Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 10**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe: Bis Donnerstag, den 29.04., vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 2

Aufgabe 1. (a) Sei $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ stetig partiell differenzierbar. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

i) γ verläuft auf der Oberfläche einer Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung.

ii) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\gamma(t)$ und $\gamma'(t)$ orthogonal in dem Sinne, dass $\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$.

Aufgabe 2. (a) Zeige: Für je zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$ und $w \neq 0$ ist

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \measuredangle(v, w)$$

wobei $\measuredangle(v, w)$ den Winkel zwischen v und w bezeichne. (*Hinweis:* Schreibe $v = \|v\|(\cos\alpha, \sin\alpha)$ und $w = \|w\|(\cos\beta, \sin\beta)$ mit gewissen Winkeln α, β und benutze ein Additionstheorem für Winkelfunktionen.)

(b) Sei $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) = (t^2 - 1, t^3 - t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Bestimme alle Punkte im $\mathbb{R}^2$, in denen sich die Kurve selbst schneidet, und bestimme jeweils den Cosinus des Winkels zwischen den Tangenten an die Kurve in diesen Schnittpunkten.

Aufgabe 3. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2).$$

(a) Benutze die bekannten Reihenentwicklung für die Sinusfunktion, um f als Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt $(0, 0)$ zu schreiben.

(b) Berechne explizit die partiellen Ableitungen $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f(x_1, x_2)$ für alle Multi-Indizes $\alpha \in \mathbb{N}^2$ an allen Punkten $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Stelle die Taylorreihe für f zum Entwicklungspunkt $(0, 0)$ auf und vergleiche diese mit der in (a) gefundenen Reihe.

Aufgabe 4. (a) Berechne für die Exponentialfunktion die Riemannschen Unter- und Obersummen bezüglich einer äquidistanten Zerlegung eines Intervalls $[a, b]$ in n Teilintervalle. (*Hinweis:* Verwende die geometrische Reihe.)

(b) Zeige, dass die Unter- und Obersummen in (a) für $n \to \infty$ jeweils gegen $\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a$ konvergieren. (*Hinweis:* Verwende die Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion in 0.)