich der induzierten Norm) konvexe Teilmenge. Dann existiert zu jedem $v \in H$ genau ein $w \in A$ mit $\|v - w\| = \min_{a \in A} \|v - a\| =: d(v, A)$.

Beweis. Sei $\gamma := \inf_{a \in A} \|v - a\|$. Dann gibt es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen $a_n \in A$, so daß die Folge (γ_n) mit $\gamma_n := \|v - a_n\|$ gegen γ konvergiert. Wir zeigen mit der Parallelogrammgleichung, daß $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Wegen der Vollständigkeit konvergiert diese gegen ein $a \in H$, und wegen der Abgeschlossenheit von A gilt sogar $a \in A$.

$$\begin{aligned} \|a_m - a_n\|^2 &= \|(v - a_n) - (v - a_m)\|^2 \\ &= 2\|v - a_n\|^2 + 2\|v - a_m\|^2 - 4\|v - \frac{1}{2}(a_n + a_m)\|^2. \end{aligned}$$

Wegen Konvexität ist $\frac{1}{2}(a_n + a_m) \in A$ und deshalb $\gamma \leq \|v - \frac{1}{2}(a_n + a_m)\|^2 \leq \frac{1}{2}(\|v - a_n\| + \|v - a_m\|)$. Also konvergiert $\|v - \frac{1}{2}(a_n + a_m)\|^2$ gegen γ und $\|a_m - a_n\|^2$ gegen 0 für $m, n \rightarrow \infty$.

Sei $b \in A$ ein weiteres Element mit $\|v - b\| = \gamma$, dann liefert die Parallelogrammgleichung zusammen mit der Konvexität $\|a - b\| = 0$, also $a = b$. \square

Dabei heißt $d(v, A)$ der Abstand von v zu A . Insbesondere gibt es zu jedem $v \in H$ und jeden linearen Teilraum (Untervektorraum) $E \subset H$ (der automatisch konvex ist) ein $w \in E$ (das Lot von v auf E) mit $\|v - w\| = \min_{u \in E} \|v - u\| =: d(v, E)$. Wie in der linearen Algebra definieren wir:

Definition 2.5 Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein (Prä-) Hilbert-Raum.

- i) Zwei Vektoren $v, w \in H$ heißen *orthogonal* (bezeichnet mit $v \perp w$), wenn $\langle v, w \rangle = 0$.
- ii) Zwei Teilmengen $A, B \subset H$ heißen *orthogonal* (bezeichnet mit $A \perp B$), wenn $a \perp b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Ist $A \subset H$ eine nichtleere Teilmenge, so heißt $A^\perp := \{v \in H : v \perp A\}$ der Orthogonalraum von A in H .

Dabei ist A^\perp stets ein abgeschlossener linearer Teilraum für beliebiges $A \neq \emptyset$: Sei $v, w \in A^\perp$, dann ist $\langle a, \lambda v + \mu w \rangle = 0$ für alle $a \in A$. Ist $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen $v \in H$ konvergierende Folge von Vektoren $v_n \in A^\perp$, so folgt aus der Stetigkeit des Skalarprodukts $\langle v, a \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle v_n, a \rangle = 0$ für alle $a \in A$, also $v \in A^\perp$.

Für orthogonale Vektoren $v, w \in H$ mit $v \perp w$ gilt der *Satz des Pythagoras* $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Satz 2.10 Es sei H ein Hilbert-Raum, $E \subset H$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von H .

- i) Ist $w_v \in E$ das Lot eines beliebigen Vektors $v \in H$ auf E , so ist $v - w_v \in E^\perp$.

ii) $H = E \oplus E^\perp$, d.h. $H = E + E^\perp$ und $E \cap E^\perp = \{0\}$.

iii) Ist $v = w + u$ mit $w \in E$, $u \in E^\perp$, so ist w das Lot von v auf E und u das Lot von v auf E^\perp . Insbesondere ist die Zerlegung $v = w + u$ eindeutig.

Beweis. i) Sei $0 \neq w \in E$ beliebig und $\lambda := \frac{\langle v - w_v, w \rangle}{\|w\|^2} \in \mathbb{K}$. Dann bedeutet die Loteigenschaft $\|v - w_v\|^2 \leq \|v - w_v - \lambda w\|^2$. Andererseits ist

$$\begin{aligned} \|v - w_v - \lambda w\|^2 &= \|v - w_v\|^2 + |\lambda|^2 \|w\|^2 - \lambda \langle v - w_v, w \rangle - \bar{\lambda} \langle w, v - w_v \rangle \\ &= \|v - w_v\|^2 - |\lambda|^2 \|w\|^2, \end{aligned}$$

also $\lambda = 0$.

ii) Damit zerlegt sich ein beliebiger Vektor in $v = w_v + (v - w_v) \in E + E^\perp$. Ist $u \in E \cap E^\perp$, so ist $\langle u, u \rangle = 0$, also $u = 0$.

iii) Sei $v = w + u$ mit $w \in E$ und $u \in E^\perp$. Ferner sei $w_v \in E$ das Lot von v auf E und $u_v := v - w_v \in E^\perp$. Dann gilt $0 = v - v = w + u - (w_v + u_v) = (w - w_v) + (u - u_v)$, also $E \ni w - w_v = u_v - v \in E^\perp$, also $w = w_v$. \square

Definition 2.6 Sei H ein Hilbert-Raum und $E \subset H$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Die Abbildung $P_E : H \rightarrow E$ mit $P_E(v) := w_v$ (Lot von $v \in H$ auf E) heißt *orthogonale Projektion von H auf E* .

Aus Satz 2.10 folgt, daß $P_E : H \rightarrow E$ eine lineare Abbildung ist und daß $P_{E^\perp} = \text{id}_H - P_E$ die orthogonale Projektion auf E^\perp ist. Schließlich gilt $P_E \circ P_E = P_E$ und $P_E \circ (\text{id}_H - P_E) = 0$ (Nullabbildung).

Satz 2.11 Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über \mathbb{K} und

$$X' = \mathcal{B}(X, \mathbb{K}) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ ist linear und stetig}\}$$

der Dualraum. Dann ist X' zusammen mit der Operator-Norm

$$\|f\|_{op} := \sup_{v \in X, \|v\| \leq 1} |f(v)|$$

ein Banach-Raum.

Beweis. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$. Dann folgt für alle $v \in X$

$$|f_n(v) - f_m(v)| = |(f_n - f_m)(v)| \leq \|f_n - f_m\|_{op} \|v\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Also ist auch $(f_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} , die wegen der Vollständigkeit konvergiert gegen ein $f(v) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(v) \in \mathbb{K}$. Weiter gilt wegen der Linearität der f_n

$$f(\lambda v + \mu w) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\lambda v + \mu w) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(v) + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w) = \lambda f(v) + \mu f(w),$$

d.h. f ist linear.

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $\|f_n - f_m\|_{op} < \epsilon$ für alle $m, n \geq N$. Dann ist für alle $v \in X$ mit $\|v\| \leq 1$ und $n \geq N$

$$|f(v) - f_n(v)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(v) - f_n(v)| \leq \sup_{v \in X, \|v\| \leq 1} \{|f_m(v) - f_n(v)| : m \geq N\} < \epsilon .$$

Das ergibt $\|f - f_n\|_{op} := \sup_{v \in X, \|v\| \leq 1} |f(v) - f_n(v)| < \epsilon$, d.h. f_n konvergiert in der Operatornorm gegen f . Insbesondere ist $f - f_n$ stetig und somit auch $f = (f - f_n) + f_n$. \square

Daraus folgt, daß der Dualraum H' eines (Prä-) Hilbert-Raums H automatisch ein Banachraum ist. Ist H Hilbert-Raum, dann läßt sich H' konkret angeben:

Satz 2.12 (Riesz) *Sei H ein Hilbert-Raum, H' sein Dualraum und $j : H \rightarrow H'$ definiert durch $j(v)(w) := \langle v, w \rangle$. Dann gilt:*

- i) j ist antilinear, d.h. $j(\lambda v + \mu w) = \bar{\lambda}j(v) + \bar{\mu}j(w)$.
- ii) j ist isometrisch, also injektiv.
- iii) j ist surjektiv, also ein Anti-Isomorphismus. (gilt nicht für Prä-Hilbert-Räume!)

Beweis. i) folgt aus der Definition.

ii) Zu zeigen ist $\|j(v)\|_{op} = \|v\|$ für alle $v \in H$. Das ist klar für $v = 0$. Ansonsten ($v \neq 0$) betrachten wir

$$\|j(v)\|_{op} = \sup_{w \in H, \|w\| \leq 1} |j(v)(w)| = \sup_{w \in H, \|w\| \leq 1} |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| ,$$

also $\|j(v)\|_{op} \leq \|v\|$. Andererseits ist für die spezielle Wahl $j(v)\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \|v\|$ und damit $\|j(v)\|_{op} \geq \|v\|$.

iii) Sei $0 \neq f \in H'$ und sei $E := \ker f \subset H$. Dann ist E ein abgeschlossener linearer Teilraum von H , denn seien $v_n \in E$ und $v := \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \in H$, so konvergiert wegen der Stetigkeit von f die Folge $f(v_n) = 0$ gegen $f(v) = 0$. Da $f \neq 0$, gibt es Vektoren $0 \neq v \in H$ mit $f(v) \neq 0$, insbesondere ist $E \neq H$. Also gibt es $0 \neq v \in E^\perp$ mit $\|v\| = 1$. Sei $\lambda := f(v)$. Dann gilt für alle $w \in H$

$$f(f(w)v - f(v)w) = f(w)f(v) - f(v)f(w) = 0 ,$$

also $f(w)v - f(v)w \in E$ und weiter

$$0 = \langle v, f(w)v - f(v)w \rangle = f(w)\|v\|^2 - f(v)\langle v, w \rangle ,$$

also $f(w) = \lambda \langle v, w \rangle = \langle \bar{\lambda}v, w \rangle$ und damit $f = j(\bar{\lambda}v)$. \square

Insbesondere gilt in H' die Parallelogrammgleichung, d.h. H' ist selbst ein Hilbert-Raum. Damit ist jeder Hilbert-Raum reflexiv, d.h. $H'' := (H')' = H$.

2.4 Orthonormalbasen

Wir benötigen einen Summierbarkeitsbegriff für beliebige Index-Mengen.

Definition 2.7 Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in X$ heißt *summierbar* zu $v \in X$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $J_\epsilon \subset I$ gibt, so daß für jede endliche Teilmenge J mit $J_\epsilon \subset J \subset I$ gilt $\left\|v - \sum_{i \in J} v_i\right\| < \epsilon$. Damit ist $v \in X$ eindeutig bestimmt, und wir schreiben $v = \sum_{i \in I} v_i$.

Für $X = \mathbb{K}$ und $I = \mathbb{N}$ entspricht diese Summierbarkeit der absoluten Konvergenz.

Im weiteren bezeichne J (mit Indizes) immer endliche Teilmengen der Indexmenge I .

Satz 2.13 Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

- i) Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ ist genau dann summierbar, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein J_0 gibt, so daß $\left\|\sum_{i \in J'} v_i\right\| < \epsilon$ für alle J' mit $J' \cap J_0 = \emptyset$.
- ii) Die Familie $(v_i)_{i \in I}$ ist summierbar zu $v \in X$ genau dann, wenn höchstens abzählbar viele v_i ungleich Null sind und wenn für jede Abzählung v_1, v_2, \dots der v_i gilt $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n v_j$.
- iii) Ist $(\|v_i\|)_{i \in I}$ summierbar in \mathbb{R} , so ist $(v_i)_{i \in I}$ summierbar in X .

Beweis. i) (\Rightarrow) Die Familie sei summierbar. Nach Definition 2.7 gibt es ein J_0 mit $\left\|v - \sum_{i \in J} v_i\right\| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $J \supset J_0$. Dann gilt für J' mit $J' \cap J_0 = \emptyset$

$$\left\|\sum_{i \in J'} v_i\right\| = \left\|\sum_{i \in J' \cup J_0} v_i - \sum_{i \in J_0} v_i\right\| \leq \left\|\sum_{i \in J' \cup J_0} v_i - v\right\| + \left\|v - \sum_{i \in J_0} v_i\right\| < \epsilon.$$

(\Leftarrow) Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es ein J_n , so daß $\left\|\sum_{i \in J'_n} v_i\right\| < \frac{1}{n}$ für alle J'_n mit

$J'_n \cap J_n = \emptyset$. Sei $w_n := \sum_{i \in J_1 \cup \dots \cup J_n} v_i$, dann gilt für alle $m \geq n$

$$w_m - w_n = \sum_{i \in (J_{n+1} \cup \dots \cup J_m) \setminus (J_1 \cup \dots \cup J_n)} v_i.$$

Insbesondere ist $((J_{n+1} \cup \dots \cup J_m) \setminus (J_1 \cup \dots \cup J_n)) \cap J_n = \emptyset$, so daß $\|w_m - w_n\| < \frac{1}{n}$. Also bilden die (w_n) eine Cauchy-Folge, die wegen der Vollständigkeit gegen ein

Grenzelement $v = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ konvergiert. Für $\epsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{2}$ und $\|v - w_n\| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Dann gilt für jedes $J \supset J_1 \cup \dots \cup J_n$

$$\left\| \sum_{i \in J} v_i - v \right\| = \left\| \sum_{i \in J \setminus (J_1 \cup \dots \cup J_n)} v_i + \sum_{i \in (J_1 \cup \dots \cup J_n)} v_i - v \right\| \leq \left\| \sum_{i \in J \setminus (J_1 \cup \dots \cup J_n)} v_i \right\| + \|w_n - v\| < \epsilon$$

wegen $J_N \cap (J \setminus (J_1 \cup \dots \cup J_n)) = \emptyset$.

ii) Wir konstruieren die J_n wie oben. Dann ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ abzählbar. Sei $i \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. Dann gilt $\|v_i\| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $v_i = 0$. Alles weitere ist klar.

iii) Zu $\epsilon > 0$ gibt es J_ϵ mit $\sum_{i \in J_\epsilon} \|v_i\| < \epsilon$. Da J_ϵ endlich, gilt $\left\| \sum_{i \in J_\epsilon} v_i \right\| \leq \sum_{i \in J_\epsilon} \|v_i\| < \epsilon$. □

Ebenso zeigt man, daß Linearkombinationen summierbarer Familien wieder summierbar sind mit

$$\sum_{i \in I} (\lambda v_i + \mu w_i) = \lambda \sum_{i \in I} v_i + \mu \sum_{i \in I} w_i.$$

Außerdem gilt in Hilbert-Räumen $\langle \sum_{i \in I} v_i, w \rangle = \sum_{i \in I} \langle v_i, w \rangle$.

Definition 2.8 Sei H ein (Prä-) Hilbert-Raum. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in H$ heißt *Orthogonalsystem*, falls $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$. Gilt zusätzlich $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ für alle $i \in I$, dann heißt $(v_i)_{i \in I}$ ein *Orthonormalsystem*.

Beispiele sind eine Teilmenge der Standardbasis $(e_i)_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$ im \mathbb{K}^n mit dem kanonischen Skalarprodukt, aber auch

Beispiel 2.5 Für $H = \ell^2(\mathbb{N})$ und $k \in \mathbb{N}$ sei $e_k(n) := \delta_{kn}$. Dann ist für jede Teilmenge $I \subset \mathbb{N}$ die Familie $(e_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem.

Satz 2.14 Es sei H ein Hilbert-Raum und $(v_i)_{i \in I}$ ein Orthogonalsystem. Dann sind äquivalent:

- i) $(v_i)_{i \in I}$ ist summierbar in H .
- ii) $(\|v_i\|)_{i \in I}$ ist summierbar in \mathbb{R} .

Ist eine (damit beide) der Bedingungen erfüllt, so gilt der Satz des Pythagoras

$$\left\| \sum_{i \in I} v_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|v_i\|^2.$$

Beweis. Gilt i) oder ii), so folgt aus dem Satz des Pythagoras für endliche Teilmengen $\sum_{i \in J'} \|v_i\|^2 = \left\| \sum_{i \in J'} v_i \right\|^2 < \epsilon^2$ mit $J' \cap J_\epsilon = \emptyset$. Damit gilt die jeweils andere

Eigenschaft. Schließlich haben wir für $v := \sum_{i \in I} v_i$

$$\langle v, v \rangle = \left\langle \sum_{i \in I} v_i, v \right\rangle = \sum_{i \in I} \langle v_i, v \rangle = \sum_{i \in I} \left\langle v_i, \sum_{j \in I} v_j \right\rangle = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i \in I} \langle v_i, v_i \rangle .$$

□

Satz 2.15 Sei H ein Hilbert-Raum und $(v_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem in H . Dann gilt:

- i) $\sum_{i \in I} |\langle v_i, v \rangle|^2 \leq \|v\|^2$ für alle $v \in H$ (Besselsche Ungleichung).
- ii) $\sum_{i \in I} |\langle v_i, v \rangle|^2 = \|v\|^2$ genau dann, wenn $v = \sum_{i \in I} \langle v_i, v \rangle v_i$ (Parsevalsche Gleichung).

Beweis. i) Für alle endlichen Teilmengen $J \subset I$ gilt

$$0 \leq \left\| v - \sum_{i \in J} \langle v_i, v \rangle v_i \right\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{i \in J} |\langle v_i, v \rangle|^2 .$$

Also ist $\sum_{i \in J} |\langle v_i, v \rangle|^2$ beschränkt (und monoton wachsend bei Hinzunahme weiterer v_i), d.h. $\sum_{i \in I} |\langle v_i, v \rangle|^2$ existiert und erfüllt die Besselsche Ungleichung.

ii) Es gilt

$$\left\| v - \sum_{i \in I} \langle v_i, v \rangle v_i \right\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{i \in I} |\langle v_i, v \rangle|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \sum_{i \in I} \langle v_i, v \rangle v_i . \quad \square$$

Beispiel 2.6 Es sei $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und

$$\ell_{\mathbb{K}}^2(I) := \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{K} : \sum_{i \in I} |f(i)|^2 < \infty \right\} .$$

Dann ist $\ell_{\mathbb{K}}^2(I)$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \sum_{i \in I} \overline{f(i)} g(i)$ ein Hilbert-Raum (der Standard-Hilbert-Raum zur Indexmenge I).

Satz 2.16 (Fourier-Entwicklungssatz) Sei H ein Hilbert-Raum über \mathbb{K} und $(v_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem in H . Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- i) $(v_i)_{i \in I}$ ist maximales (oder vollständiges) Orthonormalsystem, d.h. ist $(w_j)_{j \in I'}$ ein Orthonormalsystem, das $(v_i)_{i \in I}$ enthält, so sind $(v_i)_{i \in I}$ und $(w_j)_{j \in I'}$ als Mengen gleich, d.h. es gibt eine Bijektion $\phi : I \rightarrow I'$ mit $v_i = w_{\phi(i)}$ für alle $i \in I$.

- ii) Gilt $v \perp v_i$ für alle $i \in I$, so ist $v = 0$.
- iii) Für alle $v \in H$ gilt $v = \sum_{i \in I} \langle v_i, v \rangle v_i$ (Fourier-Entwicklung).
- iv) Für alle $v, w \in H$ gilt $\langle v, w \rangle = \sum_{i \in I} \langle v, v_i \rangle \langle v_i, w \rangle$.
- v) Für alle $v \in H$ gilt $\|v\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle v_i, v \rangle|^2$ (Parsevalsche Gleichung).
- vi) Die Abbildung $F : H \rightarrow \ell_{\mathbb{K}}^2(I)$ mit $F(v) = f_v$ und $f_v(i) := \langle v_i, v \rangle$ ist ein isometrischer Isomorphismus.

Definition 2.9 Sei H ein Hilbert-Raum über \mathbb{K} und $(v_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem in H , das eine (und damit alle) der Eigenschaften i)-vi) aus Satz 2.16 erfüllt. Dann heißt $(v_i)_{i \in I}$ eine *Orthonormalbasis (ONB)* von H (manchmal auch *vollständiges Orthonormalsystem*).

Beweis von Satz 2.16. i) \Rightarrow ii) Sei $0 \neq v \in H$ mit $v \perp v_i$ für alle $i \in I$. Dann wäre $(v_i)_{i \in I} \cup \frac{1}{\|v\|}v$ ein größeres Orthonormalsystem. Widerspruch.

ii) \Rightarrow i) Sei $(w_j)_{j \in I'} \supset (v_i)_{i \in I}$ ein größeres ONS. Dann gibt es ein $w_j \neq 0$ mit $\langle w_j, v_i \rangle = 0$. Widerspruch.

ii) \Rightarrow iii) Sei $w := v - \sum_{i \in I} \langle v_i, v \rangle v_i$. Die Orthonormalität liefert $\langle v_j, w \rangle = 0$ für alle $j \in I$ und damit $w = 0$.

iii) \Rightarrow iv) Setze $v = \sum_{i \in I} \langle v_i, v \rangle v_i$ und $w = \sum_{i \in I} \langle v_i, w \rangle v_i$ und berechne $\langle v, w \rangle$.

iv) \Rightarrow v) Setze $w = v$.

v) \Rightarrow ii) Wäre $\langle v, v_i \rangle = 0$ für alle $i \in I$, so folgt $v = 0$ aus v).

iv) \Rightarrow vi) Ist $f_v(i) = \langle v_i, v \rangle$ für $v \in H$, so folgt

$$\langle f_v, f_w \rangle = \sum_{i \in I} \overline{f_v(i)} f_w(i) = \sum_{i \in I} \langle v, v_i \rangle \langle v_i, w \rangle = \langle v, w \rangle,$$

d.h. F ist isometrisch und damit injektiv. Sei $f \in \ell_{\mathbb{K}}^2(I)$ beliebig, so konvergiert $\sum_{i \in I} f(i)v_i$ in H nach Satz 2.14, d.h. es gibt ein $v \in H$ mit $v = \sum_{i \in I} f(i)v_i$. Dann ist $f(i) = \langle v_i, v \rangle \equiv f_v(i)$, also ist F surjektiv.

vi) \Rightarrow iv) Ist $v \mapsto f_v$ ein isometrischer Isomorphismus, so gilt

$$\langle v, w \rangle = \langle f_v, f_w \rangle = \sum_{i \in I} \overline{f_v(i)} f_w(i) = \sum_{i \in I} \langle v, v_i \rangle \langle v_i, w \rangle. \quad \square$$

Satz 2.17 Jeder Hilbert-Raum besitzt eine Orthonormalbasis, und je zwei solche Orthonormalbasen $(v_i)_{i \in I}$ und $(w_j)_{j \in I'}$ sind "gleich groß", d.h. es gibt eine Bijektion $\phi : I \rightarrow I'$.

