Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 07**
Dr. J. Schürmann

Üungen zur Mathematik für Physiker IV

Abgabe: Dienstag, 19.06.07 bis 12.00 im BK 157/158. Blatt 9

Aufgabe 1. Mündliche Aufgabe zum Thema: Operatoren in Hilberträumen: orthogonale Projektion, stetige, (selbst-)adjungierte bzw. hermitesche und kompakte lineare Abbildungen bzw. Operatoren. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $M, N \subset V$ bezeichne *abgeschlossene* Unterräume, mit $P_M : V \to M \subset V$ die *orthogonale Projektion* auf M. Dann gilt $P_M^2 = P_M$ und $P_M^* = P_M$ (d.h. P_M ist idempotent und selbstadjungiert). Zeigen Sie:

(a) Ist die stetige lineare Abbildung $P : V \to V$ idempotent und selbstadjungiert, so ist P die orthogonale Projektion auf das Bild $P(V)$ von P.

(b) Es gilt $0 \le P_M \le id_V$, d.h. $0 \le \langle v, P_M(v)\rangle \le \langle v, v\rangle$ für alle $v \in V$, und $||P_M||_{op} = 1$ für $M \neq \{0\}$.

(c) $P := P_N \circ P_M$ ist genau dann eine orthogonale Projektion, wenn $P_N \circ P_M = P_M \circ P_N$ gilt. In diesem Falle ist $P = P_{M\cap N}$.

(d) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

$$(i)\quad P_M \le P_N \qquad\qquad (ii)\quad M \subset N$$
$$(iii)\quad P_N \circ P_M = P_M \qquad\qquad (iv)\quad P_M \circ P_N = P_M\,.$$

Aufgabe 2. Sei $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ mit 1 an der i-ten Stelle die *kanonische Orthonormalbasis* von $\ell^2(\mathbb{N})$. Für eine stetige (d.h. beschränkte) lineare Abbildung $A : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ definiere man deren *Matrixkoeffizienten* durch

$$a_{n,m} := \langle A(e_m), e_n\rangle \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}.$$

Der Operator A heisst *Hilbert-Schmidt-Operator*, wenn $(a_{n,m})_{n,m} \in \ell^2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ ist. Zeigen Sie:

(a) A ist durch seine Matrixkoeffizienten $(a_{n,m})_{n,m}$ eindeutig festgelegt, und die *Adjungierte* A^* von A wird durch die *transponiert-konjugierten* Matrixkoeffizienten $(\bar{a}_{m,n})_{n,m}$ beschrieben.

(b) Zu jedem $(a_{n,m})_{n,m} \in \ell^2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ gibt es eine stetige lineare Abbildung $A : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ mit diesen Matrixkoeffizienten, und es gilt

$$||A||_{op} \le ||A||_{HS} := \sqrt{\sum_{n,m} |a_{n,m}|^2}\,.$$

(c) Jeder Hilbert-Schmidt-Operator A auf $\ell^2(\mathbb{N})$ ist *kompakt*.
Hinweis: Man approximiere A in der Operatornorm durch (stetige) lineare Abbildungen mit endlich dimensionalem Bild.

Aufgabe 3. Sei $V \subset \ell^2(\mathbb{N})$ der *dichte* Unterraum der Folgen mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Koeffizienten. Insbesondere gilt für die kanonischen Basisvektoren e_i (wie in Aufgabe 2): $e_i \in V$. Jede Folge $d : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ definiert eine lineare Abbildung $A_d : V \to V$ durch

$$(x_n)_n \mapsto (d(n) \cdot x_n)_n \, ,$$

d.d. jeder Basisvektor e_i ($i \in \mathbb{N}$) ein *Eigenvektor* von A_d zum *Eigenwert* $d(i)$ ist. Zeigen Sie:

(a) A_d lässt ich genau dann zu einer stetigen linearen Abbildung $A_d : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ fortsetzen, wenn d beschränkt ist (dieses entspricht einer Diagonalmatrix in der Notation von Aufgabe 2). In diesem Falle ist A_d *normal*, d.h. $A_d \circ A_d^* = A_d^* \circ A_d$, und es gilt:

$$||A_d||_{op} \leq ||d||_\infty := \sup \{|d(i)| \mid i \in \mathbb{N}\} \, .$$

(b) Ist d eine Nullfolge, so ist diese Fortsetzung *kompakt*.
Hinweis: Man approximiere A_d in der Operatornorm durch (stetige) lineare Abbildungen mit endlich dimensionalem Bild.

(c) Ist umgekehrt die Fortsetzung $A_d : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ *kompakt*, so ist d eine Nullfolge.
Hinweis: Vergleiche mit dem Beweis von Satz 2.35 ii).

Aufgabe 4. (*n-te Wurzel.*) Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $T : H \to H$ ein *kompakter* Operator. Zeigen Sie:

(a) Ist T auch *selbstadjungiert* mit $T \geq 0$, d.h. ist $\langle v, T(v) \rangle \geq 0$ für alle $v \in H$, so gibt es zu jedem $0 \neq n \in \mathbb{N}$ genau einen selbstadjungierten kompakten Operator $S : H \to H$ mit $S \geq 0$ und $S^n = T$.
Hinweis: Benutzen Sie den Spektralsatz 2.35 für selbstadjungierte kompakte Operatoren.

(b) $T^* \circ T$ ist ein selbstadjungierter kompakter Operator mit $T^* \circ T \geq 0$. Definiert man mittels (a) $|T| := \sqrt{T^* \circ T}$, so gilt $||\, |T|(v) \,|| = ||T(v)||$ für alle $v \in H$.