Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **SS 10**

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe: Bis Donnerstag, den 20.05., vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 5

Aufgabe 1. (a) Gewinne durch gliedweise Integration aus der geometrischen Reihe und der Formel

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

eine Potenzreihenentwicklung der Funktion $x \mapsto \ln(1+x)$ für $x \in (-1,1)$.

(b) Sei folgende Formel gegeben: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Beweise mit Hilfe der obigen Potenzreihe und gliedweiser Integration die Formel

$$\lim_{t\to 0} \int_{|t|}^1 \mathrm{d}x \, \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Aufgabe 2. Die *Betafunktion* ist für alle Zahlen $a > 0$ und $b > 0$ definiert durch

$$B(a,b) = \int_0^1 \mathrm{d}x \, x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

Seien $a, b > 0$. Zeige:

(a) Das obige Integral konvergiert auch im Fall $0 < a, b < 1$ und es gilt $B(a,b) = B(b,a)$.

(b) $B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1)$ im Fall $b > 1$.

(c) $B(a,n) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}$ falls $b = n > 1$ eine natürlichen Zahl.

(d) $B(a,b) = \int_0^\infty \mathrm{d}y \, \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}$. (*Hinweis:* Substituiere $x = \frac{y}{1+y}$.)

Aufgabe 3. Sei $b > 0$ und sei $\gamma(a)$ für $a > 0$ definiert durch

$$\gamma(a) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b)} B(a,b).$$

Zeige, dass die so definierte Funktion γ die Voraussetzungen des Satzes von Bohr-Mollerup erfüllt, und schlussfolgere die Formel $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a,b)$. (*Hinweis:* Benutze die Hölder-Ungleichung.)

Aufgabe 4. (a) Seien $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots$ reelle Zahlen mit der Eigenschaft, dass die Folge der Funktionen $F_1, F_2, \ldots : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$F_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big),$$

gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeige:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \, f(x) \cos(kx) \quad \text{und} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \, f(x) \sin(kx) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

(b) Berechne für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ -1, & x \in ((2k+1)\pi, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots$ und $b_1, b_2, \dots$ nach den in (a) gegebenen Formeln.

(*Bemerkung:* Später in der Vorlesung werden wir bei der Behandlung von Fourierreihen sehen, in welchem Sinn die mit diesen Koeffizienten gebildete Folge von trigonometrischen Polynomen $F_1, F_2, \dots$ gegen f konvergiert.)