Der Beweis wird leicher unter einer in vielen Anwendungen realisierten Zusatzbedingung:

Definition 2.10 Ein Hilbert-Raum H heißt *separabel*, wenn eine abzählbare Teilmenge $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, so daß $\text{span}(w_n : n \in \mathbb{N})$ dicht in H ist.

Zur Erinnerung: $\text{span}(w_n : n \in \mathbb{N})$ ist die Menge aller *endlichen* Linearkombinationen. $H_0 \subset H$ heißt dicht, wenn für den Abschluß gilt $\overline{H_0} = H$.

Beweis von Satz 2.17. Sei zunächst $H_0 := \text{span}(w_n : n \in \mathbb{N})$ mit $w_n \in H$ linear unabhängig, dann konstruiert man durch das *Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren* ein Orthonormalsystem $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $H_0 := \text{span}(v_n : n \in \mathbb{N})$. Sei dann $v \in H$ mit $\langle v_n, v \rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist auch $\langle v_n, u \rangle = 0$ für alle $u \in H_0$ (endliche Linearkombination der v_n). Ist nun H_0 dicht in H , dann gibt es eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Vektoren $u_k \in H_0$, die in H gegen v konvergiert. Wegen Stetigkeit des Skalarprodukts gilt in H

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle v, u_k \rangle = 0,$$

also ist nach ii) von Satz 2.16 die Familie $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis in H . \square

Insbesondere gilt:

Satz 2.18 *Jeder unendlich-dimensionale separable Hilbert-Raum über \mathbb{K} besitzt eine abzählbare Orthonormalbasis und ist damit isometrisch isomorph zu $\ell_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N})$.*
 \square

2.5 Fourier-Reihen

Man kann zeigen, daß die Menge der polynomialen Funktionen über einem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dicht in $\mathcal{C}([a, b])$ liegt. Damit ist $L^2([a, b])$ als $\|\cdot\|_2$ -Abschluß von $\mathcal{C}([a, b])$ separabel. Allgemein ist $L^2(U)$ separabel für beschränkte offene Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$. Das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren liefert dann für die Monome $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ gerade die Legendreschen Polynome (mit anderer Normierung) als Orthonormalbasis in $L^2([-1, 1])$.

Wir konstruieren eine Orthonormalbasis im $L^2([0, 2\pi])$ aus trigonometrischen Funktionen, die wichtig für vielen Anwendungen ist. Durch die Transformation

$$\phi : L^2([0, 2\pi]) \rightarrow L^2([a, b]), \quad (\phi f)(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{b-a}} f\left(\frac{2\pi}{b-a}(t-a)\right)$$

lassen sich die Resultate auf allgemeine Intervalle übertragen.

Definition 2.11 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *2 π -periodisch*, falls $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Ein *trigonometrisches Polynom* vom Grad $\leq N$ ist eine Funktion der Form $p(x) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{ikx}$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ für $k = -N, -N + 1, \dots, N$.

Mit $\mathcal{C}_{per}(\mathbb{K})$ werde der Vektorraum der stetigen 2π -periodischen \mathbb{K} -wertigen Funktionen bezeichnet. Offenbar ist jedes trigonometrische Polynom eine 2π -periodische Funktion. Jede 2π -periodische Funktion ist eindeutig festgelegt durch ihre Werte auf dem Intervall $[0, 2\pi]$, d.h. es gibt eine natürliche Bijektion zwischen 2π -periodischen Funktionen auf \mathbb{R} und Funktionen $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{K}$ mit $f(0) = f(2\pi)$.

Satz 2.19 Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $e_k \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{C})$ definiert durch $e_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$. Dann ist $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis in $L^2([0, 2\pi])$.

Zu beachten ist, daß die Funktionen aus $L^2([0, 2\pi])$ nicht 2π -periodisch sein müssen! Wir prüfen nur nach, daß die Familie $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem auf $L^2([0, 2\pi])$ ist:

$$\begin{aligned} \langle e_k, e_l \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} dx \overline{e^{ikx}} e^{ilx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx e^{i(l-k)x} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ \frac{1}{2\pi i(l-k)} (e^{2\pi i(l-k)} - 1) & \text{für } k \neq l \end{cases} = \delta_{kl}. \end{aligned}$$

Da $L^2([0, 2\pi])$ als separabler Hilbert-Raum isomorph zu $\ell^2(\mathbb{N})$ ist, ist $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ aus "Dimensions"gründen bereits eine Orthonormalbasis.

Definition 2.12 Für $f \in L^2([0, 2\pi])$ sei $\hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle e_k, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} dx f(x) e^{-ikx}.$$

Dann heißt $\hat{f}(k)$ der k -te *Fourier-Koeffizient* von f . Die Reihe $S(f) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}$

heißt die *Fourierreihe* von f . Für $n \in \mathbb{N}$ heißt $S_n(f) := \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx}$ das n -te *Fourier-Polynom* von f .

Als direkte Folgerung aus Satz 2.16 ergibt sich:

Satz 2.20 Sei $f \in L^2([0, 2\pi])$. Dann konvergiert die Reihe $S(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}$ bezüglich der L^2 -Norm gegen f . Insbesondere gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f) - f\|_2 = 0$. \square

Wichtig ist zu bemerken, daß es stetige 2π -periodische Funktionen $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{K})$ gibt, so daß $S_n(f)$ nicht für alle $x \in [0, 2\pi]$ punktweise gegen f konvergiert. Der Wert einer L^2 -Funktionen an einem Punkt ist gar nicht bestimmt, und für Orthonormalbasen war die Vollständigkeit des Hilbert-Raumes entscheidend. Natürlich folgt aus der L^2 -Konvergenz, daß $S_n(f)$ fast überall gegen f konvergiert.

Punktweise Konvergenz gilt für stetige stückweise n -mal stetig differenzierbare Funktionen $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{K})$, d.h. $f^{(n-1)} \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{K})$ und es gibt $0=t_0 < \dots < t_{N+1}=2\pi \in [0, 2\pi]$, so daß f auf der offenen Teilmenge $[0, 2\pi] \setminus \{t_0, \dots, t_{N+1}\} =]t_0, t_1[\cup]t_1, t_2[\cup \dots \cup]t_N, t_{N+1}[$ n -mal stetig differenzierbar ist. Dann ist f auf jedem der Teilintervalle quadratintegrierbar, also $f \in L^2([0, 2\pi])$.

Satz 2.21 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{K})$ eine stetige n -mal stückweise stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

- i) $\widehat{f^{(n)}}(k) = (-ik)^n \hat{f}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
- ii) $\|S_m(f) - f\|_\infty \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$, d.h. $(S_m f)_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f .

Beweis. i) Nach Induktion reicht die Betrachtung von $n = 1$. Mit partieller Integration berechnen wir

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} dx f'(x) e^{-ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^N \int_{t_l}^{t_{l+1}} dx f'(x) e^{-ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^N \left(f(t_l) e^{-ikt_l} - f(t_{l+1}) e^{-ikt_{l+1}} - \int_{t_l}^{t_{l+1}} dx f(x) (e^{-ikx})' \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^N ik \int_{t_l}^{t_{l+1}} dx f(x) e^{-ikx} = ik \hat{f}(k), \end{aligned}$$

da $f(t_0) = f(0) = f(2\pi) = f(t_{N+1})$.

ii) Nach der diskreten Hölderschen Ungleichung $\|fg\|_{\ell_1} \leq \|f\|_{\ell_2} \|g\|_{\ell_2}$ gilt

$$\|\hat{f}\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}(k)| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{ik} \widehat{f'}(k) \right| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{ik} \right|^2}_{=\frac{\pi^2}{6}} \underbrace{\sum_{l=1}^{\infty} |\widehat{f'}(l)|^2}_{\hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})} < \infty.$$

Also ist $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < \infty$, d.h. zu $\epsilon > 0$ gibt es $N(\epsilon)$, so daß für alle $m \geq l \geq N(\epsilon)$ gilt

$$\begin{aligned} \|S_m f - S_l f\|_\infty &:= \sup_{x \in [0, 2\pi]} \left| \sum_{k=-m}^m \hat{f}(k) e^{ikx} - \sum_{k=-l}^l \hat{f}(k) e^{ikx} \right| \\ &= \sup_{x \in [0, 2\pi]} \left| \sum_{l \leq |k| \leq m} \hat{f}(k) e^{ikx} \right| \leq \sum_{l \leq |k| \leq m} |\hat{f}(k)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Also ist $(S_m f)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{C}_{per}(\mathbb{K})$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Da $\mathcal{C}_{per}(\mathbb{K})$ vollständig ist bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, konvergiert $(S_m f)_{m \in \mathbb{N}}$ gegen $g \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{K})$ zunächst punktweise bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, damit aber auch bezüglich $\|\cdot\|_2$. Da $(S_m f)_{m \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_2$ gegen f konvergiert, gilt $f = g$ als L^2 -Funktionen, wegen der Stetigkeit von f, g gilt dann auch punktweise $f = g = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)$. \square

Beispiel 2.7 Gegen sei die Differentialgleichung $P_n(\frac{d}{dx})y = f(x)$ mit $P_n(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_0$, wobei $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{K})$. Gesucht ist eine 2π -periodische Lösung. Dann gilt für den k -ten Fourier-Koeffizienten der Differentialgleichung $P_n(ik)\hat{y}(k) = \hat{f}(k)$, d.h. die Lösung ist (bei Abwesenheit von Resonanzen)

$$y(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{f}(k)e^{ikx}}{P_n(ik)}.$$

Die Identität $f = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)$ für periodische stückweise stetig differenzierbare Funktionen dient zur Herleitung verschiedener Summenformeln:

Beispiel 2.8 Sei $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = (x - \pi)^2$. Dann ist für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx (x - \pi)^2 e^{-ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx (x - \pi)^2 \frac{d}{dx} \frac{e^{-ikx}}{-ik} \\ &= \frac{1}{2\pi} (x - \pi)^2 \frac{e^{-ikx}}{-ik} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx 2(x - \pi) \frac{e^{-ikx}}{-ik} \\ &= \frac{1}{ik\pi} \int_0^{2\pi} dx (x - \pi) \frac{d}{dx} \frac{e^{-ikx}}{-ik} = \frac{1}{ik\pi} (x - \pi) \frac{e^{-ikx}}{-ik} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{ik\pi} \int_0^{2\pi} dx \frac{e^{-ikx}}{-ik} \\ &= \frac{2}{k^2}. \end{aligned}$$

Außerdem ist $\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx (x - \pi)^2 = \frac{1}{6\pi} (x - \pi)^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi^2}{3}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} (x - \pi)^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} & \stackrel{x=0}{\Rightarrow} & \zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \\ & & \stackrel{x=\pi}{\Rightarrow} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

Ähnlich läßt sich die Zeta-Funktion aller positiven geraden Zahlen $\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$ berechnen.

Wir betrachten nun eine kontinuierliche Version der Fourier-Transformation. Diese ist formal analog zur diskreten, jedoch basieren entsprechenden die Formeln nicht auf Hilbert-Raum-Methoden, sondern auf Methoden in L^p -Räumen.

Für $k \in \mathbb{R}^n$ sei $e_k \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiert durch $e_k(x) := e^{i\langle k, x \rangle}$. Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt nach der Hölderschen Ungleichung $\|f e_k\|_1 \leq \|f\|_1 \|e_k\|_\infty < \infty$. Also existiert das Integral

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) e^{-i\langle k, x \rangle}, \quad f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n).$$

Nach Satz 3.26 aus dem letzten Semester ist \hat{f} stetig. Außerdem ist \hat{f} beschränkt mit $\sup_{k \in \mathbb{R}^n} |\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \|f\|_1$.

Definition 2.13 Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n)$ mit $(\mathcal{F}(f))(k) := \hat{f}(k)$ heißt die (kontinuierliche) Fourier-Transformation.

Zu beachten ist, daß $\mathcal{F}(f)$ nicht integrierbar sein muß. Zunächst die Verallgemeinerung von Satz 2.20:

Satz 2.22 (Umkehrformel) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ derart, daß $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dk \hat{f}(k) e^{i\langle k, x \rangle} \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n .$$

Beweis. Für $\lambda \in \mathbb{R}_+$ sei $F_\lambda(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dk \hat{f}(k) e^{i\langle k, x \rangle} e^{-\lambda^2 \langle k, k \rangle / 2}$. Da \hat{f} beschränkt ist, existiert das Integral für $\lambda > 0$. Dann gilt mit dem Transformationsatz

$$\begin{aligned} F_\lambda(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dk \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dy f(y) e^{-i\langle k, y \rangle} \right) e^{i\langle k, x \rangle} e^{-\lambda^2 \langle k, k \rangle / 2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dk \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dy f(y+x) e^{-i\langle k, y \rangle} e^{-\lambda^2 \langle k, k \rangle / 2} . \end{aligned}$$

Da $f(y+x)e^{-\lambda^2 \langle k, k \rangle / 2}$ über \mathbb{R}^{2n} integrierbar ist (Transformationsatz), ist nach Hölder auch $f(y+x)e^{-\lambda^2 \langle k, k \rangle / 2}$ über \mathbb{R}^{2n} integrierbar. Dann können wir nach Fubini die Integrale vertauschen. Mit $\int_{\mathbb{R}} dx e^{-x^2/2} e^{-itx} = \sqrt{2\pi} e^{-t^2/2}$ (Aufgabe 1 von Blatt 13 aus dem letzten Semester) und dem Transformationsatz ergibt sich

$$F_\lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dy f(y+x) \frac{e^{-\langle y, y \rangle / (2\lambda^2)}}{\lambda^n} .$$

Wir zeigen, daß für $\lambda \rightarrow 0$ die rechte Seite in der L^1 -Norm gegen $f(x)$ konvergiert. Andererseits konvergiert $\hat{f}(k) e^{i\langle k, x \rangle} e^{-\lambda^2 \langle k, k \rangle / 2}$ für $\lambda \rightarrow 0$ punktweise gegen $\hat{f}(k) e^{i\langle k, x \rangle}$ und $|\hat{f}(k) e^{i\langle k, x \rangle} e^{-\lambda^2 \langle k, k \rangle / 2}|$ ist beschränkt durch die integrierbare Funktion $|\hat{f}(k)|$. Nach dem Satz von Lebesgue gilt dann $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dk \hat{f}(k) e^{i\langle k, x \rangle} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} F_\lambda(x)$. Beides zusammen liefert die Behauptung.

Ausgangspunkt ist $\frac{1}{(2\pi\lambda^2)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-\langle y, y \rangle / (2\lambda^2)} = 1$. Damit gilt

$$f(x) - F_\lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dy (f(x) - f(x+y)) \frac{e^{-\langle y, y \rangle / (2\lambda^2)}}{\lambda^n} .$$

Zunächst sei f stetig mit kompaktem Träger $\text{supp}(f) \subset B_R(0)$. Dann ist f auch gleichmäßig stetig, d.h. zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $1 > \delta > 0$, so daß $|f(x) - f(x+y)| < \frac{\epsilon}{2v_n(B_{R+1}(0))}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in B_\delta(0)$. Das y -Integral wird zerlegt

- in ein Integral über $B_\delta(0)$: Dort ist $\text{supp}(f(x) - f(x+y)) \subset B_{R+1}(0)$, so daß das x -Integral durch $|f(x) - f(x+y)|$ und das Volumen von $B_{R+1}(0)$ abgeschätzt werden kann. Das y -Integral wird anschließend auf \mathbb{R}^n ausgedehnt und wird unabhängig von λ .
- in ein Integral über $\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)$. Dann ist $0 < e^{-\langle y,y \rangle / (2\lambda^2)} \leq e^{-\frac{\delta^2}{4\lambda^2}} e^{-\langle y,y \rangle / (4\lambda^2)}$.

$$\begin{aligned} \|f - F_\lambda\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy |f(x) - f(x+y)| \frac{e^{-\langle y,y \rangle / (2\lambda^2)}}{(2\pi\lambda^2)^{\frac{n}{2}}} =: I_1 + I_2, \\ I_1 &= \int_{B_{R+1}(0)} dx \int_{B_\epsilon(0)} dy |f(x) - f(x+y)| \frac{e^{-\langle y,y \rangle / (2\lambda^2)}}{(2\pi\lambda^2)^{\frac{n}{2}}} \\ &\leq v_n(B_{R+1}(0)) \sup_{x,x+y \in B_{R+1}(0)} |f(x) - f(x+y)| \int_{\mathbb{R}^n} dy \frac{e^{-\langle y,y \rangle / (2\lambda^2)}}{(2\pi\lambda^2)^{\frac{n}{2}}} < \frac{\epsilon}{2}, \\ I_2 &= \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} dy |f(x) - f(x+y)| \frac{e^{-\langle y,y \rangle / (2\lambda^2)}}{(2\pi\lambda^2)^{\frac{n}{2}}} \\ &\leq e^{-\frac{\delta^2}{4\lambda^2}} \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy (|f(x)| + |f(x+y)|) \frac{e^{-\langle y,y \rangle / (4\lambda^2)}}{(2\pi\lambda^2)^{\frac{n}{2}}} \\ &\leq e^{-\frac{\delta^2}{4\lambda^2}} 2\|f\|_1 2^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Wir können nun $\lambda(\delta)$ so klein wählen, daß $e^{-\frac{\delta^2}{4\lambda^2}} 2\|f\|_1 2^{\frac{n}{2}} < \frac{\epsilon}{2}$. Also gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\lambda(\epsilon) > 0$, so daß $\|f - F_{\lambda(\epsilon)}\|_1 < \epsilon$ für stetige Funktionen f mit kompaktem Träger, d.h. es gilt fast überall $f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} F_\lambda(x)$. Da integrierbare Funktionen bezüglich $\|\cdot\|_1$ durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger approximiert werden können, gilt die Aussage für alle $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. \square

Satz 2.23 *Ist $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, und es gilt $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}(f)\|_2$.*

Beweis. Sei f zunächst so, daß \hat{f} integrierbar ist und bezeichne $g := \hat{f}$. Dann gilt mit dem vorigen Satz und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} dk \overline{g(k)} \hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} dk \int_{\mathbb{R}^n} dx \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \overline{g(k)} e^{-ikx} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dx \overline{f(x)} f(x) \\ &= \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Nach Approximation folgt die Aussage für alle f . \square

2.6 Hermitesche Operatoren

Seien X, Y Banach-Räume, dann bezeichnet $\mathcal{B}(X, Y)$ den Raum der linearen stetigen Abbildungen von X nach Y . Mit der Operatornorm

$$\|A\|_{op} := \sup_{v \in X; \|v\|_X \leq 1} \|Av\|_Y$$

ist $\mathcal{B}(X, Y)$ automatisch ein Banachraum (Beweis wie in Satz 2.11). Für $X = Y$ sei $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$.

Satz 2.24 *Seien H, \tilde{H} Hilbert-Räume und $A : H \rightarrow \tilde{H}$ eine stetige lineare Abbildung. Dann existiert genau eine stetige lineare Abbildung $A^* : \tilde{H} \rightarrow H$ mit $\langle A^*v, w \rangle_H = \langle v, Aw \rangle_{\tilde{H}}$ für alle $w \in \tilde{H}$ und $v \in H$. Für diese gilt $\|A^*\|_{op} = \|A\|_{op}$.*

Beweis. Aus der Stetigkeit der Abbildung $w \mapsto Aw$ und der Stetigkeit des Skalarprodukts folgt, daß für alle $v \in H$ das lineare Funktional $w \mapsto \langle v, Aw \rangle_{\tilde{H}}$ auf \tilde{H} stetig ist. nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert genau ein Element $A^*v \in H$ mit $\langle v, Aw \rangle_{\tilde{H}} = \langle A^*v, w \rangle_H$. Die so konstruierte Abbildung $A^* : \tilde{H} \rightarrow H$ ist linear. Für die Operatornormen gilt mit $\|v\|_{\tilde{H}} \leq 1$ und Cauchy-Schwarz

$$\|A^*v\|_H^2 = \langle A^*v, A^*v \rangle_H = \langle v, AA^*v \rangle_{\tilde{H}} \leq \|v\|_{\tilde{H}} \|AA^*v\|_{\tilde{H}} \leq \|A\|_{op} \|A^*v\|_H,$$

also $\|A^*\|_{op} \leq \|A\|_{op}$. Durch analoge Abschätzung von $\|Aw\|_{\tilde{H}}$ beweist man die Umkehrung $\|A\|_{op} \leq \|A^*\|_{op}$. Daraus folgt die Stetigkeit von A^* . \square

Definition 2.14 Der durch Satz 2.24 charakterisierte Operator $A^* : \tilde{H} \rightarrow H$ heißt der zu $A : H \rightarrow \tilde{H}$ *adjungierte Operator*.

Seien $A, B : H \rightarrow \tilde{H}$ lineare stetige Operatoren und $\kappa, \lambda \in \mathbb{K}$, so folgt aus der Konstruktion

$$(\kappa A + \mu B)^* = \bar{\kappa} A^* + \bar{\mu} B^*, \quad (A^*)^* = A.$$

Ist \hat{H} ein weiterer Hilbert-Raum und $A \in \mathcal{B}(H, \tilde{H})$, $B \in \mathcal{B}(\tilde{H}, \hat{H})$, dann gilt $(B \circ A)^* = A^* \circ B^* \in \mathcal{B}(\hat{H}, H)$.

Satz 2.25 *Es sei H ein Hilbert-Raum, $A \in \mathcal{B}(H)$ und $v, w \in H$. Dann gilt*

- i) $|\langle v, Aw \rangle| \leq \|A\|_{op} \|v\| \|w\|$.
- ii) *Ist $|\langle v, Aw \rangle| \leq c \|v\| \|w\|$ für alle $v, w \in H$, dann ist $\|A\|_{op} \leq c$.*
- iii) $\|A\|_{op} = \sup\{|\langle v, Aw \rangle| : v, w \in H, \|v\| \leq 1, \|w\| \leq 1\}$.

