Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 07**
Dr. J. Schürmann

Üungen zur Mathematik für Physiker IV

Abgabe: Dienstag, 24.04.07 bis 13.00 im Briefkasten 157/158. Blatt 3

Aufgabe 1. Thema: Exakte Differentialgleichungen, integrierender Faktor, Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Untersuchen Sie ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer (lokalen) Lipschitzbedingung

$$|f(x) - f(x')| \leq L \cdot |x - x'| \quad \text{für ein } L \geq 0 \text{ und alle } x, x' \in \mathbb{R}$$

(mit x' nahe x) genügen?

$$f(x) = sin(e^x),\ f(x) = e^{sin(x)} \quad \text{und} \quad f(x) = \begin{cases} x \cdot ln(x^2) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 2. Welche der folgenden Differentialgleichungen ist exakt? Man berechne ggf. eine Stammfunktion.

(a)

$$(x^3 - y^3) \cdot e^{-x} dx + 3y^2 \cdot e^{-x} dy = 0 \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b)

$$(1 + \frac{x}{y})dx + (\frac{2}{y} + \frac{x-1}{y^2})dy = 0 \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } y \neq 0.$$

Aufgabe 3. *Integrierender Faktor, der nur von einer Variablen abhängt.* Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $g, h, m : G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $h(x, y) \neq 0 \neq m(x, y)$ für alle $(x, y) \in G$. Angenommen $m(x, y) =: M(x)$ hängt nur von x ab.

(a) Zeigen Sie: die Differentialgleichung

$$M(x) \cdot g(x, y)dx + M(x) \cdot h(x, y)dy = 0 \quad \text{für } (x, y) \in G$$

ist genau dann exakt, wenn

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}}{h} = \frac{M'}{M} = (log|M|)'\,,$$

also genau dann wenn die linke Seite dieser Gleichung unabhängig von y ist.

(b) Bestimmen Sie für die Differentialgleichung

$$(1 - yx^2)dx + (yx^2 - x^3)dy = 0 \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } x, y > 0$$

wie in (a) einen Multiplikator $M = M(x)$, sowie eine Stammfunktion der mit M multiplizierten Differentialgleichung.

Aufgabe 4. Sei $C^0([a,b])$ der Banachraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem kompakten Intervall $[0,a] \subset \mathbb{R}$ mit $a > 0$, diesesmal versehen mit der (gewichteten) Norm

$$||f|| := \sup_{x\in[0,a]} |f(x)| \cdot e^{-x^2} .$$

(a) Sei $T : C^0([a,b]) \to C^0([a,b])$ die lineare Abbildung

$$(Tf)(x) := \int_0^x t \cdot f(t)\, dt .$$

Zeigen Sie bezüglich obiger gewichteten Norm die Abschätzung

$$||Tf|| \leq \frac{1-e^{-a^2}}{2} \cdot ||f|| < \frac{1}{2} \cdot ||f||$$

für alle $f \in C^0([a,b])$.

(b) Man zeige mittels des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Integralgleichung

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x t \cdot y(t)\, dt\,, \quad x \in [0,a]$$

genau eine Lösung in $C^0([a,b])$ hat. Man bestimme diese Lösung mit dem entsprechenden Iterationsverfahren (und Startpunkt y_0 die Nullfunktion).

Allgemeine Hinweise:

- Übungszeiten: Mo: 8.00-10.00 im M6 und Do: 12.00-14.00 im M4 (die Anfangszeiten sind ct.).
- Erste Übungen am Do den 12.04 und Mo den 16.04.
- Die Aufgaben sind in Zweiergruppen abzugeben.
- Briefkästen: Mo: 8.00-10.00 den Bk. 157, Do. 12.00-14.00 den Bk. 158 .
- Die erste Aufgabe ist mündlich zu bearbeiten, d.h. die entsprechenden Begriffe werden in den Übungen diskutiert. Von den anderen drei Aufgaben ist genau eine in schriftliche Form abzugeben, wobei deren Auswahl jeder Gruppe selbst überlassen ist. Jede Aufgabe wird mit 5 Punkten bewertet.
- An folgenden Terminen finden zusätzliche Tests in den Übungen statt: 26.04 bzw. 30.04, 21.05 bzw. 24.05, 18.06 bzw. 21.06.
- Klausurtermin: Sa. den 07.07.2007, 15.00-18.00.