Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. R. Brüske

SS 08

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe: Montag, 21.04.08, vor der Vorlesung in den Briefkästen — Blatt 2

Aufgabe 1. Man bestimme sämtliche Lösungen von

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2_4 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Für welche $b \in \mathbb{Q}$ ist

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= b \end{aligned}$$

lösbar? Man beschreibe für diese b die Lösungsmenge.

Aufgabe 3. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) \,.$$

Zeigen Sie: Das LGS

$$\begin{aligned} ax + by &= \alpha \\ cx + dy &= \beta \end{aligned}$$

ist genau dann für $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{1}{0}$ und $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{0}{1}$ lösbar, wenn $ad - bc \neq 0$. Wie lauten dann jeweils die Lösungen?

Bemerkung: Diese Rechnung beweist, daß $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ genau dann invertierbar ist, wenn gilt $\det A \neq 0$. Das Inverse quadratischer Matrizen und die Determinante werden später im Semester eingeführt.

Aufgabe 4. Zeige Sie: Für alle $a, b, A, B \in \mathbb{Q}$ mit $\binom{a}{b} \neq \binom{0}{0}$ gibt es eindeutig bestimmte $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ mit $(a + b\sqrt{2})(\alpha + \beta\sqrt{2}) = A + B\sqrt{2}$.

Bemerkung: Das ist der entscheidende Teil des Beweises, daß

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{\alpha + \beta\sqrt{2} \;:\; \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$$

ein Körper ist. Es wird damit gezeigt, daß für alle $a + b\sqrt{2} \neq 0$, mit $a, b \in \mathbb{Q}$, auch $\frac{1}{a+\sqrt{2}b} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ gilt.