Beweis. i) folgt aus Cauchy-Schwarz und der Definition der Operatornorm.

ii) Es gilt $\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle \leq c \|Av\| \|v\| \leq c \|A\|_{op} \|v\|^2$, also $\|Av\| \leq \sqrt{c \|A\|_{op} \|v\|}$ und damit $\|A\|_{op} := \sup_{v \in H, \|v\| \leq 1} \|Av\| \leq \sqrt{c \|A\|_{op}}$.

iii) Insbesondere gilt ii) auch für $\|v\| = \|w\| = 1$, d.h. ist $|\langle v, Aw \rangle| \leq c$ für alle $v, w \in H$ mit $\|v\| = \|w\| = 1$, dann ist $\|A\|_{op} \leq c$. Das ist erfüllt für $c := \sup\{|\langle v, Aw \rangle| : v, w \in H, \|v\| \leq 1, \|w\| \leq 1\}$. Die Umkehrung $c \leq \|A\|_{op}$ folgt aus i). \square

Definition 2.15 Es sei $A \in \mathcal{B}(H)$, und es gelte $A = A^*$, d.h. $\langle v, Aw \rangle = \langle Av, w \rangle$ für alle $v, w \in H$. Dann heißt A *selbstadjungiert* oder *hermitesch*.

Satz 2.26 In einem komplexen Hilbert-Raum H ist $A \in \mathcal{B}(H)$ genau dann hermitesch, wenn $\langle v, Av \rangle$ reell ist für alle $v \in H$.

Beweis. (\Rightarrow) $\langle v, Av \rangle = \langle Av, v \rangle = \overline{\langle v, Av \rangle}$.

(\Leftarrow) $\langle v, Av \rangle = \langle v, Av \rangle = \langle Av, v \rangle = \langle v, A^*v \rangle$, also $\langle v, (A - A^*)v \rangle = 0$ für alle $v \in H$. Die Behauptung folgt dann aus dem folgenden Lemma. \square

Lemma 1 Gilt in einem komplexen Hilbert-Raum $\langle v, Av \rangle = 0$ für alle $v \in H$, so folgt $A = 0$.

Beweis. Wir zeigen, daß dann auch $\langle v, Aw \rangle = 0$ für alle $v, w \in H$ gilt. Damit ist $\|A\|_{op} = 0$, also $A = 0$. Zunächst gilt

$$0 = \langle v + w, A(v + w) \rangle - \langle v - w, A(v - w) \rangle = 2\langle v, Aw \rangle + 2\langle w, Av \rangle.$$

Ersetzung von $v \mapsto iv$ liefert $0 = -2i\langle v, Aw \rangle + 2i\langle w, Av \rangle$ für alle $v, w \in H$ und damit $A = 0$. \square

Satz 2.27 Ist $A \in \mathcal{B}(H)$ selbstadjungiert, dann gilt $\|A\|_{op} = \sup_{v \in H, \|v\| \leq 1} |\langle v, Av \rangle|$.

Beweis. Es sei $a := \sup_{v \in H, \|v\| \leq 1} |\langle v, Av \rangle|$. Dann gilt $|\langle v, Av \rangle| \leq a\|v\|^2$ für alle $v \in H$. Nach Satz 2.25 ist $a \leq \|A\|_{op}$. Wegen

$$\langle (v + w), A(v + w) \rangle - \langle (v - w), A(v - w) \rangle = 2\langle v, Aw \rangle + 2\langle w, Av \rangle = 4\operatorname{Re}(\langle w, Av \rangle)$$

gilt mit der Parallelogrammgleichung für alle $v, w \in H$

$$\begin{aligned} 4\operatorname{Re}|\langle w, Av \rangle| &\leq |\langle (v + w), A(v + w) \rangle| + |\langle (v - w), A(v - w) \rangle| \\ &\leq a(\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2) = 2a(\|v\|^2 + \|w\|^2) \end{aligned}$$

und damit

$$\sup\{\operatorname{Re}|\langle w, Av \rangle| : v, w \in H, \|v\| \leq 1, \|w\| \leq 1\} \leq a.$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist das wegen 2.25.iii) die Behauptung. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ können wir durch Drehung $w \mapsto e^{i\alpha}w$ stets $\langle w, Av \rangle \in \mathbb{R}$ erreichen, so daß die Behauptung wieder aus 2.25.iii) folgt. \square

Für hermitesche Operatoren können wir eine Ordnungs-Relation definieren über

$$A \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle v, Av \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } v \in H, \quad A \geq B \quad \Leftrightarrow \quad A - B \geq 0.$$

Insbesondere gilt $A = B \Leftrightarrow (A \geq B \text{ und } B \geq A)$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist auch αid_H ein hermitescher Operator, so daß sich hermitescher Operatoren und reelle Zahlen vergleichen lassen. Dabei gilt $\|A\|_{op} \geq A \geq -\|A\|_{op}$. Wir können dann monotone und beschränkte Folgen hermitescher Operatoren betrachten:

Satz 2.28 *Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone und beschränkte Folge hermitescher Operatoren $A_n \in \mathcal{B}(H)$. Dann ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach-konvergent gegen einen hermiteschen Operator $A \in \mathcal{B}(H)$, d.h. für alle $v \in H$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n v = Av$.*

Beweis. Die Folge $\langle v, A_n v \rangle$ konvergiert in \mathbb{K} (Bolzano-Weierstraß). Aus den Polarisationsformeln (angegeben im Satz 2.2) und der Selbstadjungiertheit der A_n folgt, daß für alle $v, w \in H$ die Folge $\langle A_n v, w \rangle$ in \mathbb{K} konvergiert. Für jedes $v \in H$ ist die Zuordnung $w \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_n v, w \rangle$ ein lineares Funktional auf H . Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es zu jedem $v \in H$ genau ein $Av \in H$, so daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_n v, w \rangle = \langle Av, w \rangle$ für alle $w \in H$. Damit ist A linear, stetig und hermitesch. \square

2.7 Kompakte Operatoren

Viele Anwendungen führen auf sogenannte kompakte Operatoren, für die sich Eigenschaften zeigen lassen, die analog zur endlich-dimensionalen Situation sind.

Definition 2.16 Es sei X ein normierter Raum. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt *präkompakt*, wenn ihr Abschluß \bar{Y} kompakt ist.

Definition 2.17 Seien H, \tilde{H} Hilbert-Räume. Eine lineare Abbildung (= ein linearer Operator) $T : H \rightarrow \tilde{H}$ heißt *kompakt*, wenn das Bild einer in H beschränkten Teilmenge unter T präkompakt in \tilde{H} ist.

Äquivalent (ohne Beweis) dazu ist: Ein linearer Operator $T : H \rightarrow \tilde{H}$ heißt kompakt, wenn für jede Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Vektoren $v_n \in H$ mit $\|v_n\|_H \leq 1$ die Bildfolge $(Tv_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in \tilde{H} konvergente Teilfolge besitzt.

Die Menge der kompakten Operatoren $T : H \rightarrow \tilde{H}$ wird mit $\mathcal{K}(H, \tilde{H})$ bezeichnet, und $\mathcal{K}(H) := \mathcal{K}(H, H)$. Wichtig ist zu bemerken, daß die abgeschlossene Einheitskugel in unendlich-dimensionalen normierten Räumen nicht kompakt ist.

Klar ist, daß jeder kompakte Operator beschränkt (damit stetig) ist (2. Version der Kompaktheit), also gilt $\mathcal{K}(H, \tilde{H}) \subset \mathcal{B}(H, \tilde{H})$. In endlich-dimensionalen Hilbert-Räumen ist jeder lineare stetige Operator auch kompakt, da dann jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge kompakt ist. Völlig analog gilt:

Satz 2.29 Ist $T : H \rightarrow \tilde{H}$ linear und stetig und ist das Bild $T(H)$ endlich-dimensional, so ist T kompakt.

Beweis. Wegen Linearität und Stetigkeit ist das Bild jeder beschränkten Teilmenge von H unter T beschränkt. Ist es endlich-dimensional, so ist sein Abschluß kompakt. \square

Satz 2.30 Für jeden Hilbert-Raum H ist $\mathcal{K}(H)$ abgeschlossen in $\mathcal{B}(H)$ bezüglich $\|\cdot\|_{op}$, d.h. ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Operatoren mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\|_{op} = 0$, so gilt $A \in \mathcal{K}(H)$.

Beweis. Wir nutzen die Konstruktion über Folgen. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so daß $\|T - T_l\|_{op} < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $l \geq N(\epsilon)$. Sei $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Vektoren in H mit $\|v_n\| \leq 1$. Dann gibt es eine Teilfolge $(v_{n_k}^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}$, so daß $(T_1 v_{n_k}^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}$ in H konvergiert. Davon existiert eine Teilfolge $(v_{n_k}^{(2)})_{k \in \mathbb{N}}$, so daß auch $(T_2 v_{n_k}^{(2)})_{k \in \mathbb{N}}$ in H konvergiert. Schließlich erhält man eine Teilfolge $(v_{n_k}^{(l)})_{k \in \mathbb{N}}$ so daß $(T_m v_{n_k}^{(l)})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert für alle $1 \leq m \leq l$. Also gibt es zu $l \geq N(\epsilon)$ ein $K(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so daß $\|T_l v_{n_k}^{(l)} - T_l v_{n_m}^{(l)}\| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $k, m \geq K(\epsilon)$. Damit gilt

$$\|T v_{n_k}^{(l)} - T v_{n_m}^{(l)}\| \leq \|T v_{n_k}^{(l)} - T_l v_{n_k}^{(l)}\| + \|T_l v_{n_k}^{(l)} - T_l v_{n_m}^{(l)}\| + \|T v_{n_m}^{(l)} - T_l v_{n_m}^{(l)}\| < \epsilon.$$

Somit ist $(T v_{n_k}^{(l)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, die in H konvergiert. Damit ist T kompakt. \square

Analog ist $\mathcal{K}(H, \tilde{H})$ abgeschlossen in $\mathcal{B}(H, \tilde{H})$. Das folgende Satz charakterisiert eine wichtige Beispielklasse von kompakten Operatoren, nämlich die Theorie der Integralgleichungen.

Satz 2.31 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, so daß $L^2(\Omega)$ ein Hilbert-Raum ist. Sei $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Dann definiert

$$(kf)(x) := \int_{\Omega} dy K(x, y) f(y), \quad f \in L^2(\Omega)$$

einen kompakten Operator $k : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$.

Beweis. Zunächst existiert nach Fubini das Integral $\int_{\Omega} dx \left(\int_{\Omega} dy |K(x, y)|^2 \right)$, d.h. bis auf eine Nullmenge $N \subset \Omega$ ist $\int_{\Omega} dy |K(x, y)|^2 < \infty$ für alle $x \in \Omega \setminus N$. Damit existiert nach der Hölderschen Ungleichung das Integral $\int_{\Omega} dy |K(x, y) f(y)|$ für alle $x \in \Omega \setminus N$, und außerhalb einer Nullmenge gilt mit Cauchy-Schwarz

$$|(kf)(x)|^2 = \left| \int_{\Omega} dy K(x, y) f(y) \right|^2 \leq \int_{\Omega} dy |K(x, y)|^2 \int_{\Omega} dy |f(y)|^2.$$

Damit gilt

$$\|kf\|_2^2 = \int_{\Omega} dx |(kf)(x)|^2 \leq \|K\|_2^2 \|f\|_2^2,$$

d.h. $k \in \mathcal{B}(L^2(\Omega))$.

Die Funktion $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ ist Grenzwert einer Folge $(K_N)_{N \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen. Jede Treppenfunktion läßt sich schreiben als endliche Summe

$$K_N(x, y) = \sum_{j=1}^{r(N)} c_j \delta_{Q'_j}(x) \delta_{Q''_j}(y),$$

wobei $Q'_j, Q''_j \subset \Omega$ Quader sind, so daß die Quader $Q'_j \times Q''_j \subset \Omega \times \Omega$ paarweise disjunkt sind. Dann ist

$$\int_{\Omega} dy K_N(x, y) f(y) = \sum_{j=1}^{r(N)} c_j \delta_{Q'_j}(x) \int_{Q''_j} dy f(y)$$

nach weiterer Zerlegung in disjunkte Quader wieder eine Treppenfunktion $\sum_{l=1}^{s(N)} c_l \delta_{Q_l}(x)$. Also definiert jede Treppenfunktion K_N eine Abbildung $k_N : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}^{s(N)}$ durch $(k_N f)_l := c_l$, d.h. das Bild einer beliebigen beschränkten Teilmenge in $L^2(\Omega)$ unter k_N ist endlich-dimensional und beschränkt, sein Abschluß damit kompakt. Damit ist k_N ein kompakter Operator. Da $(K_N)_{N \in \mathbb{N}}$ fast überall punktweise gegen K konvergiert, konvergiert eine Teilfolge von $(k_N)_{N \in \mathbb{N}}$ auch in der Operatornorm gegen k . Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{K}(L^2(\Omega))$ ist somit k kompakt. \square

Satz 2.32 *Definiert $K(x, y)$ den kompakten Operator $k \in \mathcal{K}(L^2(\Omega))$ entsprechend Satz 2.31, so definiert $\overline{K(y, x)}$ den adjungierten Operator k^* . Gilt also $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ für alle $x, y \in \Omega$, dann ist k hermitesch.*

Beweis. Für $f, g \in L^2(\Omega)$ ist die Funktion $(x, y) \mapsto g(x)f(y)$ in $L^2(\Omega \times \Omega)$. Damit ist die Funktion $(x, y) \mapsto K(x, y)f(y)g(x)$ integrierbar, und nach Fubini gilt

$$\begin{aligned} \langle g, kf \rangle &= \int_{\Omega} dx \overline{g(x)} \int_{\Omega} dy K(x, y) f(y) = \int_{\Omega} dy \left(\int_{\Omega} dx K(x, y) \overline{g(x)} \right) f(y) \\ &= \int_{\Omega} dx \overline{\left(\int_{\Omega} dy \overline{K(y, x)} g(y) \right)} f(x) \stackrel{!}{=} \langle k^* g, f \rangle. \end{aligned} \quad \square$$

Damit lassen sich Integralgleichungen der Form

$$\lambda f(x) = \int_{\Omega} dy K(x, y) f(y),$$

welche sich z.B. aus Differentialgleichungen ergeben, auf das *Eigenwertproblem* $kf = \lambda f$ für kompakte selbstadjungierte Operatoren zurückführen. Insbesondere wird es nicht für alle λ eine Lösung geben!

2.8 Eigenwerte hermitescher Operatoren

Definition 2.18 Sei H ein Hilbert-Raum und $A \in \mathcal{B}(H)$. Dann heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ *Eigenwert* von A , falls es ein $0 \neq v \in H$ gibt mit $Av = \lambda v$. Der Raum $E_\lambda := \ker(A - \lambda \text{id})$ heißt der *Eigenraum* zum Eigenwert λ .

Satz 2.33 Ist $A \in \mathcal{B}(H)$ selbstadjungiert, dann gilt:

- i) Jeder Eigenwert von A ist reell.
- ii) Sind $\lambda \neq \mu$ Eigenwerte von A , so gilt $E_\lambda \perp E_\mu$.
- iii) Ist A zusätzlich kompakt und ist $\lambda \neq 0$ Eigenwert, so ist E_λ endlich-dimensional.

Beweis. i) Ist $0 \neq v$ Eigenvektor zu λ , so gilt

$$\lambda \|v\|^2 = \langle v, \lambda v \rangle = \langle v, Av \rangle = \langle Av, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \bar{\lambda} \|v\|^2.$$

ii) Ist $v \in E_\lambda$ und $w \in E_\mu$, so folgt

$$0 = \langle Av, w \rangle - \langle v, Aw \rangle = \langle \lambda v, w \rangle - \langle v, \mu w \rangle = (\bar{\lambda} - \mu) \langle v, w \rangle.$$

Wegen $\bar{\lambda} - \mu = \lambda - \mu \neq 0$ ist $w \perp v$.

iii) Da A kompakt ist, ist der Abschluß des Bildes jeder beschränkten Menge, z.B. der abgeschlossenen Einheitsvollkugel $B_1^\lambda(0) \subset E_\lambda$ in E_λ , kompakt. Andererseits ist $AB_1^\lambda(0) = B_{|\lambda|}^\lambda(0)$ die abgeschlossene Kugel in E_λ mit Radius $|\lambda|$. Diese ist genau dann kompakt, wenn E_λ endlich-dimensional ist. \square

Satz 2.34 Ist T ein selbstadjungierter Operator auf H , dann gilt $|\mu| \leq \|T\|_{op}$ für jeden beliebigen Eigenwert μ von T . Ist T zusätzlich kompakt, dann ist $\|T\|_{op}$ oder $-\|T\|_{op}$ Eigenwert von T .

Beweis. Ist μ Eigenwert und v ein Eigenvektor zu μ mit $\|v\| = 1$, so gilt $|\mu| = |\langle v, \mu v \rangle| = |\langle v, Tv \rangle| \leq \|T\|_{op}$ nach Satz 2.25.

Sei $T \neq 0$ und $|\mu| := \|T\|_{op}$. Nach Satz 2.27 gibt es eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Vektoren $v_n \in H$ mit $\|v_n\| = 1$, so daß $(\langle v_n, Tv_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\mu = \pm \|T\|_{op}$ konvergiert. Ist T kompakt, dann gibt es eine Teilfolge $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, so daß $(Tv_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $v \in H$ konvergiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|Tv_{n_k} - \mu v_{n_k}\|^2 = \|Tv_{n_k}\|^2 - \langle Tv_{n_k}, \mu v_{n_k} \rangle - \langle \mu v_{n_k}, Tv_{n_k} \rangle + \mu^2 \|v_{n_k}\|^2 \\ &\leq 2\mu^2 - 2\mu \langle v_{n_k}, Tv_{n_k} \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$Tv = T(\lim_{k \rightarrow \infty} Tv_{n_k}) = T(\lim_{k \rightarrow \infty} \mu v_{n_k}) = \mu \lim_{k \rightarrow \infty} (Tv_{n_k}) = \mu v. \quad \square$$

Satz 2.35 (Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren)

Es sei H ein Hilbert-Raum und $T \in \mathcal{B}(H)$ ein selbstadjungierter kompakter Operator. Sei $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \text{ ist Eigenwert von } T\}$. Dann gilt:

- i) Ist $0 \neq \lambda \in \Lambda$, dann ist $E_\lambda := \ker(T - \lambda \text{id}_H)$ endlich-dimensionaler linearer Teilraum von H . Ferner gilt $E_\lambda \perp E_\mu$ für alle $\lambda \neq \mu \in \Lambda$.
- ii) Λ ist eine endliche oder abzählbar unendliche Menge. Ist Λ abzählbar unendlich, dann gibt es eine Abzählung $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ von $\Lambda \setminus \{0\}$ mit $\|T\|_{op} = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = 0$.
- iii) $H = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ und $T = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda P_\lambda$, wobei $P_\lambda : H \rightarrow E_\lambda$ die orthogonale Projektion auf E_λ ist. Ist Λ abzählbar unendlich, so gilt $T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_{\lambda_n}$.
- iv) H besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von T , wobei höchstens abzählbar viele Basiselemente zu Eigenvektoren aus $\Lambda \setminus \{0\}$ gehören.

Beweis. i) ist Satz 2.33.

ii) Wir zeigen: Für $\epsilon > 0$ ist $\Lambda_\epsilon := \{\lambda \in \Lambda : |\lambda| \geq \epsilon\}$ eine endliche Menge. Wegen $\Lambda \setminus \{0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_{\frac{1}{n}}$ folgt dann, daß $\Lambda \setminus \{0\}$ abzählbar ist. Angenommen, es gibt ein $\epsilon > 0$, so daß Λ_ϵ eine unendliche Menge ist. Dann gibt es eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Eigenvektoren $v_n \in H$ mit $\|v_n\| = 1$ zu den (verschiedenen) Eigenwerten λ_n mit $|\lambda_n| \geq \epsilon$. Da T kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so daß $\lim_{k \rightarrow \infty} T v_{n_k} =: v \in H$. Wegen $\|T v_{n_k}\| = \lambda_{n_k} > \epsilon$ ist $v \neq 0$. Nach der Besselschen Ungleichung gilt $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v_{n_k}, v \rangle|^2 \leq \|v\|^2$, also konvergiert die Folge $(|\langle v_{n_k}, v \rangle|)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen 0. Damit erhalten wir aus der Stetigkeit des Skalarprodukts

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \left\langle \lim_{k \rightarrow \infty} T v_{n_k}, v \right\rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle T v_{n_k}, v \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k} \langle v_{n_k}, v \rangle = 0$$

wegen $|\lambda_{n_k}| \leq \|T\|_{op}$. Widerspruch.

iii) Sei $\tilde{H} := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \subset H = \tilde{H} \oplus \tilde{H}^\perp$. Wir zeigen $\tilde{H}^\perp = \{0\}$. Wegen $T E_\lambda \subset E_\lambda$ ist $T \tilde{H} \subset \tilde{H}$. Da T hermitesch ist, ist $T \tilde{H}^\perp \subset \tilde{H}^\perp$, denn sei $v \in \tilde{H}$ und $w \in \tilde{H}^\perp$, dann gilt $\langle T w, v \rangle = \langle w, T v \rangle = 0$. Sei nun $\tilde{T} := T|_{\tilde{H}^\perp} : \tilde{H}^\perp \rightarrow \tilde{H}^\perp$ die Einschränkung. Wegen der Abgeschlossenheit von \tilde{H}^\perp ist \tilde{T} ein kompakter Operator, der nach Satz 2.34 mindestens einen Eigenwert μ hat, d.h. es gibt einen linearen Teilraum $\{0\} \neq \tilde{E}_\mu \subset \tilde{H}^\perp$. Dann ist aber μ auch Eigenwert von $T : H \rightarrow H$, d.h. $\tilde{E}_\mu \subset \tilde{H}$ im Widerspruch zu $\tilde{H} \cap \tilde{H}^\perp = \{0\}$.

