Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **SS 10**

Probeklausur zur Mathematik für Physiker II

Die Klausur wird aus zwei Teilen bestehen:

- Im Teil A, den es in der Probeklausur nicht gibt, wird das theoretische Verständnis der behandelten Themen abgefragt.
- Teil B besteht aus Aufgaben, die mit denen der Probeklausur vergleichbar sind. Alle Lösungsschritte sind nachvollziehbar zu begründen.

Einziges zugelassenes Hilfsmittel ist ein selbst zusammengestelltes A4-Blatt (ein- oder zweiseitig, handgeschrieben oder per Computer) mit Notizen.

Teil B

Aufgabe 1. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := x^3 - y^2 - 6xy - 9x + 4y$. Bestimmen Sie alle Kandidaten für lokale Extrema von f auf $\mathbb{R}^2$ und entscheiden Sie, ob es sich um lokale Maxima oder Minima handelt.

Aufgabe 2. Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $$\int_0^1 dx\, \frac{x+1}{x^2+2x-8}$$

b) $$\int_1^\infty dx\, (x^2+x+1)e^{-x}$$

c) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\, \frac{1}{2+\sin x}$$

Aufgabe 3. Für $t \in \mathbb{R}$ sei $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t & -1 \\ t & 2 & -1 \\ 1 & 3-t & -t \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie $\operatorname{rang}(A(t))$ als Funktion von t.
b) Es sei $r = \operatorname{rang}(A(1))$. Bestimmen Sie Matrizen $L, R \in GL(3,\mathbb{R})$, so daß gilt

$$A(1) = L \cdot \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot R^{-1}\,.$$

Aufgabe 4. Durch $F(x,y,z) = (x+2y-z,\ -y+z,\ x-2y+z)$ werde ein Endomorphismus $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ definiert. Bestimmen Sie alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ von F sowie einen Eigenvektor zum größten Eigenwert.

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Matrix $\ln(E_2+A) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k$ für $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6. Im euklidischen $\mathbb{R}^4$ (mit dem Standard-Skalarprodukt) sei $U := \mathrm{span}(v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie durch das Verfahren von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis von U.

b) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U in $\mathbb{R}^4$.

c) Berechnen Sie den Abstand des Vektors $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu U.