Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. R. Brüske **SS 08**

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe: Donnerstag, 10.07.08, vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 12

Aufgabe 1. Es sei $P_n \subset \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome in der reellen Variablen x vom Grad $\leq n$ und $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} dx\; f(x)g(x)$.

a) Man überführe durch das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren die Familie $(1, x, x^2, x^3)$ in eine Orthonormalbasis von P_3.

b) Man berechne den Abstand von $x^4 \in P_4$ zum Untervektorraum $P_3 \subset P_4$.

Aufgabe 2. Es sei $P_n \subset \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome in der reellen Variablen x vom Grad $\leq n$ und $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{0}^{\infty} dx\; f(x)g(x)\, e^{-x}$.

a) Man überführe durch das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren die Familie $(1, x, x^2, x^3)$ in eine Orthonormalbasis von P_3.

b) Man berechne den Abstand von $x^4 \in P_4$ zum Untervektorraum $P_3 \subset P_4$.

Aufgabe 3. Zeige:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} \qquad \text{für alle } x \in [-\pi, \pi]$$

sowie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ und $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

Hinweis: Man denke sich $|x|$ als (2π)-periodisch fortgesetzt zu einer auf $\mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbaren Funktion und arbeite mit dem Skalarprodukt in $\mathcal{C}_{sw}([0, 2\pi])$ aus der Vorlesung.

Aufgabe 4. Zeige:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1} \qquad \text{für alle } x \in [0, 2\pi]$$

sowie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.