Somit gibt es zu $v \in H$ eine eindeutige Zerlegung $v = \sum_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda v$. Damit folgt

$$T v = T \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda \right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} T v_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda P_\lambda v = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda P_\lambda \right) v.$$

Man zeigt, daß $\sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda P_\lambda$ auch in der Operatornorm gegen T konvergiert.

iv) Ist $\mathcal{B}_\lambda = \{v_1^{(\lambda)}, \dots, v_{r_\lambda}^{(\lambda)}\}$ Orthonormalbasis von E_λ für $0 \neq \lambda \in \Lambda$ und $\mathcal{B}_0 = \{v_i : i \in I\}$ eine Orthonormalbasis für E_0 im Fall $0 \in \Lambda$, so ist $\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda$ eine Orthonormalbasis von H aus Eigenvektoren von T . \square

Der Spektralsatz hat wichtige Anwendungen. Zunächst ist zu bemerken, daß die Eigenwerte eines kompakten selbstadjungierten Operators diskret sind. Die Integralgleichung $\lambda f_\lambda(x) = \int_\Omega dy K(x, y) f_\lambda(y)$ für $f_\lambda \in L^2(\Omega)$ und $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ hat damit nur abzählbar viele diskrete Lösungen für λ , und für $\lambda \neq 0$ ist der Eigenraum der Lösungsfunktionen f_λ endlich-dimensional (die Entartung ist endlich).

Eine weitere wichtige Anwendung ist der *Funktionalkalkül* für kompakte selbstadjungierte Operatoren $T = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda P_\lambda$. Ist $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ eine beschränkte Funktion, so werden durch

$$f(T) := \sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda) P_\lambda$$

Funktionen des kompakten Operators T definiert. Interessante Beispiele sind $|T|$, $\sqrt{|T|}$ oder e^{iT} . Beliebige solcher Funktionen $f(T), g(T)$ kommutieren miteinander.

2.9 Sturmische Randwertaufgaben

Wir betrachten nun gewöhnliche lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung, in denen im Gegensatz zum Teil 1 nicht die Anfangsbedingungen für Ort $y(x_0)$ und Geschwindigkeit $y'(x_0)$ zur Zeit x_0 vorgegeben sind, sondern Kombinationen aus Ort und Geschwindigkeit zu verschiedenen Zeiten x_0, x_1 . Beispiele (mit anderen Bezeichnungen) sind Schwingungen eingespannter Saiten.

Definition 2.19 Es sei $Ly := (py)'+ qy$ für stetige Funktionen $p, q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, außerdem sei p stetig differenzierbar und $p(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Sei $R_a(y) := \alpha_1 y(a) + \alpha_2 p(a) y'(a)$ und $R_b(y) := \beta_1 y(b) + \beta_2 p(b) y'(b)$ für $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\{ Ly = 0, \quad R_a(y) = 0, \quad R_b(y) = 0 \} \quad (\text{RWA})$$

eine *homogene Sturmische Randwertaufgabe* auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\rho_a, \rho_b \in \mathbb{R}$, dann heißt

$$\{ Ly = f, \quad R_a(y) = \rho_a, \quad R_b(y) = \rho_b \} \quad (\text{iRWA})$$

eine *inhomogene Sturmische Randwertaufgabe* auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Die Randbedingungen werden als *nicht ausgeartet* vorausgesetzt, d.h. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ und $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

Es sei bemerkt, daß die Darstellung $Ly := (py')' + qy$ keine echte Einschränkung ist. Startet man mit $\tilde{L}y = y'' + a_1y' + a_0y$, dann genügt es, $p(x) := \exp\left(\int_a^x dt a_1(x)\right) \neq 0$ und $q(x) = a_0(x)p(x)$ zu setzen.

Satz 2.36 Sei $(y_{(1)}, y_{(2)})$ ein (reelles) Fundamentalsystem der gewöhnlichen Differentialgleichung $Ly = 0$.

- i) Die homogene Randwertaufgabe (RWA) hat genau dann eine nichttriviale Lösung $y = y(x)$, wenn

$$\Delta(y_{(1)}, y_{(2)}) := \det \begin{pmatrix} R_a(y_{(1)}) & R_a(y_{(2)}) \\ R_b(y_{(1)}) & R_b(y_{(2)}) \end{pmatrix} = 0.$$

- ii) Die inhomogene Randwertaufgabe (iRWA) ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $\Delta(y_{(1)}, y_{(2)}) \neq 0$.

Also: Entweder besitzt $\{Ly = 0, R_a(y) = 0, R_b(y) = 0\}$ eine Lösung $y \neq 0$, oder $\{Ly = f, R_a y = \rho_a, R_b y = \rho_b\}$ ist eindeutig lösbar.

Beweis. i) Es sei

$$A := \begin{pmatrix} R_a(y_{(1)}) & R_a(y_{(2)}) \\ R_b(y_{(1)}) & R_b(y_{(2)}) \end{pmatrix}.$$

Ist $y(x)$ Lösung von (RWA), so gilt insbesondere $y = c_1 y_{(1)} + c_2 y_{(2)}$ und damit $R_i(y) = c_1 R_i(y_{(1)}) + c_2 R_i(y_{(2)})$ mit $i \in \{a, b\}$. Also:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_a(y) \\ R_b(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_a(y_{(1)}) & R_a(y_{(2)}) \\ R_b(y_{(1)}) & R_b(y_{(2)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ existiert genau dann, wenn $\det A = \Delta(y_{(1)}, y_{(2)}) = 0$.

ii) Ist \tilde{y} eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $Ly = f$ so ist jede Lösung von (iRWA) von der Form $y = \tilde{y} + c_1 y_{(1)} + c_2 y_{(2)}$. Damit gilt

$$\begin{pmatrix} \rho_a \\ \rho_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_a(y) \\ R_b(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_a(\tilde{y}) \\ R_b(\tilde{y}) \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_a - R_a(\tilde{y}) \\ \rho_b - R_b(\tilde{y}) \end{pmatrix}.$$

Eine eindeutige Lösung $(c_1, c_2)^t$ existiert genau dann, wenn A invertierbar ist. \square

Wir betrachten die folgende Menge zweimal stetig differenzierbarer Funktionen mit vorgegebenen Randbedingungen:

$$\mathcal{R}_{\rho_a, \rho_b} := \{g \in \mathcal{C}^2([a, b]) : R_a(g) = \rho_a, R_b(g) = \rho_b\}.$$

Wenn (RWA) nur die triviale Lösung $y = 0$ besitzt, dann ist die Abbildung $L : \mathcal{R}_{\rho_a, \rho_b} \rightarrow \mathcal{C}([a, b])$ (die g in Lg abbildet) bijektiv. Denn zu $f \in \mathcal{C}([a, b])$ gibt es genau ein $g \in \mathcal{R}_{\rho_a, \rho_b}$ mit $Lg = f$. Wir konstruieren die Umkehrabbildung $T = L^{-1} : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathcal{R}_{\rho_a, \rho_b}$ und zeigen, daß sie sich zu einem kompakten Operator $T : L^2([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}([a, b])$ fortsetzen läßt.

Lemma 2 Es sei $\{Ly = (py')' + qy = 0, R_a(y) = 0, R_b(y) = 0\}$ eine homogene Randwertaufgabe, die nur die triviale Lösung $y = 0$ besitzt. Dann existiert ein reelles Fundamentalsystem $(y_{(1)}, y_{(2)})$ für $Ly = 0$ mit $R_a(y_{(1)}) = R_b(y_{(2)}) = 0$ und $p(x)W(x) = 1$, wobei $W(x) = \det \begin{pmatrix} y_{(1)}(x) & y_{(2)}(x) \\ y'_{(1)}(x) & y'_{(2)}(x) \end{pmatrix} \neq 0$ die Wronski-Determinante ist.

Beweis. Sei $(z_{(1)}, z_{(2)})$ ein beliebiges Fundamentalsystem und $A := \begin{pmatrix} R_a(z_{(1)}) & R_a(z_{(2)}) \\ R_b(z_{(1)}) & R_b(z_{(2)}) \end{pmatrix}$ mit $\det A \neq 0$ nach Voraussetzung. Wir setzen

$$\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} =: C = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} y_{(1)} \\ y_{(2)} \end{pmatrix} := C^t \begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 z_{(1)} + c_2 z_{(2)} \\ d_1 z_{(1)} + d_2 z_{(2)} \end{pmatrix}.$$

Da C invertierbar ist, ist $(y_{(1)}, y_{(2)})$ ein Fundamentalsystem, und es gilt $R_a(y_{(1)}) = c_1 R_a(z_{(1)}) + c_2 R_a(z_{(2)}) = (AC)_{11} = 0$ und $R_b(y_{(2)}) = d_1 R_a(z_{(1)}) + d_2 R_a(z_{(2)}) = (AC)_{22} = 0$.

Mit $pW = p(y_{(1)}y'_{(2)} - y_{(2)}y'_{(1)})$ gilt

$$(pW)' = y_{(1)}(py'_{(2)})' - y_{(2)}(py'_{(1)})' = y_{(1)}(-qy_{(2)}) - y_{(2)}(-qy'_{(1)}) = 0,$$

d.h. $0 \neq p(x)W(x) = c = \text{const.}$ Skalierung $y_{(1)} \mapsto \frac{1}{c}y_{(1)}$ liefert die Behauptung. \square

Definition 2.20 Es sei $\{Ly = 0, R_a(y) = 0, R_b(y) = 0\}$ eine homogene Randwertaufgabe, die nur die triviale Lösung $y = 0$ besitzt, und $(y_{(1)}, y_{(2)})$ ein Fundamentalsystem wie in Lemma 2.9. Dann heißt die durch

$$G(x, t) := \begin{cases} y_{(1)}(x)y_{(2)}(t) & \text{für } x \leq t \\ y_{(2)}(x)y_{(1)}(t) & \text{für } x \geq t \end{cases}$$

definierte Abbildung $G : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die *Greensche Funktion* des Randwertproblems (RWA).

Wir können nun die Umkehrabbildung L^{-1} angeben:

Satz 2.37 Sei $G : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Greensche Funktion zum Randwertproblem $\{Ly = 0, R_a(y) = 0, R_b(y) = 0\}$ (das nur die triviale Lösung habe). Ist $f \in \mathcal{C}([a, b])$, dann ist

$$y(x) = (T_G f)(x) := \int_a^b dt G(x, t)f(t)$$

die eindeutige zweimal stetig differenzierbare Lösung des Randwertproblems $\{Ly = f, R_a(y) = 0, R_b(y) = 0\}$, d.h. $T_G : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathcal{R}_{0,0}$ ist die Umkehrabbildung zu $L : \mathcal{R}_{0,0} \rightarrow \mathcal{C}([a, b])$.

Beweis. Für festes t ist $x \mapsto G(x, t)$ stetig. Da $y_{(i)}$ stetig und beschränkt auf $[a, b]$ ist, ist $T_g f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Auf den beiden Teilquadrern $Q_1 := \{(x, t) \in [a, b]^2 : x \leq t\}$ und $Q_2 := \{(x, t) \in [a, b]^2 : x \geq t\}$ ist G in x -Richtung zweimal stetig partiell differenzierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\int_a^x dt y_{(2)}(x) y_{(1)}(t) f(t) + \int_x^b dt y_{(1)}(x) y_{(2)}(t) f(t) \right) \\ &= y'_{(2)}(x) \int_a^x dt y_{(1)}(t) f(t) + y_{(2)}(x) y_{(1)}(x) f(x) \\ &\quad + y'_{(1)}(x) \int_x^b dt y_{(2)}(t) f(t) - y_{(1)}(x) y_{(2)}(x) f(x) \\ &= y'_{(2)}(x) \int_a^x dt y_{(1)}(t) f(t) + y'_{(1)}(x) \int_x^b dt y_{(2)}(t) f(t) = \int_a^b dt \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) f(t) . \end{aligned}$$

Völlig analog berechnen wir

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{d}{dx} \left(\int_a^x dt y'_{(2)}(x) y_{(1)}(t) f(t) + \int_x^b dt y'_{(1)}(x) y_{(2)}(t) f(t) \right) \\ &= y''_{(2)}(x) \int_a^x dt y_{(1)}(t) f(t) + y'_{(2)}(x) y_{(1)}(x) f(x) \\ &\quad + y''_{(1)}(x) \int_x^b dt y_{(2)}(t) f(t) - y'_{(1)}(x) y_{(2)}(x) f(x) \\ &= \int_a^b dt \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, t) f(t) + \frac{f(x)}{p(x)} , \end{aligned}$$

da $W = y_{(1)} y'_{(2)} - y_{(2)} y'_{(1)} = \frac{1}{p}$. Insbesondere ist y'' stetig. Damit ergibt sich die Differentialgleichung zu

$$\begin{aligned} (Ly)(x) &= p(x) y''(x) + p'(x) y'(x) + q(x) y(x) \\ &= f(x) + \int_a^x dt \left(p(x) y''_{(2)}(x) + p'(x) y'_{(2)}(x) + q(x) y_{(2)}(x) \right) y_{(1)}(t) f(t) \\ &\quad + \int_x^b dt \left(p(x) y''_{(1)}(x) + p'(x) y'_{(1)}(x) + q(x) y_{(1)}(x) \right) y_{(2)}(t) f(t) \\ &= f(x) . \end{aligned}$$

Außerdem gilt $R_a(y) = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 p(a) y'(a) = \int_a^b dt R_a(y_{(1)}) y_{(2)}(t) f(t) = 0$ und

$$R_b(y) = \beta_1 y(b) + \beta_2 p(b) y'(b) = \int_a^b dt R_b(y_{(2)}) y_{(1)}(t) f(t) = 0. \quad \square$$

Erweitert man $T_G f$ auf $f \in L^2([a, b])$, dann ist nach 2.31 $T_G : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$ ein kompakter Operator (das Bild von $L^2([a, b])$ unter T_G bleibt Teilmenge der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen). Nach Definition ist $G(x, t) = G(t, x) \in \mathbb{R}$, also ist $T_G : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$ hermitesch.

Die Lösung des allgemeineren Randwertproblems $\{Ly = f, R_a(y) = \rho_a, R_b(y) = \rho_b\}$ wird dann wie folgt erhalten.

i) Man bestimme irgendeine Lösung $g \in \mathcal{C}^2([a, b])$ von $R_a(g) = \rho_a, R_b(g) = \rho_b$, z.B. $g = \lambda x + \mu$.

ii) $z(x) := (T_G(f - Lg))(x) = \int_a^b dt G(x, t)(f(t) - (Lg)(t))$.

Es folgt $Lz = f - Lg$ mit $R_a(z) = R_b(z) = 0$.

iii) $y := z + g \Rightarrow Ly = Lz + Lg = f$ und $R_a(y) = R_a(z) + R_a(g) = \rho_a$ und $R_b(y) = R_b(z) + R_b(g) = \rho_b$.

Beispiel 2.9 Wir betrachten die Schwingung einer zwischen $a = 0$ und $b = L$ fest eingepannten Saite der Eigenfrequenz ω unter konstanter Kraft,

$$Ly = y'' + \omega^2 y = f, \quad R_0(y) = y(0) = 0, \quad R_L(y) = y(L) = 0.$$

Ein reelles Fundamentalsystem von $Ly = 0$ ist $z_{(1)} = \cos \omega x, z_{(2)} = \sin \omega x$. Damit ist

$$A := \begin{pmatrix} R_a(z_{(1)}) & R_a(z_{(2)}) \\ R_b(z_{(1)}) & R_b(z_{(2)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos \omega L & \sin \omega L \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\cot \omega L & \frac{1}{\sin \omega L} \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\sin \omega L} & -\cot \omega L \end{pmatrix},$$

also (zunächst) $y_{(1)} = \frac{\sin \omega x}{\sin \omega L}$ und $y_{(2)} = \cos \omega x - \frac{\sin \omega x \cos \omega L}{\sin \omega L}$. Dabei ist $\omega L \notin \pi \mathbb{Z}$ zu fordern, sonst gibt es nichttriviale Lösungen der homogenen Randwertaufgabe. Damit ist $W(x) = -\frac{\omega}{\sin \omega L}$. Nach Reskalierung ergibt sich

$$y_{(1)} = -\frac{\sin \omega x}{\omega}, \quad y_{(2)} = -\frac{\sin \omega(x - L)}{\sin \omega L}.$$

Also wird die Greensche Funktion

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\omega \sin \omega L} \sin \omega x \sin \omega(t - L) & \text{für } x \leq t \\ \frac{1}{\omega \sin \omega L} \sin \omega(x - L) \sin \omega t & \text{für } x \geq t \end{cases}$$

Für $f(x) = f = \text{const}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{f \sin \omega(x - L)}{\omega \sin \omega L} \int_0^x dt \sin \omega t + \frac{f \sin \omega x}{\omega \sin \omega L} \int_x^L dt \sin \omega(t - L) \\ &= \frac{f \sin \omega(x - L)}{\omega^2 \sin \omega L} (1 - \cos \omega x) + \frac{f \sin \omega x}{\omega \sin \omega L} (\cos \omega(x - L) - 1) \\ &= \frac{4f \sin \frac{\omega x}{2} \sin \frac{\omega(x-L)}{2}}{\omega^2 \sin \omega L} \left(\sin \frac{\omega x}{2} \cos \frac{\omega(x-L)}{2} - \cos \frac{\omega x}{2} \sin \frac{\omega(x-L)}{2} \right) \\ &= -\frac{2f \sin \frac{\omega x}{2} \sin \frac{\omega(L-x)}{2}}{\omega^2 \cos \frac{\omega L}{2}} = \frac{f}{\omega^2} \left(1 - \frac{\cos \omega(x - \frac{L}{2})}{\cos \frac{\omega L}{2}} \right). \end{aligned}$$

2.10 Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgaben

Definition 2.21 Sei $\{Ly = 0, R_a(y) = 0, R_b(y) = 0\}$ eine Sturmsche Randwertaufgabe, die nur die triviale Lösung $y = 0$ habe. Das zugehörige *Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem* ist die homogene Randwertaufgabe

$$\{Ly + \lambda y = 0, R_a(y) = 0, R_b(y) = 0\}. \quad (\text{EWP})$$

Der Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt *Eigenwert* von (EWP), falls es eine Lösung $y \neq 0$ von (EWP) gibt. Eine solche Lösung y heißt *Eigenfunktion* zu λ .

Für $\lambda = 0$ gibt es nach Voraussetzung nur die triviale Lösung $y = 0$, d.h. $\lambda = 0$ ist kein Eigenwert.

Satz 2.38 *Ist λ Eigenwert von (EWP), so sind je zwei Eigenfunktionen linear abhängig. Folglich sind alle Eigenräume E_λ eindimensional.*

Beweis. Seien $0 \neq y_{(1)} \neq y_{(2)} \neq 0$ linear unabhängige Eigenfunktionen zu $\lambda \neq 0$, dann ist $(y_{(1)}, y_{(2)})$ ein Fundamentalsystem für die lineare Differentialgleichung $Ly - \lambda y = 0$, d.h. jede Lösung von $Lz - \lambda z = 0$ hat die Darstellung $z = c_1 y_{(1)} + c_2 y_{(2)}$. Damit würde aber $R_a(z) = R_b(z) = 0$ für jede Lösung gelten, im Widerspruch zur Tatsache, daß es natürlich Lösungen von $Lz - \lambda z = 0$ mit beliebigen Randbedingungen $R_a(z) = \rho_a \neq 0, R_b(z) = \rho_b \neq 0$ gibt. \square

Satz 2.39 *Es sei $G : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Greensche Funktion des AWP $\{Ly = 0, R_a(y) = 0, R_b(y) = 0\}$. Dann sind für $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ und $y \in L^2([a, b])$ äquivalent:*

- i) λ ist Eigenwert von (EWP) und $y \neq 0$ ist Eigenfunktion zu λ . Insbesondere ist $y \in \mathcal{R}_{0,0}$.
- ii) $\mu = -\frac{1}{\lambda}$ ist Eigenwert von $T_G : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$, und y ist Eigenvektor zum Eigenwert μ .

Außerdem gilt: Es existieren (abzählbar) unendlich viele verschiedene Eigenwerte von (EWP) bzw von T_G .

Beweis. i) \Rightarrow ii) Ist $y \in \mathcal{R}_{0,0}$ mit $Ly = -\lambda y$, dann gilt

$$y = T_G(Ly) = T_G(-\lambda y) = -\lambda T_G(y) \quad \Rightarrow \quad T_G(y) = -\frac{1}{\lambda} y.$$

ii) \Rightarrow i) Wäre $\mu = 0$, also $T_G f = y = 0$, dann ist $f = Ly = 0$, aber $\lambda = 0$ ist ausgeschlossen. Sei also $\mu \neq 0$. Dann ist $y = \frac{1}{\mu} T_G(y)$ stetig und dann nach Satz 2.37 $\mu y = T_G(y) \in \mathcal{R}_{0,0}$. Damit gilt $L(\mu y) = \mu L(y) = y$, also $L(y) - \frac{1}{\mu} y = 0$.

iii) Angenommen, es gäbe nur endlich viele Eigenwerte $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ von (EWP). Dann besitzt auch T_G nur endlich viele Eigenwerte $\mu_i = \frac{1}{\lambda_i}, i = 0, \dots, n$. Sind dann (y_i) die zugehörigen normierten reellen Eigenfunktionen (nach Satz 2.38

eindeutig bis auf ± 1), dann gilt mit dem Spektralsatz $T_G f = \sum_{i=0}^n \mu_i \langle y_i, f \rangle y_i$.

Insbesondere ist $T_G f = 0$ für alle $f \in (\text{span}(y_1, \dots, y_n))^\perp$. Da $\mathcal{C}([a, b])$ unendlich-dimensional, gibt es stetige Funktionen $g \notin \text{span}(y_1, \dots, y_n)$. Dann ist $\tilde{g} := g - \sum_{i=1}^n \mu_i \langle y_i, g \rangle y_i \in (\text{span}(y_1, \dots, y_n))^\perp$, d.h. $y = T_G \tilde{g} = 0$ ist Lösung des Randwertproblems $Ly = \tilde{g} \neq 0$. Widerspruch. \square

Wir sehen also (mit dem Spektralsatz), daß sich die Eigenwerte von (EWP) abzählen lassen mit $|\lambda_0| \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. Sind y_n die normierten Eigenfunktionen, dann gilt $T_G f = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \langle y_n, f \rangle y_n$ für alle $f \in L^2([a, b])$. Insbesondere bildet $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem von $L^2([a, b])$. Ist $g \in \mathbb{R}_{0,0}$ mit $f = Lg \in \mathcal{C}([a, b])$, dann folgt $g = T_G f = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \langle y_n, f \rangle y_n$ und weiter

$\langle y_n, g \rangle = \mu_n \langle y_n, f \rangle$. Somit gilt $g = \sum_{n=0}^{\infty} \langle y_n, g \rangle y_n$ (zunächst nur für $g \in \mathbb{R}_{0,0}$).

