Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 10**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe: Bis Donnerstag, den 22.04., vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 1

Aufgabe 1. Sei n eine natürliche Zahl, A eine reelle $n \times n$-Matrix und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \langle x, Ax\rangle = \sum_{i,j} x_i a_{ij} x_j \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeige: $(\operatorname{grad} f)(x) = Ax + A^T x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, wobei A^T die zu A transponierte Matrix bezeichnet, gegeben durch $A^T = (b_{ij})_{i,j}$ mit $b_{ij} = a_{ji}$ für alle i, j.

Aufgabe 2. Die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} \qquad \text{und} \qquad g(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \text{für alle } (x,y) \neq (0,0)$$

sowie $f(0,0) = g(0,0) = 0$. Zeige:

(a) Die Funktion f ist überall partiell differenzierbar, aber in $(0,0)$ nicht stetig.

(b) Die Funktion g ist überall stetig und zweimal partiell differenzierbar, aber $(\partial_x\partial_y g)(0,0) \neq (\partial_y\partial_x g)(0,0)$.

Wie sind diese Beispiele mit dem Satz von Schwarz vereinbar?

Aufgabe 3. Bestimme für die folgenden Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ alle Punkte, in denen der Gradient verschwindet, die Hesse-Matrix in diesen Punkten, und prüfe, ob die Funktion an diesen Punkten ein lokales Extremum annimmt:

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + xy - 7, \qquad g(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 1.$$

Aufgabe 4. Seien $\beta \in \mathbb{N}^n$ ein Multi-Index, $n, d \in \mathbb{N}$ und $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1,\ldots,x_n) = (x_1+\cdots+x_n)^d, \qquad g(x_1,\ldots,x_n) = x^\beta$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Ferner sei für jeden Multi-Index $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\beta - \alpha := (\beta_1-\alpha_1,\ldots,\beta_n-\alpha_n), \qquad \alpha \leq \beta :\Leftrightarrow \alpha_1 \leq \beta_1, \ldots, \alpha_n \leq \beta_n.$$

(a) Berechne für jeden Multi-Index $\alpha \in \mathbb{N}^n$ die partiellen Ableitungen $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f$ und $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha g$. Unterscheide dabei die Fälle $|\alpha| \leq d$ und $|\alpha| > d$ sowie $\alpha \leq \beta$ und $\alpha > \beta$.

(b) Beweise durch Entwicklung von f und g in Taylorreihen die Gleichungen ($y \in \mathbb{R}^n$)

$$(x_1+\cdots+x_n)^d = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,\ |\alpha|=d} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}x^\alpha, \quad (x+y)^\beta = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,\ \alpha\leq\beta} \frac{\beta!}{\alpha!(\beta-\alpha)!}x^\alpha y^{\beta-\alpha}.$$