Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 10**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe: Bis Mittwoch, den 12.05., 18.00 Uhr in den Briefkästen — Blatt 4

Aufgabe 1. Berechne die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe von Substitution:

$$\text{(a)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \, \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4}, \qquad \text{(b)} \int_0^4 \mathrm{d}x \, \frac{x}{\sqrt{1+2x}}, \qquad \text{(c)} \int_2^3 \mathrm{d}x \, \frac{4x^5}{x^4 - 2x^2 + 1}.$$

(*Hinweis:* Probiere in (b) $t = \sqrt{1+2x}$.)

Aufgabe 2. Berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\text{(a)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{4+x^2}}, \qquad \text{(b)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}, \qquad \text{(c)} \int \mathrm{d}x \, \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x}.$$

(*Hinweis:* Substituiere in (a) $x = 2\tan t$ und in (b) $t = \tan \frac{x}{2}$.)

Aufgabe 3. Untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$\text{(a)} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}, \qquad \text{(c)} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \ln x, \qquad \text{(d)} \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4}.$$

Aufgabe 4. (a) Zeige mit Hilfe der Taylorreihe für die Funktion $x \mapsto (1+x)^m$ mit $m = -1/2$, dass

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n\cdot(2n-2)\cdots 4\cdot 2} x^{2n} \quad \text{für alle } x \in (-1,1).$$

(b) Gewinne durch gliedweise Integration eine Potenzreihenentwicklung der Funktion $x \mapsto \arcsin x$ für $x \in (-1,1)$.

(c) Zeige, dass die Reihe in (b) auch für $x = 1$ konvergiert, und schlussfolgere

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n\cdot(2n-2)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$