Zusammenfassend erhalten wir:

Satz 2.40 (Fourier-Entwicklung) *Es sei $\{Ly = 0, R_a(y) = 0, R_b(y) = 0\}$ eine Sturmische Randwertaufgabe, die nur die triviale Lösung $y = 0$ habe, und $\{Ly + \lambda y = 0, R_a(y) = 0, R_b(y) = 0\}$ das zugehörige Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem. Dann gilt:*

- i) (EWP) besitzt abzählbar unendlich viele Eigenwerte $|\lambda_0| \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$.
- ii) Ist y_n Eigenfunktion zu λ_n mit $\|y_n\| = 1$, so ist $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis für $L^2([a, b])$.
- iii) Jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $g \in \mathcal{R}_{0,0}$ besitzt eine Reihenentwicklung $g = \sum_{n=0}^{\infty} \langle y_n, g \rangle y_n$, und die Reihe konvergiert gleichmäßig gegen g .

Teil ii) ist nur für $g \in \mathcal{R}_{0,0}$ bewiesen. Der allgemeine Beweis und der Beweis von iii) wird hier nicht gegeben.

Beispiel 2.10 Die eindimensionale zeitabhängige Schrödinger-Gleichung (eine partielle Differentialgleichung) ist (mit $\hbar = 1, m = \frac{1}{2}$)

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = (-\Delta + q(x))\psi(x, t),$$

wobei $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ der Laplace-Operator und $q(x)$ ein Potential ist. Wir betrachten die Bewegung im Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden bei $x = 0$ und

$x = L$, d.h. $x \in [0, L]$ und $q = 0$. Die Wellenfunktion verschwindet dann an den Wänden, $\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0$. Außerdem wird die Anfangsverteilung

$$\psi(x, 0) = f(x), \quad f \in \mathcal{R}_{0,0}$$

vorgegeben. Wir lösen die Schrödinger-Gleichung durch den Produktansatz $\psi(x, t) = y(x)\tau(t)$. In einem Teilgebiet $\Omega \subset [0, L]$, in dem $\psi(x, t) \neq 0$ ist, dividieren wir die Schrödinger-Gleichung durch $\psi(x, t) = y(x)\tau(t)$:

$$i \frac{1}{\tau(t)} \frac{d\tau(t)}{dt} = - \frac{y''(x)}{y(x)}.$$

Die linke Seite ist eine Funktion nur von t , die rechte nur von x , was nur dann möglich ist, wenn beide Seiten gleich einer Konstanten λ sind. Das liefert die beiden Gleichungen

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = -i\lambda\tau(t), \quad \tau(0) = \tau_0, \quad y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = y(L) = 0.$$

Die zweite Gleichung ist ein Eigenwertproblem und hat die Lösungen $|\lambda_0| \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ und die normierten Eigenfunktionen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ist dann τ_n die Lösung der ersten Differentialgleichung für $\lambda = \lambda_n$, dann ist $\psi_n(x, t) = y_n(x)\tau_n(t)$ Lösung der Schrödinger-Gleichung für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da es sich um eine lineare Differentialgleichung handelt, ist jede Linearkombination der Lösungen wieder eine Lösung, d.h. die allgemeine Lösung hat die Form $\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x) \tau_n(t)$ mit $c_n \in \mathbb{R}$. Diese Koeffizienten sind so zu bestimmen, daß die Anfangsverteilung erhalten wird, $\psi(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_0 c_n y_n(x) = f(x)$. Da die (y_n) ein Orthonormalsystem bilden, gilt $\tau_0 c_n = \langle y_n, f \rangle = \int_0^L dx y_n(x) f(x)$.

Die Gleichung $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ hat ohne Berücksichtigung der Randbedingungen die Lösung

$$y(x) = \begin{cases} ax + b & \text{für } \lambda = 0 \\ ae^{\sqrt{-\lambda}x} + be^{-\sqrt{-\lambda}x} & \text{für } \lambda < 0 \\ a \sin(\sqrt{\lambda}x) + b \cos(\sqrt{\lambda}x) & \text{für } \lambda > 0 \end{cases}$$

Die Randbedingungen schließen die Fälle $\lambda \leq 0$ aus. Im dritten Fall ergibt sich zunächst $b = 0$ und dann $\sqrt{\lambda}L = (n+1)\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$, also $\lambda_n = \frac{(n+1)^2\pi^2}{L^2}$ (Energie des n -ten Niveaus). Die Normierung der Eigenfunktionen liefert

$$1 \stackrel{!}{=} a_n^2 \int_0^L dx \sin^2\left(\frac{(n+1)\pi x}{L}\right) = a_n^2 \int_0^L dx \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2(n+1)\pi x}{L}\right)\right) = \frac{La_n^2}{2},$$

also $a_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$. Zusammengefaßt ergibt sich nach Verschiebung $n+1 \mapsto n$

$$\psi(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L ds \sin\left(\frac{n\pi s}{L}\right) f(s) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-i\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

Das ist eine Lösung der Schrödinger-Gleichung auf dem ganzen Intervall $[a, b]$.

3 Partielle Differentialgleichungen

3.1 Definition und Beispiele

Unter einer *partiellen Differentialgleichung* versteht man eine Gleichung zwischen einer Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n > 1$, einigen ihrer partiellen Ableitungen und den Koordinaten x_i :

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u, \partial_1 \partial_1 u, \dots) = 0. \quad (\text{PDGL})$$

Die höchste Ordnung der auftretenden Ableitungen heißt *Ordnung* der Differentialgleichung. Unter einer Lösung der Differentialgleichung in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ versteht man eine Funktion u , die einschließlich der in (PDGL) auftretenden partiellen Ableitungen in Ω wohldefiniert ist und dort die Differentialgleichung (PDGL) identisch erfüllt. Meist gibt man geeignete Anfangs- und/bzw. Randwerte vor, so daß die Lösung nach Möglichkeit eindeutig ist.

Beispiel 3.1 Einige Beispiele für $\Omega = \mathbb{R}^2$ ohne Anfangs/Randbedingungen:

- $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$ hat die Lösung $u = v(x_2)$ für eine beliebige auf \mathbb{R}^1 stetig differenzierbare Funktion v .
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$ hat die Lösung $u = v(x_1) + w(x_2)$ für beliebige auf \mathbb{R}^1 stetig differenzierbare Funktionen v, w .
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = f(x_1, x_2)$ für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ hat die Lösung $u = \int_0^{x_1} ds \int_0^{x_2} dt f(s, t) + v(x_1) + w(x_2)$ für beliebige auf \mathbb{R}^1 stetig differenzierbare Funktionen v, w .
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$ hat die Lösung $u = v(x_1 + x_2) + w(x_1 - x_2)$ für beliebige auf \mathbb{R}^1 zweimal stetig differenzierbare Funktionen v, w .

Beispiel 3.2 Einige wichtige partielle Differentialgleichungen

- $\Delta u = 0$ (Laplace-Gleichung, $\Delta = \text{div} \circ \text{grad}$ ist der Laplace-Operator)
Lösungen heißen *harmonisch*. Meist werden Randbedingungen auf $\partial\Omega$ (Rand von Ω) vorgegeben: *Dirichlet-Problem*
- $\Delta u = f$ Poisson-Gleichung. Es werden Randbedingungen auf $\partial\Omega$ vorgegeben: *Dirichlet-Problem*
- $(\partial_t u)(x, t) = c\Delta u$ (Wärmeleitungsgleichung, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$)
Meist wird die Anfangsverteilung $u(0, x)$ vorgegeben.
- $(\partial_t \partial_t u)(x, t) = c\Delta u$ (Wellengleichung, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$)
Es werden $u(0, x)$ und $(\partial_t u)(0, x)$ vorgegeben.

- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)
 Lösungen heißen *holomorph*: Wir bilden $f = u + iv$ und fassen f als Funktion von $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$ auf. Umgekehrt ist $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $y = \frac{i}{2}(\bar{z} - z)$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z}) &= \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z}) + i \frac{\partial v}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z}) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{i}{2} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{i}{2} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) . \end{aligned}$$

Gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dann ist f unabhängig von \bar{z} , d.h. wir können die stetig differenzierbare Funktion $f = f(z)$ auffassen als $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Die Untersuchung holomorpher Funktionen (und der Menge der Punkte $z \in \mathbb{C}$, an denen f nicht holomorph ist) ist Gegenstand der *Funktionentheorie*. Solche holomorphen Funktionen haben besondere Eigenschaften. Z.B. ist jede einmal stetig differenzierbare holomorphe Funktion auch beliebig oft stetig differenzierbar.

3.2 Quasilineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Eine quasilineare Differentialgleichung 1. Ordnung in zwei Variablen x, y hat die Form

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) , \quad (\text{QL1})$$

wobei $a, b, c : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Angenommen, wir kennen die Lösung $u(x, y)$. Die Lösungsstrategie besteht darin, diese Lösung $u(x, y) =: z$ als Fläche über Ω aufzufassen und eine Parametrisierung $(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ anzugeben.

Die Lösungsfläche überdecken wir durch zwei Arten von Kurven. Für festes s betrachten wir Kurven $\Gamma_s : t \mapsto (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$, die sich auf die durch

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y, u(x, y)) , \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y, u(x, y))$$

definierten Kurven $\Gamma_\Omega \subset \Omega$ projizieren. Dann gilt nach der Kettenregel

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) .$$

Wir werden also auf folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichung 1. Ordnung geführt:

$$\dot{x} = a(x, y, z) , \quad \dot{y} = b(x, y, z) , \quad \dot{z} = c(x, y, z) , \quad (\text{QL2})$$

wobei x, y, z jeweils Funktionen von t und s sind und der Punkt die Ableitung nach t bedeutet. Dieses heißt das *charakteristische System* zur quasilinearen Differentialgleichung (QL1), seine Lösungen heißen *Charakteristiken*.

Wir suchen die Lösung eines Anfangswertproblems zu (QL1), wo wir den Wert $u = \zeta(s)$ entlang einer Kurve $K_\Omega : s \mapsto (\xi(s), \eta(s)) \in \Omega$ vorgeben. Zu gegebenem Wert von s suchen wir eine Lösung $(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ von (QL2), die für $t = 0$ mit der Raumkurve K zusammenfällt:

$$x(s, 0) = \xi(s), \quad y(s, 0) = \eta(s), \quad z(s, 0) = \zeta(s). \quad (\text{QL3})$$

Wenn sich die Lösungen zu einer Fläche zusammenfügen, wird sie Lösung der Differentialgleichung (QL1) sein. Dazu müssen die Tangentialvektoren der Projektionen K_Ω und Γ_Ω der Kurven auf Ω linear unabhängig sein, also

$$\det \begin{pmatrix} a(\xi(s), \eta(s), \zeta(s)) & \xi'(s) \\ b(\xi(s), \eta(s), \zeta(s)) & \eta'(s) \end{pmatrix} \neq 0$$

gelten. Eine Anfangskurve K mit dieser Eigenschaft heißt *nicht charakteristisch*.

Satz 3.1 *Gegeben sei die Differentialgleichung (QL1) mit vorgegebenen Anfangswerten $u = \zeta(s)$, $s \in I$, entlang einer Kurve $K_\Omega : I \rightarrow \Omega$, welche nicht charakteristisch sei. Die Funktionen a, b, c in (QL1) seien stetig, und sie genügen lokal in einer Umgebung der in (QL3) gegebenen Raumkurve K einer Lipschitz-Bedingung. Dann gibt es eine Umgebung von K_Ω , in der das Anfangswertproblem genau eine Lösung besitzt.*

Beweis. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf gibt es unter diesen Voraussetzungen genau eine stetig differenzierbare Lösung $(x, y, z)(s, t)$ des Anfangswertproblems (QL2, QL3) in einer Umgebung der Geraden $\{0\} \times I$. Wegen der Stetigkeit der Determinante gibt es eine möglicherweise kleinere Umgebung U von $\{0\} \times I$, in der $\det \begin{pmatrix} (\partial_t x)(s, t) & (\partial_s x)(s, t) \\ (\partial_t y)(s, t) & (\partial_s y)(s, t) \end{pmatrix} \neq 0$ ist. Dann existiert nach dem Satz über implizite Funktionen die Umkehrabbildung $t = t(x, y)$ und $s = s(x, y)$ in einer geeigneten Umgebung $V \subset \Omega$ der Anfangskurve K_Ω , und diese ist eindeutig und stetig differenzierbar. Somit gilt $z = z(t(x, y), s(x, y)) =: u(x, y)$ auf V . Wegen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = a(x, y, u(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y}$$

und andererseits $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} = c(x, y, u(x, t))$ erfüllt u die Differentialgleichung (QL1). Gäbe es eine zweite Lösung von (QL1) mit denselben Anfangsbedingungen (QL3), so gäbe es auch eine zweite Lösung von (QL2, QL3), im Widerspruch zu Picard-Lindelöf. \square

Beispiel 3.3 Wir betrachten die quasilineare partielle Differentialgleichung $2u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1$ mit Anfangswert $u = 0$ entlang der Gerade $x = y$ in \mathbb{R}^2 . Die

Raumkurve K ist also gegeben durch $(s, s, 0)$, und wegen $\det \begin{pmatrix} 2u(s) & 1 \\ 1(s) & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1$ ist sie nicht charakteristisch. Die Charakteristiken durch $(0, s)$ sind

$$x(s, t) = s + t^2, \quad y(s, t) = s + t, \quad z(s, t) = t$$

Auflösung von (x, y) nach (t, s) liefert

$$t = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + (x - y)}, \quad s = y - \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} + (x - y)}.$$

Damit ergibt sich zunächst $u(x, y) = z(t, s) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + (x - y)}$. Für $x = y$ soll $u = 0$ gelten, damit ist das jeweils untere Vorzeichen zu wählen, also

$$u(x, y) = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 + 4x - 4y}).$$

Wir sehen, daß es insbesondere keine globale Lösung auf ganz \mathbb{R}^2 gibt, sondern nur in der offenen Halbebene $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x + \frac{1}{4}\}$. Dort bestätigt man die Gültigkeit der Differentialgleichung.

In der klassischen Mechanik wird Äquivalenz einer partiellen Differentialgleichung, der Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, x, p) = 0, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i},$$

zu einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, den Hamiltonschen Gleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, x, p), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(t, x, p),$$

genutzt. Da die Hamilton-Funktion H im allgemeinen eine nichtlineare Funktion des Impulses $p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}$ ist, ist die Hamilton-Jacobi-Gleichung dann keine quasilineare Differentialgleichung mehr, so daß der Äquivalenzbeweis etwas umfangreicher ist.

3.3 Holomorphe Funktionen

Als Beispiel eines Systems partieller Differentialgleichungen betrachten wir die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Gemäß Beispiel 3.2 können wir die Lösung $f = u + iv$ als komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ auffassen.

Wir betrachten die Differentialgleichung $f(z)dz = g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0$ mit $g = u + iv$ und $h = i(u + iv)$. Gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dann ist die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$ erfüllt, also die notwendige Bedingung für die Exaktheit von $f(z)dz = 0$ nach Satz 1.4. Nach Satz 1.5

können wir dann eine Stammfunktion zunächst in einem Rechteck $G = I \times J \subset \mathbb{C}$ angeben, so daß die Differentialgleichung $f(z)dz = 0$ in G tatsächlich exakt ist. Nach den im Anschluß an Satz 1.5 gemachten Bemerkungen gilt das sogar für beliebige einfach zusammenhängende Gebiete $G \subset \mathbb{C}$. Ist dann $x_0 + iy_0 \in G$ ein beliebiger Anfangspunkt und $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ eine beliebige (stückweise) differenzierbare Kurve mit $\gamma(a) = x_0 + iy_0$ und $\gamma(b) = x + iy$, so ist

$$F(x, y) = \int_{\gamma} f(z)dz := \int_a^b dt f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)$$

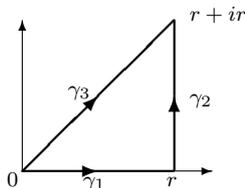
eine Stammfunktion der exakten Differentialgleichung $f(z)dz = 0$. Es gilt also $g(x, y) = f(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ und $h(x, y) = if(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$. Dabei ist $f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)$ in jedem Punkt t das Produkt komplexer Zahlen. Wichtig ist die Unabhängigkeit des Integrals von der speziellen Wahl der Kurve γ . Daraus folgt:

Satz 3.2 (Cauchyscher Integralsatz) *Es sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem offenen einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ eine stückweise differenzierbare geschlossene Kurve (also $\gamma(0) = \gamma(1)$). Dann gilt $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$.*

Beweis. Es sei $\gamma_1 : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow G$ mit $\gamma_1(t) := \gamma(t)$ und $\gamma_2 : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow G$ mit $\gamma_1(t) := \gamma(1 - t)$. Dann gilt $\gamma_1(0) = \gamma(0) =: x_0 + iy_0$, $\gamma_1(\frac{1}{2}) = \gamma(\frac{1}{2}) =: x + iy$ und $\gamma_2(0) = \gamma(1) = x_0 + iy_0$, $\gamma_2(\frac{1}{2}) = \gamma(\frac{1}{2}) =: x + iy$. Also ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_0^1 dt f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = \int_0^{\frac{1}{2}} dt f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) + \int_{\frac{1}{2}}^1 dt f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} dt f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) - \int_0^{\frac{1}{2}} dt f(\gamma(1 - t))\dot{\gamma}(1 - t) \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} dt f(\gamma_1(t))\dot{\gamma}_1(t) - \int_0^{\frac{1}{2}} dt f(\gamma_2(t))\dot{\gamma}_2(t) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 3.4 (Fresnel-Integral) Gesucht ist $\int_0^t dt e^{-it^2}$. Dazu integrieren wir die holomorphe Funktion $f(z) = e^{-z^2}$ über die geschlossene Kurve $(\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3)$:



$$\int_{\gamma_3} dz f(z) = \int_{\gamma_1} dz f(z) + \int_{\gamma_2} dz f(z).$$

Mit $\gamma_2(t) = r + it$ ist $|f(\gamma_2(t))| = e^{-r^2+t^2} \leq e^{-r^2+rt}$ und damit

$$\left| \int_{\gamma_2} dz f(z) \right| \leq \int_0^r dt |f(\gamma_2(t))\dot{\gamma}_2(t)| = e^{-r^2} \int_0^r dt e^{rt} = \frac{1 - e^{-r^2}}{r}.$$

Für $r \rightarrow \infty$ konvergiert das Integral gegen 0, also gilt $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_3} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r dt e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Andererseits ist $\gamma_3(t) = (1+i)t$ mit $t \in [0, r]$, also $(\gamma_3(t))^2 = 2it^2$ und

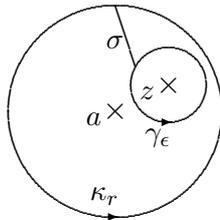
$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r dt e^{-2it^2} (1+i) = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \int_0^\infty d\tau e^{-i\tau^2} = \sqrt{i} \int_0^\infty d\tau e^{-i\tau^2}.$$

Somit gilt $\int_0^\infty dt e^{-it^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{i}}$ und nach Zerlegung in Real- und Imaginärteil wegen $e^{-it^2} = \cos t^2 - i \sin t^2$ schließlich $\int_0^\infty dt \cos(t^2) = \int_0^\infty dt \sin(t^2) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$.

Satz 3.3 (Cauchysche Integralformel) *Es sei f holomorph in einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$, welche die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{K_r(a)}$ mit Mittelpunkt $a \in G$ und Radius r enthält. Der Umfang der Kreisscheibe ist dann die Kurve $\kappa_r(t) = a + re^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Dann gilt für jeden Punkt $z \in K_r(a)$ im Inneren des Kreises*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_r} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Beweis. Zu z gibt es $\epsilon > 0$, so daß die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{K_\epsilon(z)}$ um z mit Radius ϵ im Inneren von $K_r(a)$ liegt. Sei $\gamma_\epsilon(\tau) = z + \epsilon e^{i\tau}$ mit $\tau \in [0, 2\pi]$ der Umfang. Der entstehende (asymmetrische) Kreisring $KR_{r,\epsilon} := \overline{K_r(a)} \setminus K_\epsilon(z)$ werde aufgeschnitten entlang einer beliebigen (stückweise stetig differenzierbaren) Kurve $\sigma \in KR_{r,\epsilon}$.



Dann ist $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ bezüglich ζ holomorph in dem so entstehenden einfach zusammenhängenden Gebiet Γ , das von den Kurven $\kappa_r, \sigma, -\gamma_\epsilon, -\sigma$ berandet wird. Dabei werden die beiden Kurven σ in verschiedene Richtungen durchlaufen, so daß sich die Randintegrale wegheben. Außerdem wird γ_ϵ in negative Richtung durchlaufen. Somit gilt nach Satz 3.2

$$\int_{\kappa_r} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \int_{\gamma_\epsilon} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \int_{\gamma_\epsilon} d\zeta \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} + f(z) \int_{\gamma_\epsilon} d\zeta \frac{1}{\zeta - z}.$$

Insbesondere ist die rechte Seite unabhängig von ϵ , also können wir den Limes $\epsilon \rightarrow 0$ betrachten. Da f stetig differenzierbar ist, ist $\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$ auf $\overline{K_\epsilon(z)}$ beschränkt.

