Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. R. Brüske **SS 08**

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe: Donnerstag, 03.07.08, vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 11

Aufgabe 1. Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V. Dann heißt die Matrix $G_{\mathcal{B}} := (\langle v_i, v_j\rangle)$ *Fundamentalmatrix* des Skalarprodukts bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.
Zeige: Ist $\mathcal{A} = (w_1, \dots, w_n)$ eine weitere Basis von V, so gilt

$$G_{\mathcal{B}} = \overline{(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V))^t} \cdot G_{\mathcal{A}} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)\ ,$$

also $\det G_{\mathcal{B}} = \left|\det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)\right|^2 \det G_{\mathcal{A}}$.

Aufgabe 2. Zeige: Ist $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt und sind $v_1, \dots, v_r \in V$ beliebig, so gilt:

$$\det(\langle v_i, v_j\rangle) \neq 0 \iff v_1, \dots, v_r \text{ linear unabhängig}\ .$$

Aufgabe 3. Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle$ ein komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt. Zeige:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\{\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle\} - \frac{\mathrm{i}}{4}\{\langle x+\mathrm{i}y, x+\mathrm{i}y\rangle - \langle x-\mathrm{i}y, x-\mathrm{i}y\rangle\} \quad \forall\, x, y \in V\ .$$

Aufgabe 4. Man überprüfe, ob

$$\langle (y_1, y_2, y_3), (x_1, x_2, x_3)\rangle := (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$ liefert.
Hinweis: Man verwende Aufgabe 1.