Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 08**
Dr. R. Brüske

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe: Donnerstag, 29.05.08, vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 6

Aufgabe 1. Man untersuche, ob in den folgenden Beispielen der $\mathbb{R}^3$ die direkte Summe der Untervektorräume U, W ist:

a)
$$\begin{aligned} U &:= \{(x_1,x_2,x_3) \;:\; x_1+x_2+x_3=0,\; x_2=x_3\} \\ W &:= \{(x_1,x_2,x_3) \;:\; x_1+2x_2=0,\; x_1=x_3\} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} U &:= \{(x_1,x_2,x_3) \;:\; x_1+x_2+x_3=0,\; x_1+2x_2=0\} \\ W &:= \{(x_1,x_2,x_3) \;:\; x_1+2x_2=0\} \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Für $n \geq 2$ sei $v_i := \sum_{j=1}^n e_j + (i-1)e_i$, wobei (e_i) die Standardbasis im $\mathbb{R}^n$ ist. Man untersuche, ob $(v_1,\dots,v_n)$ Basis des $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 3. Es sei P_n der Vektorraum aller Polynome in der reellen Variablen x vom Grad $\leq n$. Es sei $D_n : P_n \to P_{n-1}$ die Differentiation und $I_n : P_n \to P_{n+1}$ die Abbildung $I_n : \sum_{i=0}^n a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}$.
a) Zeigen Sie: $(x^0,\dots,x^n)$ ist Basis von P_n.
b) Stellen Sie für I_n, D_n und $I_{n-1}\circ D_n, D_{n+1}\circ I_n$ die darstellenden Matrizen bezüglich der Basen aus a) auf.

Aufgabe 4. Es sei V Vektorraum und $U \subset V$ Untervektorraum mit $\dim U = k < \dim V = n < \infty$. Es sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus mit $F(U) \subset U$.
Zeigen Sie: Es gibt eine Basis $\mathcal{B} = (v_1,\dots,v_n)$ von V, so daß für die darstellende Matrix $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = (a_{ij})$ von F bezüglich $\mathcal{B}$ gilt: $a_{ij} = 0$ für $i > k$ (mit $i,j \in \{1,\dots,n\}$).