Da der Umfang mit ϵ gegen 0 geht, ist $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} d\zeta \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = 0$. Schließlich gilt auf dem inneren Kreis $\frac{1}{\zeta(\gamma_\epsilon(\tau)) - z} = \frac{1}{\epsilon e^{i\tau}}$ und $\gamma_\epsilon(\tau) = i\epsilon e^{it}$, damit

$$\int_{\gamma_\epsilon} d\zeta \frac{1}{\zeta - z} = \int_0^{2\pi} dt \frac{i\epsilon e^{it}}{\epsilon e^{it}} = 2\pi i,$$

was die Cauchysche Integralformel beweist. \square

Entscheidend für die gesamte Funktionentheorie ist die Tatsache, daß man den Wert $f(z)$ durch ein Kurvenintegral berechnen kann, wobei die Kurve *außerhalb* von problematischen Punkten der Funktion gewählt werden kann. Außerdem geht der Punkt z im Kurvenintegral gar nicht in die Funktion f ein, sondern nur im Faktor $\frac{1}{\zeta - z}$. Dadurch lassen sich bemerkenswerte Aussagen gewinnen.

Satz 3.4 (Potenzreihenentwicklung) *Eine holomorphe Funktion f auf einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ kann in jeder Kreisscheibe $K_\rho(a) \subset G$ in eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$ entwickelt werden. Der Konvergenzradius ist mindestens so groß wie der Abstand des Mittelpunktes a zum Rand von G . Die Entwicklungskoeffizienten sind gegeben durch die Integrale*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

für einen beliebigen Radius $0 < r < \rho$. Ist $|f(\zeta)| < M$ für alle $\zeta \in \partial K_r(a)$, dann können die Koeffizienten abgeschätzt werden durch $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$.

Beweis. Für $z \in K_r(a)$ mit $r < \rho$ und $\zeta \in \partial K_r(a)$ gibt es eine reelle Zahl $0 < q < 1$, so daß $|\frac{z-a}{\zeta-a}| \leq 1 - q$. Dann gilt

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n,$$

wobei die Reihe, die durch $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - q)^n = \frac{1}{q}$ majorisiert wird, gleichmäßig konvergent ist. Damit gilt

$$f(z) = \int_{\partial K_r(a)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \right) (z - a)^n.$$

Die Abschätzung ergibt sich aus $|\frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}| < \frac{M}{r^{n+1}}$ für alle $\zeta \in \partial K_r(a)$ und der Länge $2\pi r$ des Randes. \square

Als wichtige Konsequenz ergibt sich:

Satz 3.5 Jede holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist beliebig oft komplex differenzierbar, alle Ableitungen $f^{(k)}$ sind holomorph und gegeben durch

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}, \quad z \in K_r(a).$$

Eine komplexe Funktion f , die überall auf \mathbb{C} definiert und holomorph ist, heißt *ganze Funktion*. Nach Satz 3.4 gibt es für eine ganze Funktion f die Darstellung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius ∞ .

Satz 3.6 (Liouville) Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis. Ist $|f| < M$ auf \mathbb{C} , dann erfüllen die Entwicklungskoeffizienten nach Satz 3.4 die Abschätzung $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ für beliebiges $r > 0$. Also ist $a_n = 0$ für alle $n \geq 1$ und $f(z) = a_0$. \square

Satz 3.7 (Fundamentalsatz der Algebra) Jedes Polynom vom Grad ≥ 1 mit komplexen Koeffizienten besitzt in \mathbb{C} eine Nullstelle.

Beweis. Angenommen, das Polynom P habe keine Nullstelle, dann ist $\frac{1}{P}$ holomorph auf ganz \mathbb{C} . Außerdem ist $\frac{1}{P(z)} \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$, d.h. $\frac{1}{P(z)}$ ist beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist $\frac{1}{P}$ dann konstant, also wäre auch P konstant. Widerspruch. \square

Nach Abdividieren der Nullstellen läßt sich somit jedes komplexe Polynom $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ vom Grad n , normiert auf $a_n = 1$, faktorisieren in $P(z) = \prod_{i=1}^n (z - b_i)$.

Wichtig für die Ausnutzung der Cauchyschen Integralformel zur Berechnung von Integralen ist eine genauere Diskussion möglicher Singularitäten von komplexen Funktionen.

Satz 3.8 (Riemannscher Hebbarkeitssatz) Es sei f eine auf $G \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion, und es existiere eine Umgebung $U \subset G$ von $a \in G$, so daß f auf $U \setminus \{a\}$ beschränkt ist. Dann gibt es eine Fortsetzung \tilde{f} von f , die holomorph auf ganz G ist.

Beweis. Wir definieren eine Funktion $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\phi(z) := \begin{cases} (z - a)^2 f(z) & \text{für } z \neq a \\ 0 & \text{für } z = a \end{cases}$$

Dann ist ϕ holomorph auf $G \setminus \{a\}$, und es gilt

$$\phi'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\phi(z) - \phi(a)}{z - a} = 0.$$

Damit besitzt ϕ die Potenzreihenentwicklung $\phi(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(z-a)^n$, und die Fortsetzung von f kann definiert werden als

$$\tilde{f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(z-a)^n. \quad \square$$

Definition 3.1 Ist f holomorph in einer Umgebung $G \setminus \{a\}$ eines Punktes $a \in G$, so heißt a eine *isolierte Singularität* von f , und zwar:

- i) Eine *hebbare Singularität*, wenn f holomorph in den Punkt a fortgesetzt werden kann.
- ii) Ein *Pol*, wenn keine holomorphe Fortsetzung in a existiert, aber ein $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ derart, daß $(z-a)^k f$ holomorph in den Punkt a fortgesetzt werden kann. Die kleinste derartige Zahl k heißt die *Vielfachheit des Pols*. Der Punkt a ist genau dann ein k -facher Pol von f , wenn es in G eine Darstellung $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$ gibt, wobei g holomorph in G ist (insbesondere auch in a) und $g(a) \neq 0$ gilt.
- iii) Eine *wesentliche Singularität*, wenn sie weder hebbar noch Pol ist.

Eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ heißt *meromorph*, wenn sie bis auf Pole in G holomorph ist.

Beispiel einer wesentlichen Singularität ist $e^{\frac{1}{z}}$ in $z = 0$. Jede rationale Funktionen ist meromorph.

Definition 3.2 Ist f holomorph in $G \setminus \{a\}$, dann heißt die komplexe Zahl

$$\text{Res}_a f := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} f(z) dz$$

das *Residuum* von f im Punkt a , wobei $\partial K_r(a)$ ein beliebiger Kreis um a vom Radius $r > 0$ ist, so daß $\overline{K_r(a)} \subset G$.

Offenbar ist $\text{Res}_a f = 0$, wenn f in a holomorph ist. Man kann auch zeigen, daß $\text{Res}_a f = 0$ gilt, wenn f in a eine hebbare Singularität besitzt. Ist $f(z) = \frac{g(z)}{z-a}$, und ist g holomorph in einer Umgebung von a , so folgt aus der Cauchyschen Integralformel $\text{Res}_a f = g(a)$. Ist allgemeiner $f = \frac{g}{h}$ Quotient von in a holomorphen Funktionen g, h mit $h(a) = 0$ und $h'(a) \neq 0$, dann ist $\text{Res}_a \frac{g}{h} = \frac{g(a)}{h'(a)}$.

Wenn f einen k -fachen Pol in a hat, dann ist $(z-a)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ holomorph. Also gilt

$$\text{Res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial K_\epsilon(a)} dz b_n(z-a)^{n-k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} dt b_n(\epsilon e^{it})^{n-k+1} = b_{k-1},$$

da auf Punkte $z \in \partial K_\epsilon(a)$ die Form $z = a + \epsilon e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ haben. Der Entwicklungskoeffizient b_{k-1} ergibt sich zu

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{k-1}} \left((z-a)^k f(z) \right) \Big|_{z=a}.$$

Satz 3.9 (Residuensatz) *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $S \subset G$ eine Teilmenge ohne Häufungspunkt in G und f holomorph auf $G \setminus S$. Sei $A \subset U$ eine Teilmenge, die in U einfach zusammenhängend ist und deren Rand $\gamma := \partial A$ in U liegt und keinen Punkt aus S trifft ($S \cap \gamma = \emptyset$). Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in S \cap A} \operatorname{Res}_a f.$$

Beweis. Analog zur Cauchyschen Integralformel werden um jeden Punkt $a \in S \cap A$ Kreise $K_{\epsilon_a}(a)$ gelegt, die im Inneren von A liegen und sich nicht schneiden (S hat keinen Häufungspunkt). Dann ist f holomorph auf einer Umgebung von $\Gamma := A \setminus \bigcup_{a \in S \cap A} K_{\epsilon_a}(a)$. Durch Aufschneiden von Γ zwischen γ und jedem Kreis $K_{\epsilon_a}(a)$ entsteht ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so daß das Integral von f über dessen Rand verschwindet. Die Schnitte werden zweimal in umgekehrter Richtung durchlaufen, so daß sich die Integrale gegenseitig aufheben. Die Integrale über die $\partial K_{\epsilon_a}(a)$ ergeben bis auf einen Faktor $-2\pi i$ (Durchlauf in umgekehrter Richtung) das jeweilige Residuum $\operatorname{Res}_a f$. \square

Der Residuensatz ist ein mächtiges Werkzeug zur Berechnung von Integralen.

Beispiel 3.5 Gesucht ist $I(a) := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t}$ für $a > 1$. Da auf dem Einheitskreis gilt $z = e^{it}$, setzen wir $\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \Big|_{K_1(0)}$. Dann ist $dt = \frac{dz}{iz}$, und wir erhalten

$$I(a) = \frac{1}{i} \int_{\partial K_1(0)} dz \frac{2}{z^2 + 2az + 1} = \frac{2}{i} \int_{\partial K_1(0)} dz f(z)$$

mit $f(z) := \frac{1}{(z - (-a - \sqrt{a^2 - 1}))(z - (-a + \sqrt{a^2 - 1}))}$. Nur die Polstelle bei $z = \sqrt{a^2 - 1} - a$ liegt im Inneren des Einheitskreises, also folgt

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t} = 4\pi \operatorname{Res}_{\sqrt{a^2 - 1} - a} f = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Allgemein gilt für solche Art von Integralen:

Satz 3.10 *Es sei $R(x, y)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen (Quotient zweier Polynome) und $R(\cos t, \sin t)$ sei für alle $t \in [0, 2\pi]$ erklärt. Dann gilt*

$$\int_0^{2\pi} dt R(\cos t, \sin t) = 2\pi \sum_{a \in K_1(0)} \operatorname{Res}_a \tilde{R}, \quad \tilde{R}(z) := \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

Eine andere wichtige Klasse von reellen Integralen, die mit dem Residuensatz berechnet werden können, ist die folgende:

Satz 3.11 *Es sei R eine rationale Funktion (einer Variablen), die auf der reellen Achse keinen Pol habe und in ∞ eine mindestens zweifache Nullstelle, d.h. wenn $R(x) = P(x)/Q(x)$ mit Polynomen P, Q , dann ist $\text{Grad}(Q) - \text{Grad}(P) \geq 2$. In diesem Fall gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx R(x) = 2\pi i \sum_{a \in H} \text{Res}_a R,$$

wobei $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0\}$ die obere Halbebene ist.

Beweis. Man integriert über den Halbkreis bestehend aus dem Durchmesser $[-r, r]$ auf der reellen Achse und dem halben Umfang $z = re^{it}$ mit $t \in [0, \pi]$. Dabei wird r so groß gewählt, daß alle Pole in H von $R(z)$ im Inneren des Halbkreises liegen. Nach Voraussetzung verschwindet dann für $r \rightarrow \infty$ das Integral über den Halbkreisbogen. \square

Beispiel 3.6 Gesucht ist $I_n := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Aufgefaßt als komplexe Funktion sind die (einfachen) Pole $z^{2n} = -1$ der oberen Halbebene bei $a_k = e^{\frac{i\pi(2k+1)}{2n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Also gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\pi i}{2ne^{\frac{i\pi(2k+1)(2n-1)}{2n}}} = -\frac{\pi i}{n} e^{\frac{i\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i\pi k}{n}} = \frac{\pi}{in} e^{\frac{i\pi}{2n}} \frac{1 - e^{\frac{i\pi n}{n}}}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2n}}.$$

3.4 Typeneinteilung von Differentialgleichungen 2. Ordnung

Viele physikalische Systeme werden durch Differentialgleichungen 2. Ordnung beschrieben, für die es, ähnlich zu gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung, eine eigene Lösungstheorie gibt.

Betrachtet wird die quasilineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (*)$$

wobei a, b, c, f stetige Funktionen von $x, y, u, \partial_x u, \partial_y u$ sind. Analog zu pDGL 1. Ordnung geben wir die Anfangsbedingungen entlang einer Kurve $K_\Omega : I \rightarrow \Omega$ vor. Als Anfangsbedingungen sind der Wert $u(s)$ und die Ableitung $(\nabla_n u)(s)$ von u in Normalenrichtung vorzugeben, da die Tangentialableitung bereits durch $u(s)$ bestimmt ist. Lokal im Punkt $x(s), y(s)$ führt man dazu ein neues Koordinatensystem ξ, η ein, so daß k_Ω der Geraden $\eta = 0$ entspricht. Ist dann $U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, so wird also $U(\xi, 0)$ und $(\partial_\eta U)(\xi, 0)$ vorgegeben. Dadurch sind im Punkt $(\xi, 0)$ die Funktionen $U, \partial_\xi U, \partial_\eta U, \partial_\xi \partial_\xi U, \partial_\xi \partial_\eta U$ bestimmt.

Die verbleibende Ableitung $\partial_\eta \partial_\eta U$ ergibt sich aus der Differentialgleichung, vorausgesetzt, die Anfangskurve ist nicht charakteristisch. Man rechnet leicht nach, daß mit der quadratischen Form $Q(p, q) := ap^2 + 2bpq + cq^2$ gelten muß:

$$Q\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}, \frac{\partial\eta}{\partial y}\right) \neq 0.$$

Je nach Definitheit von Q nennt man die Differentialgleichung (*)

elliptisch, falls Q definit, d.h. $ac - b^2 > 0$

parabolisch, falls Q semidefinit, d.h. $ac - b^2 = 0$

hyperbolisch, falls Q indefinit, d.h. $ac - b^2 < 0$

Im n -dimensionalen Fall

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = f; \quad A = A^t := (a_{ij}) \quad (**)$$

mit entsprechenden Anfangswerten entlang einer nicht charakteristischen $(n-1)$ -dimensionalen Hyperfläche nennt man (**)

elliptisch, falls alle Eigenwerte von A das gleiche Vorzeichen haben

parabolisch, falls ein Eigenwert von A verschwindet und alle anderen Eigenwerte das gleiche Vorzeichen haben

hyperbolisch, falls $(n-1)$ Eigenwerte von A das gleiche Vorzeichen haben und der verbleibende Eigenwerte das andere Vorzeichen hat

Entsprechend gibt es für $n \geq 3$ auch Differentialgleichungen (**), die in keine der drei Klassen fallen.

3.5 Poissonsche Differentialgleichung

Dabei handelt es sich um die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

wobei Δ der Laplaceoperator ist, mit $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}$ in kartesischen Koordinaten. Bei einfacher Geometrie von Ω (z.B. Kugeln) kann durch angepaßte Koordinatenwahl eine Vereinfachung erreicht werden. Die rechte Seite wird als stetige Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vorausgesetzt. Für $f = 0$ spricht man von der Laplace-Gleichung. Auf Ω wird die Gültigkeit des Gaußschen Integralsatzes und der Greenschen Formeln vorausgesetzt.

Die Lösungstheorie basiert auf den (am Ende des letzten Semesters eingeführten) Newtonschen Potentialen $N : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus D \rightarrow \mathbb{R}$,

$$N(x, y) := \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} & \text{für } n > 2 \\ \frac{1}{2\pi} \ln \|x-y\| & \text{für } n = 2 \end{cases}$$

wobei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x = y\}$ die Diagonale ist. Dabei war $\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ das Volumen der $(n-1)$ -dimensionalen Einheitskugel. Für festes y ist die Funktion $N(\cdot, y)$ harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$, denn mit $r := \|x - y\| > 0$ gilt ($n \geq 3$)

$$\begin{aligned} \Delta \frac{1}{r^{n-2}} &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} \frac{1}{r^{n-2}}) = \operatorname{div}\left(\frac{(2-n)}{r^{n-1}} \frac{x-y}{r}\right) \\ &= (2-n) \left(\left\langle \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^n}\right), x-y \right\rangle + \frac{1}{r^n} \operatorname{div}(x-y) \right) \\ &= (2-n) \left(\left\langle \frac{-n}{r^{n+1}} \frac{x-y}{r}, x-y \right\rangle + \frac{n}{r^n} \right) = 0. \end{aligned}$$

Zur Präzisierung sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $\partial\Omega \in \mathbb{R}^n$ ihr Rand und $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ihr Abschluß. Gesucht ist eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$.

Der folgende Satz erschien schon einmal als Satz 3.40 im letzten Semester, aber ohne Beweis.

Satz 3.12 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ und $u(x) := \int_{\Omega} dy N(x, y) f(y)$. Dann ist $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, und es gilt*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega} dy \frac{\partial N}{\partial x_i}(x, y) f(y).$$

Ist zusätzlich $f \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, dann gilt $\Delta u = f$ in Ω .

Beweis. i) Die Funktionen $N(x, \cdot)$ und $\frac{\partial N}{\partial x_i}(x, \cdot)$ sind über Ω integrierbar. Da f stetig auf $\bar{\Omega}$ ist, ist f auch beschränkt, so daß die Integrale $\int_{\Omega} dy N(x, y) f(y)$ und $\int_{\Omega} dy \frac{\partial N}{\partial x_i}(x, y) f(y)$ existieren. Insbesondere ist $N(x, \cdot)$ fast überall stetig und stetig differenzierbar im ersten Argument, und $\frac{\partial N}{\partial x_i}(x, \cdot)$ ist fast überall stetig im ersten Argument, so daß die ersten Behauptungen folgen.

ii) Ist f stetig differenzierbar in Ω und ist nun $x \in \Omega$, dann gilt nach den obigen Bemerkungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= - \int_{\Omega} dy \frac{\partial N}{\partial y_i}(x, y) f(y) \\ &= - \int_{\Omega} dy \frac{\partial}{\partial y_i} \left(N(x, y) f(y) \right) + \int_{\Omega} dy N(x, y) \frac{\partial f}{\partial y_i}(y). \end{aligned}$$

Die Umformung des Integranden ist zunächst nur für $y \neq x$ möglich, wegen der Integrierbarkeit spielt diese Nullmenge aber keine Rolle. Sämtliche Integrale existieren, so daß der Gaußsche Integralsatz anwendbar ist. Im zweiten Integral können wir eine Konstante addieren:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = - \int_{\partial\Omega} dS(y) \nu_i(y) N(x, y) f(y) + \int_{\Omega} dy N(x, y) \frac{\partial}{\partial y_i} (f(y) - f(x)).$$

Dabei ist $\nu_i(y)$ die i -te Komponente des äußeren Normalenvektors in $y \in \partial\Omega$. Ist $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, dann sind die Integranden fast überall nach x_j stetig partiell differenzierbar. Wegen $x \in \Omega$ ist der Integrand des Oberflächenintegrals sogar regulär. Also ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}(x) &= - \int_{\partial\Omega} dS(y) \nu_i(y) \frac{\partial N}{\partial x_i}(x, y) f(y) + \int_{\Omega} dy \frac{\partial N}{\partial x_i}(x, y) \frac{\partial}{\partial y_i}(f(y) - f(x)) \\ &= \int_{\partial\Omega} dS(y) \nu_i(y) \frac{\partial N}{\partial y_i}(x, y) f(y) - \int_{\Omega} dy \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial N}{\partial y_i}(x, y) (f(y) - f(x)) \right) \\ &\quad + \int_{\Omega} dy \frac{\partial^2 N}{\partial y_i \partial y_i}(x, y) (f(y) - f(x)) . \end{aligned}$$

Wegen der Abschätzung $|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$ für $y \mapsto x$ existieren sämtliche Integrale, und der Gaußsche Integralsatz ist anwendbar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}(x) = \int_{\partial\Omega} dS(y) \nu_i(y) \frac{\partial N}{\partial y_i}(x, y) f(x) + \int_{\Omega} dy \frac{\partial^2 N}{\partial y_i \partial y_i}(x, y) (f(y) - f(x)) .$$

Wir summieren über i von 1 bis n :

$$\begin{aligned} (\Delta u)(x) &= f(x) \int_{\partial\Omega} dS(y) \langle \nu(y), (\text{grad}_y N)(x, y) \rangle \\ &\quad + \int_{\Omega} dy (\Delta_y N)(x, y) (f(y) - f(x)) . \end{aligned}$$

Außerhalb der Diagonalen ist N harmonisch. Andererseits kann der gesamte Integrand zu einer integrierbaren Funktion auf Ω fortgesetzt werden, so daß diese Nullmenge unerheblich ist. Damit verschwindet das Volumenintegral. Das Oberflächenintegral drücken wir mit dem Gaußschen Integralsatz für das Gebiet $\Omega \setminus \overline{K_\rho(x)}$ aus, wobei ρ so klein ist, daß die Kugel im Inneren von Ω liegt. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega \setminus \overline{K_\rho(x)}} dy \text{div}_y((\text{grad}_y N)(x, y)) \\ &= \int_{\partial\Omega} dS(y) \langle \nu(y), \text{grad}_y N(x, y) \rangle - \int_{\partial K_\rho(x)} dS(y) \langle \nu(y), \text{grad}_y N(x, y) \rangle , \end{aligned}$$

da die äußere Normale von $\partial K_\rho(x)$ in entgegengesetzte Richtung zeigt. Das letzte Integral ist wegen $\nu(y) = \frac{y-x}{\|y-x\|}$ auf $\partial K_\rho(x)$ aber

$$\int_{\partial K_\rho(x)} dS(y) \langle \nu(y), \text{grad}_y N(x, y) \rangle = 1 ,$$

so daß $(\Delta u)(x) = f$ folgt. □

Für beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $n = 2, 3$ ist $N \in L^2(\Omega \times \Omega)$, so daß nach Satz 2.31 der durch

$$(Tf)(x) := \int_{\Omega} dy N(x, y)f(y)$$

definierte Operator $T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ kompakt ist. Allerdings können wir T noch nicht als Inverses zu Δ auffassen, da ohne Anfangs/Randbedingungen die Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung nicht eindeutig sein wird. Entsprechend suchen wir die Lösung des folgenden *Dirichlet-Problems*:

$$\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad u = u_D \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (\text{D})$$

Die Methode besteht in der Bestimmung einer Greenschen Funktion $G(x, y)$ (die etwas mit den Newtonschen Potentialen zu tun hat), so daß der durch $(Tf)(x) := \int_{\Omega} dy G(x, y)f(y)$ definierte Operator (kompakt für $n = 2, 3$) die eindeutige Lösung $u = Tf \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ des Dirichlet-Problems (D) liefert.

Sei zunächst $u_D = 0$, d.h. die gesuchte Funktion u verschwinde auf dem Rand. Wir setzen für $y \in \Omega$

$$G(x, y) := N(x, y) + w(x, y) \quad \text{mit einer Lösung } w(\cdot, y) \text{ von} \\ (\Delta w)(x, y) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega, \quad w(x, y) = -N(x, y) \quad \text{für } x \in \partial\Omega.$$

Wir werden zeigen, daß $G(x, y)$ die gesuchte Greensche Funktion ist, die das Dirichlet-Problem eindeutig löst, vorausgesetzt, man kann die Funktion $w(x, y)$ finden. Das gelingt zumindest in einfachen Beispielen:

Beispiel 3.7 Es sei $\Omega = K_r(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$. Dann ist $w(x, y) = -N(\frac{\|y\|}{r}x, \frac{r}{\|y\|}y)$, und

$$G(x, y) = N(x, y) - N(\frac{\|y\|}{r}x, \frac{r}{\|y\|}y)$$

ist die Greensche Funktion. Die Newtonschen Potentiale sind harmonisch außerhalb der Diagonalen. Sei $y \neq 0$. Dann ist $\frac{\|y\|}{r}x = \frac{r}{\|y\|}y$ nur möglich, wenn $x = \lambda y$ gilt. Dann ist $\frac{\|y\|}{r}x = \frac{r}{\|y\|}y \Leftrightarrow \lambda\|y\|^2 = r^2$, also $\lambda > 0$ und $\|x\|\|y\| = r^2$. Diese Gleichung hat aber keine Lösung für $y \in \Omega$ und $x \in \bar{\Omega}$. Ist $y = 0$, dann können wir wegen der Translationsinvarianz der Newtonschen Potentiale $(x, 0) \mapsto (x + a, a)$ setzen, woraus $\|x + a\|\|a\| = r^2$ folgt. Für genügend kleines $\|a\|$ gibt es keine Lösung, also ist $w(\cdot, y)$ harmonisch für alle $y \in \Omega$. Für $\|x\| = r$ gilt

$$\left\| \frac{\|y\|}{r}x - \frac{r}{\|y\|}y \right\|^2 = \|y\|^2 + r^2 - 2\langle x, y \rangle = \|x - y\|^2$$

und damit $w(x, y) = -N(x, y)$ für alle $x \in \partial\Omega$.

Wir stellen zunächst Eigenschaften harmonischer Funktionen zusammen, die wir für $w(\cdot, y)$ benötigen:

Satz 3.13 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Teilmenge, für die der Gaußsche Integralsatz gilt, und $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei das äußere Einheitsnormalenfeld. Eine Funktion $h \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ sei harmonisch, $\Delta h = 0$ in Ω . Dann gilt:*

- i) $\int_{\partial\Omega} dS \langle \text{grad } h, \nu \rangle = 0$ (Gaußscher Integralsatz)
- ii) Ist zu $x \in \Omega$ die Kugel $\overline{K_r(x)} \subset \Omega$, dann gilt

$$h(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial K_r(x)} dS h(y) \quad (\text{Mittelwertsatz})$$
- iii) Nimmt h ihr Maximum oder Minimum auf $\bar{\Omega}$ im Inneren Ω an, so ist h auf $\bar{\Omega}$ konstant (Maximumprinzip).
- iv) Erfüllen h_1, h_2 die Voraussetzungen und ist $h_1 = h_2$ auf $\partial\Omega$, so gilt $h_1 = h_2$ auf $\bar{\Omega}$.

Beweis. Der Gaußsche Integralsatz und der Mittelwertsatz wurden im letzten Semester bewiesen.

iii) Sei $M := \max_{x \in \bar{\Omega}} h(x)$ und $F := \{x \in \Omega : h(x) = M\} \subset \Omega$. Wir zeigen, F ist offen und abgeschlossen. Das heißt $F = \Omega$ (dann ist h konstant) oder $F = \emptyset$ (dann nimmt h das Maximum auf dem Rand an).

Sei $F \neq \emptyset$ und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $x_k \in F$, die gegen $x \in \Omega$ konvergiert. Dann ist $u(x_k) = M$ für alle k und wegen der Stetigkeit von h folgt $u(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k) = M$, also ist F abgeschlossen.

Sei $x \in \Omega$ und $r > 0$ derart, daß $\overline{K_r(x)} \subset \Omega$. Dann folgt aus dem Mittelwertsatz $h(y) = M$ für alle $y \in \partial K_r(x)$, denn wäre $h(y) < M - \epsilon$ für ein $\epsilon > 0$, Dann folgt aus der stetigen Differenzierbarkeit von h die Existenz einer Teilmenge $V \subset \partial K_r(x)$ mit Volumen $\geq \delta > 0$, auf der $h(y) < M - \epsilon/2$ gilt. Also gibt es zu jedem $x \in F$ auch eine Kugel $K_r(x) \subset F$, damit ist F offen. Die Aussagen für das Minimum ergeben sich mit $h \mapsto -h$.

iv) Mit h_1, h_2 ist auch $h := h_1 - h_2$ harmonisch mit $h = 0$ auf $\partial\Omega$. Dann ist $h = 0$ auf $\bar{\Omega}$ nach iii). □

Satz 3.14 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wie im Satz 3.13. Dann gilt:*

- i) *Es gilt höchstens eine Greensche Funktion für das Dirichlet-Problem (D) auf Ω mit $u_D = 0$. Sie ist außerhalb der Diagonale $D := \{(x, y) \in \Omega \times \Omega : x = y\}$ negativ, $G(x, y) < 0$ für alle $(x, y) \in (\Omega \times \Omega) \setminus D$.*
- ii) *Die Greensche Funktion ist symmetrisch, $G(x, y) = G(y, x)$.*
- iii) *Ist $f \in C^1(\bar{\Omega})$, so ist $u(x) = \int_{\Omega} dy G(x, y)f(y)$ Lösung des Dirichlet-Problems.*

Beweis. i) $w(\cdot, y)$ ist eine harmonische Funktion mit vorgegebenen Werten auf $\partial\Omega$. Für festes y gibt es ein $r > 0$ mit $\overline{K_r(y)} \subset \Omega$, also ist $\|x - y\| \geq r$ für alle $x \in \partial\Omega$. Damit ist die vorgegebene Randfunktion beschränkt, so daß, wenn es eine Lösung w gibt, diese nach Satz 3.13.iv) eindeutig ist.

Für $x \rightarrow y$ geht $N(x, y) \rightarrow -\infty$. Da $w(\cdot, y)$ in Ω harmonisch ist, insbesondere differenzierbar im Punkt $x = y$, ist $G(\cdot, y) < 0$ in einer Kugelschale $\{x \in \Omega : \epsilon \leq \|x - y\| \leq \rho\}$. Da $G(\cdot, y)$ harmonisch auf $\Omega \setminus K_\rho(y)$ ist, nimmt es sein Maximum und Minimum auf dem Rand $\partial(\Omega \setminus K_\rho(y)) = \partial\Omega \cup \partial K_\rho(y)$ an. Das Maximum muß also 0 sein, und es wird auf $\partial\Omega$ angenommen, so daß die Greensche Funktion in Ω negativ sein muß.

ii) Sei $y_1, y_2 \in \Omega$ und $\rho > 0$ derart, daß $\overline{K_\rho(y_1)}, \overline{K_\rho(y_2)} \in \Omega$ und $\overline{K_\rho(y_1)} \cap \overline{K_\rho(y_2)} = \emptyset$. Dann sind die Funktionen $G(\cdot, y_1)$ und $G(\cdot, y_2)$ harmonisch auf $\Omega_\rho := \Omega \setminus (\overline{K_\rho(y_1)} \cup \overline{K_\rho(y_2)})$, und beide verschwinden auf $\partial\Omega$. Also liefert die 2. Greensche Formel (Satz 3.38 aus dem letzten Semester)

$$0 = \int_{\partial K_\rho(y_1)} dS(x) \left(G(x, y_1) (D_\nu G)(x, y_2) - G(x, y_2) (D_\nu G)(x, y_1) \right) \\ + \int_{\partial K_\rho(y_2)} dS(x) \left(G(x, y_1) (D_\nu G)(x, y_2) - G(x, y_2) (D_\nu G)(x, y_1) \right).$$

Dabei ist $D_\nu f = \langle \text{grad } f, \nu \rangle$. Auf $\partial K_\rho(y_1)$ mit $\rho \rightarrow 0$ ist $G(x, y_1) \sim \rho^{2-n}$, während $G(x, y_2)$ regulär ist. Da die Oberfläche der Sphären proportional zu ρ^{n-1} ist, verschwindet das Integral über den ersten Term der ersten Zeile. Analog verschwindet für $\rho \rightarrow 0$ der letzte Term der zweiten Zeile. Im Limes $\rho \rightarrow 0$ kann dann in den verbleibenden Termen der jeweils reguläre Faktor vor das Integral gezogen werden:

$$G(y_1, y_2) \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial K_\rho(y_1)} dS(x) (D_\nu G)(x, y_1) = G(y_2, y_1) \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial K_\rho(y_2)} dS(x) (D_\nu G)(x, y_2).$$

Da die Funktion $w(\cdot, y_i)$ harmonisch ist, verschwindet für ihren Anteil nach Satz 3.13.i) das Integral. Für die verbleibenden Newtonschen Potentiale errechnet man sofort $(D_\nu N)(x, y_i) = \frac{\rho^{1-n}}{\omega_n}$ für alle $x \in \partial K_\rho(y_i)$. Die Oberflächenintegrale ergeben dann 1, also gilt $G(y_1, y_2) = G(y_2, y_1)$ für alle $(y_1, y_2) \in (\Omega \times \Omega) \setminus D$.

iii) Da $w(\cdot, y)$ harmonisch ist, gilt $\Delta u = f$ in Ω nach Satz 3.12. Auf dem Rand ist $G(x, y) = 0$ für alle $x \in \partial\Omega$ und alle $y \in \Omega$. \square

Die hier konstruierte Greensche Funktion $G(x, y)$ entspricht dem elektrischen Potential im Punkt $x \in \Omega$, welches von einer Punktladung in $y \in \Omega$ hervorgerufen wird, wenn der Rand von Ω elektrisch leitend ist und somit konstantes Potential hat. Die Symmetrie $G(x, y) = G(y, x)$ bedeutet, daß die gleiche Punktladung in x das gleiche Potential in y erzeugt.

Bleibt noch die Situation beliebiger Randbedingungen $u = u_D$ auf $\partial\Omega$ im Dirichlet-Problem. Dazu genügt die Addition der folgenden speziellen Lösung:

Satz 3.15 *Es sei G die Greensche Funktion zum Gebiet Ω , und die Randwertaufgabe*

$$\Delta v = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad v = u_D \quad \text{auf } \partial\Omega$$

für eine stetige Funktion $u_D : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ besitze eine Lösung. Dann gilt $v(x) = \int_{\partial\Omega} dS(y) (D_\nu G)(x, y) u_D(y)$.

Beweis. Wir wenden die 2. Greensche Formel für $\Omega \setminus \overline{K_\rho(x)}$ auf das Paar $G(x, \cdot)$ und v von Funktionen an, welche auf diesem Gebiet harmonisch sind:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} dS(y) \left(G(x, y) D_\nu v(y) - v(y) D_\nu G(x, y) \right) \\ &\quad - \int_{\partial K_\rho(x)} dS(y) \left(G(x, y) D_\nu v(y) - v(y) D_\nu G(x, y) \right) \end{aligned}$$

Auf $\partial\Omega$ verschwindet $G(x, \cdot)$. Auf $\partial K_\rho(x)$ verschwindet für $\rho \rightarrow 0$ das Integral von $G(x, y) D_\nu v(x)$. Es bleibt

$$\int_{\partial\Omega} dS(y) u_D(y) (D_\nu G)(x, y) = \int_{\partial K_\rho(x)} dS(y) v(y) D_\nu G(x, y).$$

Für $\rho \rightarrow 0$ können wir im letzten Integral wegen der Stetigkeit $v(y)$ durch $v(x)$ ersetzen, da der Fehler bei $\rho \rightarrow 0$ verschwindet. Das verbleibende Integral ist (wie im Beweis von Satz 3.12) = 1. \square

Beispiel 3.8 Es sei $\Omega = K_r(0)$ die offene Kugel vom Radius r um den Nullpunkt. Das Innere sei ladungsfrei, $\Delta u = 0$, und auf dem Rand $\partial K_r(0)$ der Kugel sei das elektrische Potential vorgegeben. Gesucht ist das elektrische Potential in jeden Punkt x im Inneren der Kugel.

Nach Beispiel 3.7 ist für $n \geq 3$ und Vertauschung der Argumente

$$G(x, y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \left(\|y-x\|^{2-n} - \frac{\|x\|^{2-n}}{r^{2-n}} \left\| y - \frac{r^2 x}{\|x\|^2} \right\|^{2-n} \right).$$

Damit gilt

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(x, y) = \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{y_i - x_i}{\|y-x\|^n} - \frac{r^{n-2}}{\|x\|^{n-2}} \frac{y_i - \frac{r^2 x_i}{\|x\|^2}}{\left\| y - \frac{r^2 x}{\|x\|^2} \right\|^n} \right).$$

Für $\|y\| = r$ war (Beispiel 3.7) $\left\| y - \frac{r^2 x}{\|x\|^2} \right\| = \frac{r}{\|x\|} \|y-x\|$, so daß sich ergibt:

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(x, y) = \frac{1}{\omega_n \|y-x\|^n} \left((y_i - x_i) - \frac{\|x\|^2}{r^2} \left(y_i - \frac{r^2}{\|x\|^2} x_i \right) \right) = \frac{1 - \frac{\|x\|^2}{r^2}}{\omega_n \|y-x\|^n} y_i.$$

Nun ist $(D_\nu G)(x, y) = \langle \nu, (\text{grad}_y G)(x, y) \rangle = \langle \frac{y}{r}, (\text{grad}_y G)(x, y) \rangle = \frac{r^2 - \|x\|^2}{r\omega_n \|y-x\|^n}$, also

$$u(x) = \frac{r^2 - \|x\|^2}{r\omega_n} \int_{\partial K_r(0)} dS(y) \frac{u(y)}{\|y-x\|^n}.$$

Für $x = 0$ folgt insbesondere $u(0) = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{\partial K_r(0)} dS(y) u(y)$, also der Mittelwertsatz.

Ist umgekehrt u eine geeignete Meßgröße, die im Inneren der Kugel einer Laplace-Gleichung genügt, dann kann $u(x)$ für einen nicht zugänglichen Punkt x des Inneren allein durch Messung von u auf dem Rand bestimmt werden. Auf einem analogen Prinzip beruht die Computertomographie.

3.6 Schwache Lösungen des Dirichlet-Problems

Die im letzten Abschnitt entwickelte Lösungstheorie für die Poisson-Gleichung hat für die praktische Umsetzung zwei problematische Stellen. Satz liefert nur die Eindeutigkeit der Greenschen Funktion, wir können nicht sicher sein, daß sie wirklich existiert. Das Problem ist nämlich, daß wir eine Lösung $w(\cdot, y)$ des Problems $(\Delta w)(x, y) = 0$ für $x \in \Omega$ und $w(x, y) = -N(x, y)$ für $x \in \partial\Omega$ zunächst nicht garantieren können. Selbst wenn eine solche Lösung existiert, wird sie im allgemeinen nicht zu finden sein. Das zweite merkwürdige Problem ist die Differenzierbarkeit $f \in C^1(\Omega)$ der rechten Seite. Damit konstruieren wir eine zweimal stetig differenzierbare Lösung u . Setzt man die Lösung aber in die Poisson-Gleichung ein, dann wäre die rechte Seite eigentlich nur stetig. Wir werden nun ein ähnliches Dirichlet-Problem mit Methoden der Hilbert-Räume behandeln, für die uns ein Analogon des Rieszschen Darstellungssatzes die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung sichert. Allerdings ist dann die Lösung nur eine Äquivalenzklasse integrierbarer Funktionen.

Betrachtet werde das Dirichlet-Problem

$$\Delta u - m^2 u + f = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Der Zusatz $-m^2 u$ entspricht physikalisch einer Masse für das Photon, d.h. wir lösen hier nicht die Maxwell-Gleichung, sondern die euklidische Klein-Gordon-Gleichung. Die Differentialgleichung wird mit einer geeigneten Funktion $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ multipliziert, die ebenfalls auf $\partial\Omega$ verschwindet. Ist u zweimal und v einmal stetig differenzierbar in Ω , dann gilt $v\Delta u = \text{div}(v \text{ grad } u) - \langle \text{grad } v, \text{ grad } u \rangle$, somit

$$\int_{\Omega} dx \left(\text{div}(v \text{ grad } u) - \langle \text{grad } v, \text{ grad } u \rangle - m^2 uv + fv \right) = 0.$$

Die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes sind erfüllt, so daß wir das Integral über $\text{div}(v \text{ grad } u)$ in ein Oberflächenintegral überführen können. Da v

auf dem Rand verschwindet, liefert es keinen Beitrag, und wir erhalten:

$$\int_{\Omega} dx \left(\langle \text{grad } v, \text{grad } u \rangle + m^2 uv \right) = \int_{\Omega} dx f v \quad \text{für alle } v \text{ mit } v = 0 \text{ auf } \partial\Omega .$$

Wenn wir die rechte Seite als lineares Funktional $F(v)$ auffassen und die linke Seite als Skalarprodukt $\langle u, v \rangle$ in einem geeigneten Hilbert-Raum H , dann sagt uns der Rieszsche Darstellungssatz, daß es genau ein $u \in H$ gibt mit $\langle u, v \rangle = F(v)$.

Wenn wir also einen geeigneten Hilbert-Raum H finden, dann ist das Dirichlet-Problem in H eindeutig lösbar, und zwar für viel schwächere Forderungen an die Funktionen: Es genügt offenbar $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ zu wählen, also viel weniger als Stetigkeit der rechten Seite (im letzten Abschnitt mußte f sogar differenzierbar sein), und auch die zweiten Ableitungen von u gehen gar nicht ein.

Klar ist, daß

$$\langle u, v \rangle_1 := \int_{\Omega} dx \left(\langle \text{grad } v, \text{grad } u \rangle + m^2 uv \right)$$

ein Skalarprodukt auf dem Raum $\mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$ der auf Ω stetig differenzierbaren Funktionen ist, die sich stetig zu 0 auf $\partial\Omega$ fortsetzen lassen. Allerdings kann dieser Raum nicht vollständig sein. Entsprechend der üblichen Konstruktion vervollständigen wir $\mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$ bezüglich der Norm $\|u\|_1 := \sqrt{\langle u, u \rangle_1}$ und nennen den resultierenden Hilbert-Raum $H_0^1(\Omega)$.

Definition 3.3 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, so daß seine charakteristische Funktion meßbar ist. Dann heißt die Vervollständigung von $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ bezüglich der durch das Skalarprodukt

$$\langle v, v \rangle_k := \int_{\Omega} dx \sum_{p=0}^k \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n \left| \frac{\partial^p v}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}(x) \right|^2$$

induzierten Norm $\|u\|_k := \sqrt{\langle u, u \rangle_k}$ der *Sobolev-Raum k -ter Ordnung*, bezeichnet mit $H^k(\Omega)$. Der entsprechende Abschluß von $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$ bezüglich $\| \cdot \|$ werde mit $H_0^k(\Omega)$ bezeichnet.

Durch Weglassen der jeweils höchsten Ableitungen folgt $H^k(\Omega) \subset H^{k-1}(\Omega) \subset \dots \subset H^1(\Omega) \subset H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Satz 3.16 *Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ gibt es genau eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des schwachen Dirichlet-Problems*

$$\int_{\Omega} dx \left(\langle \text{grad } v, \text{grad } u \rangle + m^2 uv \right) = \int_{\Omega} dx f v \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega) .$$

Beweis. Das mit Masse $m \neq 0$ definierte Skalarprodukt ist äquivalent zum Standard-Sobolev-Skalarprodukt mit $m = 1$, so daß $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ mit $m \neq 0$ den gleichen Hilbert-Raum $H_0^1(\Omega)$ definiert. Nach Cauchy-Schwarz ist

$$\left| \int_{\Omega} dx f(x)v(x) \right| \leq \|f\| \|v\| \leq \frac{1}{m} \|f\| \|v\|_1 ,$$

wobei $\|f\|$ die übliche L^2 -Norm ist. Also ist $F : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(v) := \int_{\Omega} dx f(x)v(x)$ ein lineares stetiges Funktional auf dem Hilbert-Raum $H_0^1(\Omega)$. nach dem Rieszischen Darstellungssatz gibt es genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $\langle u, v \rangle = F(v)$. \square

Zur Diskussion dieser Lösung einige Bemerkungen zu Sobolev-Räumen, ohne Beweis. Die Funktionen $v \in H^k(\Omega)$ sind zunächst nicht differenzierbar. Jedoch gibt es zu $v \in H^k(\Omega)$ eine Folge $(v_l)_{l \in \mathbb{N}}$ beliebig oft differenzierbarer Funktionen, für die $\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_p} v_l$ mit $p \leq k$ definiert ist. Man kann zeigen, daß dann $\lim_{l \rightarrow \infty} \partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_p} v_l$ fast überall punktweise gegen eine Funktion aus H^{k-p} konvergiert. Die so definierte Ableitung $\partial_i : H^k(\Omega) \rightarrow H^{k-1}(\Omega)$ heißt *verallgemeinerte Ableitung*.

Wenn der Rand $\partial\Omega$ gutartig ist (z.B. Lipschitz-stetig, keine Nullwinkel), dann läßt sich zeigen, daß Funktionen $v \in H_0^k(\Omega)$ einschließlich ihrer $(k-1)$ -ten verallgemeinerten Ableitung fast überall punktweise auf $\partial\Omega$ verschwinden. Speziell ist $H_0^0(\Omega) = H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Die in Satz 3.16 angegebene Lösung ist einerseits nur eine Äquivalenzklasse von Funktionen und hat andererseits nur verallgemeinerte Ableitungen, und diese auch nur erster Ordnung. Im allgemeinen wird das keine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega})$ von $\Delta u = f$ sein! Es gibt aber sehr wichtige sogenannte *Sobolevsche Einbettungssätze*, die in Abhängigkeit von der verallgemeinerten Ableitungsklasse und der Dimension von Ω klassische Differenzierbarkeit garantieren.

Die Beschränkung auf erste Ableitungen ist der physikalischen Problemstellung sogar besser angepaßt. Ausgangspunkt für das Dirichlet-Problem ist nämlich häufig ein Variationsproblem für eine Lagrange-Funktion in der Feldtheorie. Das Hamiltonsche Prinzip fordert

$$S(u) = \int_{\Omega} dx L(\text{grad } u, u, x) = \text{stationär} , \quad u(x) = u_D(x) \text{ auf } \partial\Omega .$$

Dabei ist L die Lagrange-Funktion, die im allgemeinen quadratisch von der verallgemeinerten Geschwindigkeit $\text{grad } u$ und dem verallgemeinerten Ort u abhängt. Hier ist x die verallgemeinerte Zeit x . Gesucht werden Lösungen $u(x)$, die das Wirkungsfunktional S stationär machen, wobei nur in der Klasse der Funktionen mit vorgegebenen Werten auf dem Rand variiert wird. Die Euler-Lagrange-Gleichungen führen dann auf eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung, aber mit zweimaliger Differenzierbarkeit ist mehr als im physikalischen Problem gefordert. Ist u_0 die Minimumslösung für das Wirkungsfunktional und setzt man

$u = u_0 + v$, wobei v auf $\partial\Omega$ verschwindet und als “infinitesimal” angesehen wird (d.h. quadratische Terme in v verschwinden), so wird man direkt auf das schwache Dirichlet-Problem geführt.

Die Masse $m \neq 0$ im Dirichlet-Problem ist wichtig, da sonst $v \mapsto F(v)$ kein stetiges Funktional ist. Wenn aber Ω beschränkt ist und v auf $\partial\Omega$ verschwindet, dann kann für stetig differenzierbare Funktionen natürlich $v(x)$ durch $\|\text{grad } v\|$ und den Durchmesser von Ω abgeschätzt werden. Es zeigt sich, daß das auch noch für verallgemeinerte Ableitungen gilt, so daß es eine Konstante $0 < C(\Omega) < \infty$ gibt mit

$$\|v\|_1 \leq C(\Omega)|v|_1, \quad |v|_1 := \left(\int_{\Omega} dx \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$. Das Verschwinden der Randwerte ist hier wichtig, denn sonst ist für die konstante Funktion $|v|_1 = 0$, aber $\|v\|$ und $\|v\|_1$ sind ungleich Null. In diesem Fall sind also $|\cdot|_1$ und $\|\cdot\|_1$ äquivalente Normen.

Schließlich läßt sich das Problem auf allgemeine elliptische Differentialgleichungen 2. Ordnung verallgemeinern:

Satz 3.17 (Lax-Milgram) *Es sei H ein Hilbert-Raum, $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und H -elliptische Bilinearform, d.h. es existieren $0 < \alpha, M < \infty$ mit*

$$|a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|, \quad a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2$$

für alle $u, v \in H$. Dann ist gibt es zu jedem linearen stetigen Funktional $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ genau eine Lösung $u \in H$ der Gleichung $a(u, v) = F(v)$, und für die Lösung gilt die Abschätzung $\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{op}$.

Beweis. Für jedes $u \in H$ ist die Abbildung $v \mapsto a(u, v)$ linear und stetig, also gibt es nach dem Rieszschen Darstellungssatz genau einen Vektor $Au \in H$ mit $a(u, v) = \langle Au, v \rangle$ für alle $v \in H$. Die Abbildung $A : H \rightarrow H$ ist offenbar linear und stetig. Es gilt

$$\|Au\| := \sup_{v \in H, \|v\|=1} |a(u, v)| \geq a\left(\frac{u}{\|u\|}, u\right) \geq \alpha\|u\|,$$

und damit ist A injektiv: Aus $Au = 0$ folgt $u = 0$. Wir zeigen, daß A auch surjektiv ist. Wegen der Stetigkeit von A ist $AH \subset H$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Gäbe es ein $0 \neq w \in (AH)^\perp$, so wäre $0 = \langle w, Aw \rangle = a(w, w) \geq \alpha\|w\|^2$, damit $w = 0$ und $AH = H$.

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es genau ein $f \in H$ mit $F(v) = \langle f, v \rangle$ für alle $v \in H$. Das Problem reduziert sich also auf $\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle$ für alle $v \in H$, also $Au = f$ und $u = A^{-1}f$, da A bijektiv ist. Nach Satz 2.25.ii) gilt: Ist $|\langle u, A^{-1}w \rangle| \leq c\|u\|\|w\|$ für alle $u, w \in H$, so ist $\|A^{-1}\|_{op} \leq c$. Wegen Surjektivität von A gibt es ein $v \in H$ mit $w = Av$. Nach Cauchy-Schwarz gilt

$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| = \frac{1}{\alpha} \|u\| \alpha \|v\| \leq \frac{1}{\alpha} \|u\| \|Av\|$ für alle $u, v \in H$, woraus $\|A^{-1}\|_{op} \leq \frac{1}{\alpha}$ folgt. Das liefert $\|u\| \leq \|A^{-1}\|_{op} \|f\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{op}$. \square

Der Satz von Lax-Milgram ist die Grundlage für numerische Lösungen elliptischer partieller Differentialgleichungen. Unter den gleichen Voraussetzungen wie dort sei $V_h \subset H$ ein endlich-dimensionaler linearer Teilraum. Eine Näherungslösung $u_h \in V_h$ von $a(u_h, v) = F(v)$ für alle $v \in V_h$ wird wie folgt konstruiert: ist v_1, \dots, v_k eine Basis von V_h und $u_h = \sum_{l=1}^k c_l v_l$, dann ist der Vektor $c = (c_1, \dots, c_k)^t$ die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot c = b$ mit $A = (a(v_l, v_\nu))$ und $b = (F(v_l))$ (die Matrix A ist stets invertierbar).

Satz 3.18 Beweis. Die Lösung u_h von $a(u_h, v) = F(v)$ für alle $v \in V_h$ ist eindeutig, und für die exakte Lösung $u \in H$ gilt es gilt $\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\|$.

Wegen Linearität ist $a(u - u_h, v) = 0$ für alle $v \in V_h$, und damit

$$\alpha \|u - u_h\|^2 \leq a(u - u_h, u - u_h + v) \leq M \|u - u_h\| \|u - u_h + v\|$$

für alle $v \in V_h$, insbesondere für das Minimum. \square

3.7 Das Anfangswertproblem für die Wellengleichung

Die Wellengleichung in n Raumdimensionen lautet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2(\Delta u)(x, t), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Charakteristiken der Wellengleichung sind die Lichtkegel $c^2(t - t_0)^2 = \|x - x_0\|^2$. Diese sind als Anfangsflächen also auszuschließen. Aus physikalischen Gründen (Lichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit) ist dann die Anfangsfläche $K \subset \Omega \times \mathbb{R}$ so zu wählen, daß ihr Normalenvektor im Inneren des Lichtkegels liegt. Die einfachste Wahl, auf die wir uns beschränken, ist die Hyperfläche $\Omega \times \{0\}$, d.h. wir geben $u(x, 0) = f(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ zur Zeit $t = 0$ vor. Im allgemeinen sucht man die Zukunftsentwicklung $u(x, t)$ für $t \geq 0$.

Für $n = 1$ läßt sich durch Variablentransformation $(x, t) \mapsto (y_1 = x + ct, y_2 = x - ct)$ die Differentialgleichung in $\frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2}(y_1, y_2) = 0$ überführen. Die allgemeine Lösung ist also die Summe aus einer nur von $x + ct$ und einer nur von $x - ct$ abhängenden Funktion, die man am besten so darstellt: $u = \frac{1}{2}(f_1(x + ct) + f_1(x - ct) + f_2(x + ct) - f_2(x - ct))$. Die Anfangsbedingungen ergeben $f_1(x) = f(x)$ und $cf_2'(x) = g(x)$. Die Lösung ist somit

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(f(x + ct) + f(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} ds g(s) \right).$$

Im Hinblick auf die mehrdimensionale Verallgemeinerung führen wir den eindimensionalen Mittelungsoperator

$$(M(t)f)(x) := \frac{1}{2ct} \int_{x-ct}^{x+ct} ds f(s)$$

ein, so daß wir die Lösung der Wellengleichung wie folgt darstellen können:

Satz 3.19 *Das Anfangswertproblem der eindimensionalen Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

mit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ und $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ hat die eindeutige Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ gegeben durch

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}(tM(t)f)(x) + (tM(t)g)(x). \quad \square$$

Wenn g eine Stammfunktion hat, dann schreibt sich die Lösung als Superposition $u(x, t) = v(x-ct) + w(x+ct)$. Dabei ist v eine sich nach rechts mit Geschwindigkeit c ausbreitende Welle und w eine sich nach links mit Geschwindigkeit c ausbreitende Welle. Interessant ist auch die Diskussion des Abhängigkeitsbereichs: Ist der Träger von f, g enthalten in einem Intervall $\text{supp}(f, g) \subset [a, b]$, so gilt $u(x, t) = 0$ für $x \notin [a-ct, b+ct]$.

Die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung überträgt sich in drei Raum-Dimensionen:

Satz 3.20 *Das Anfangswertproblem für die dreidimensionale Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

mit $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$ und $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ hat die eindeutige Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$ gegeben durch

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}(tM(t)f)(x) + (tM(t)g)(x).$$

Dabei ist der Mittelungsoperator definiert als

$$(M(t)f)(x) := \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} dS(\theta) f(x + ct\theta),$$

wobei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die zweidimensionale Einheitskugel ist.

Beweis. i) Es sei $K_r(x)$ die dreidimensionale offene Kugel um $x \in \mathbb{R}^3$ mit Radius r . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(M(t)f)(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial K_1(0)} dS(\theta) \langle c\theta, (\text{grad } f)(x + ct\theta) \rangle \\ &= \frac{1}{4\pi ct^2} \int_{\partial K_{ct}(x)} dS(y) \langle \nu(y), (\text{grad } f)(y) \rangle \\ &= \frac{1}{4\pi ct^2} \int_{K_{ct}(x)} dy (\Delta f)(y) . \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde der Gaußsche Integralsatz benutzt. Das Integral über $K_{ct}(x)$ zerlegen wir in ein Integral über den Radius und ein Integral über die Winkel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(M(t)f)(x) &= \frac{1}{4\pi ct^2} \int_{K_{ct}(0)} dy (\Delta f)(x + y) \\ &= \frac{1}{4\pi ct^2} \int_0^{ct} dr r^2 \int_{S^2} dS(\theta) (\Delta f)(x + r\theta) . \end{aligned}$$

Damit können wir die zweite Zeitableitung berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(M(t)f)(x) &= -\frac{2}{4\pi ct^3} \int_0^{ct} dr r^2 \int_{S^2} dS(\theta) (\Delta f)(x + r\theta) \\ &\quad + \frac{c^2}{4\pi} \int_{S^2} dS(\theta) (\Delta f)(x + ct\theta) . \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(tM(t)f)(x) &= 2 \frac{\partial}{\partial t}(M(t)f)(x) + t \frac{\partial^2}{\partial t^2}(M(t)f)(x) \\ &= \frac{c^2 t}{4\pi} \int_{S^2} dS(\theta) (\Delta f)(x + ct\theta) = c^2 (\Delta(tM(t)f))(x) . \end{aligned}$$

Damit (und dem Satz von Schwarz) erfüllt $u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}(tM(t)f)(x) + (tM(t)g)(x)$ die Wellengleichung.

ii) Wir überprüfen die Anfangsbedingungen. Es gilt $u(x, 0) = (M(0)f)(x) = f(x)$ und dann $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c^2 (\Delta(tM(t)f))(x) + \frac{\partial}{\partial t}(tM(t)g)(x)$, also $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = (M(0)g)(x) = g(x)$.

iii) Es verbleibt der Beweis, daß jede Lösung der Wellengleichung von dieser Gestalt ist. Sei dazu $u(x, t)$ eine beliebige Lösung. Zum Parameter $t \in \mathbb{R}_+$ mitteln wir diese Lösung:

$$v_x(t, r) := r(M(r)u(\cdot, t))(x) , \quad x \in \mathbb{R}^3 , r \in \mathbb{R}_+ .$$

Da u der Wellengleichung genügt, gilt unter Verwendung der Eigenschaften des Mittelungsoperators

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2}(t, r) &= c^2(\Delta_x v_x)(t, r) = \frac{r}{4\pi} \int_{S^2} dS(\theta) (c^2 \Delta_x u)(x + cr\theta, t) \\ &= \frac{r}{4\pi} \int_{S^2} dS(\theta) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x + cr\theta, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_x(t, r) .\end{aligned}$$

Also erfüllt v_x die eindimensionale Wellengleichung mit Geschwindigkeit 1 und hat die allgemeine Lösung $v_x(r, t) = \phi_x(t + r) + \psi_x(t - r)$. Nehmen wir r als Zeitvariable, dann ist $v_x(t, 0) = 0$, also $v_x(r, t) = \phi_x(t + r) - \phi_x(t - r)$. Damit erhalten wir $\frac{\partial v_x}{\partial t}(t, r) = \phi'_x(t + r) - \phi'_x(t - r)$ und $\frac{\partial v_x}{\partial r}(t, r) = \phi'_x(t + r) + \phi'_x(t - r)$ und somit $2\phi'_x(t + r) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\right)v_x(t, r)$. Für $r = 0$ ergibt sich

$$2\phi'_x(t) = (M(0)u(\cdot, t))(x) = u(x, t) .$$

Für $t = 0$ erhalten wir unter Verwendung der Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}2\phi'_x(r) &= \frac{\partial}{\partial t}(rM(r)u(\cdot, t))(x) \Big|_{t=0} + \frac{\partial}{\partial r}(rM(r)u(\cdot, t))(x) \Big|_{t=0} \\ &= (rM(r)g)(x) + \frac{\partial}{\partial r}(rM(r)f)(x) .\end{aligned}$$

Ersetzen wir $r \mapsto t$, so folgt durch Vergleich beider Formeln die Behauptung. \square

Der Mittelungsoperator läßt sich wie folgt in eine Formel umformen, die Ähnlichkeit mit einer Greenschen Funktion hat:

$$\begin{aligned}(tM(t)f)(x) &= \frac{ct}{4\pi c} \int_{S^2} dS(\theta) f(x + ct\theta) \\ &= \frac{1}{4\pi c(ct)} \int_{\partial K_x(ct)} dS(y) f(y) = \frac{1}{4\pi c} \int_{\partial K_x(ct)} dS(y) \frac{f(y)}{\|x - y\|} .\end{aligned}$$

Damit kann man folgende Lösung der inhomogenen dreidimensionalen Wellengleichung beweisen:

Satz 3.21 (Kirchhoff) *Die Lösung der Anfangswertaufgabe*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h \text{ in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ , \quad u(x, 0) = f(x) , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

ist gegeben durch

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{1}{4\pi c} \int_{\partial K_x(ct)} dS(y) \frac{g(y)}{\|x - y\|} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial K_x(ct)} dS(y) \frac{f(y)}{\|x - y\|} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi c} \int_{K_x(ct)} dy \frac{h(y, t - \|x - y\|)}{\|x - y\|} .\end{aligned}$$

Wir lösen nun die zweidimensionale Wellengleichung durch Dimensionsreduktion:

Satz 3.22 *Das Anfangswertproblem für die zweidimensionale Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

mit $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$ und $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ hat die eindeutige Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$ gegeben durch

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}(tM(t)f)(x) + (tM(t)g)(x).$$

Dabei ist der zweidimensionale Mittelungsoperator definiert als

$$(M(t)f)(x) := \frac{1}{2\pi ct} \int_{K_0(t)} dy \frac{f(x+y)}{\sqrt{c^2 t^2 - \|y\|^2}}.$$

Beweis. Wir nehmen f, g als dreidimensionale Funktionen an, die nicht von x_3 abhängen. Wir wählen Polarkoordinaten auf der Einheitskugel $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta)$ mit $\vartheta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und $\varphi \in]0, 2\pi[$. Das Flächenelement ist dann $dS(\theta) = \cos \vartheta d\vartheta d\varphi$. Transformation auf θ_1, θ_2 erfolgt mit dem Inversen der Jacobi-Matrix $|\det(D\theta)(\vartheta, \varphi)| = \left| \det \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi \end{pmatrix} \right| = |\sin \vartheta \cos \vartheta|$. Integriert wird über die obere ($\vartheta > 0$) und untere ($\vartheta < 0$) Halbkugel. Auf der Kreislinie ($\vartheta = 0$) ist die Jacobi-Matrix nicht invertierbar, sie kann aber weggelassen werden, da es sich um eine Nullmenge handelt. Somit gilt $dS(\theta_1, \theta_2) = \frac{2}{|\sin \vartheta|} d\theta_1 d\theta_2 = \frac{2 d\theta_1 d\theta_2}{\sqrt{1-\theta_1^2-\theta_2^2}}$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} (M(t)f)(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{K_1(0)} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta_1^2-\theta_2^2}} f(x_1 + ct\theta_1, x_2 + ct\theta_2) \\ &= \frac{1}{2\pi ct} \int_{K_{ct}(0)} dy \frac{f(x+y)}{\sqrt{c^2 t^2 - \|y\|^2}}. \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit der dreidimensionalen Lösung garantiert die Eindeutigkeit. \square

Im Unterschied zur dreidimensionalen Lösung ist das Abhängigkeitsgebiet das gesamte Innere der offenen Kugel um x mit Radius ct . Das ist der Grund dafür, daß ein ins Wasser geworfener Stein Oberflächenwellen im Inneren erzeugt, während Töne im dreidimensionalen Raum sich unverfälscht ohne Nachhall ausbreiten.

3.8 Anfangs-Randwertproblem für die Wellengleichung

Die Wellengleichung sei auf beschränkte Teilmengen $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ eingeschränkt. Dann sind zusätzlich zu den Anfangsbedingungen für $u(x, t)$ zur Zeit $t = 0$ noch Randbedingungen für $x \in \partial\Omega$ zu stellen. Das Problem läßt sich durch eine Aufteilung von Ω in von den Charakteristiken durch $\partial\Omega \times \{t = 0\}$ erzeugten Gebiete lösen. Für einfache Situationen kann man durch Trennung der Variablen das Problem in ein Sturm-Liouvillesches Randwertproblem auf Ω überführen, das wir mit Hilbert-Raum-Methoden lösen können.

Beispiel 3.9 Gegeben sei das Anfangs-Randwertproblem einer am Rand eingespannten Saite der Länge L , die zur Zeit $t = 0$ an der Stelle $x_0 \in]0, L[$ um h ausgelenkt wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & (x, t) \in]0, L[\times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = f(x) &= \begin{cases} \frac{hx}{x_0} & \text{für } 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{h(L-x)}{L-x_0} & \text{für } x_0 \leq x \leq L \end{cases} & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = 0 \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

Die Anfangsdaten sind zwar nicht dreimal stetig differenzierbar, die Hilbert-Raum-Methoden führen aber dennoch zu einer Lösung.

Der Ansatz $u(x, t) = y(x)\tau(t)$ führt auf

$$y'' + \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = y(L) = 0, \quad \ddot{\tau}(t) = -c^2 \lambda \tau(t).$$

Die Gleichung für y ist ein Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem und hat die diskreten Lösungen

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{(n+1)\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Der Zeitanteil hat damit die Lösung

$$\tau_n(t) = a_n \cos \frac{(n+1)\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{(n+1)\pi ct}{L}.$$

Die Bedingung $\dot{\tau}_n(0) = 0$ für alle n liefert $b_n = 0$. Damit ist $\tau_n(0) = a_n$. Da es nur auf das Produkt τy ankommt, können wir $a_n = 1$ setzen und die Anfangsbedingung ausschließlich aus den y_n aufbauen. Die Anfangsverteilung ergibt sich

dann zu $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)$ mit

$$\begin{aligned}
f_n &= \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L dx f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \\
&= \sqrt{\frac{2}{L} \frac{h}{x_0}} \int_0^{x_0} dx x \sin \frac{n\pi x}{L} + \sqrt{\frac{2}{L} \frac{h}{L-x_0}} \int_{x_0}^L dx (L-x) \sin \frac{n\pi x}{L} \\
&= \sqrt{\frac{2}{L} \frac{h}{x_0}} \int_0^{x_0} dx x \frac{d}{dx} \left(-\frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \\
&\quad + \sqrt{\frac{2}{L} \frac{h}{L-x_0}} \int_{x_0}^L dx (L-x) \frac{d}{dx} \left(-\frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{L} \frac{h}{x_0}} \left(-\frac{Lx_0}{n\pi} \cos \frac{n\pi x_0}{L} \right) + \sqrt{\frac{2}{L} \frac{h}{x_0} \frac{L}{n\pi}} \int_0^{x_0} dx \cos \frac{n\pi x_0}{L} \\
&\quad + \sqrt{\frac{2}{L} \frac{h}{L-x_0}} \cdot \frac{L(L-x_0)}{n\pi} \cos \frac{n\pi x_0}{L} - \sqrt{\frac{2}{L} \frac{h}{L-x_0} \frac{L}{n\pi}} \int_{x_0}^L dx \cos \frac{n\pi x_0}{L} \\
&= \frac{\sqrt{2L} h L^2}{x_0(L-x_0) n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x_0}{L} .
\end{aligned}$$

Somit ist die Lösung des Problems gegeben durch

$$u(x, t) = \frac{2hL^2}{x_0(L-x_0)\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} .$$