Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 10**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe: Bis Donnerstag, den 10.06., vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 7

Aufgabe 1. Bestimme die Dimension und eine Basis von Kern und Bild der folgenden Matrizen:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 13 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Prüfe, ob es eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ gibt mit $F(v_i) = w_i$ für $i = 1, \dots, 4$ und

(a) $v_1 = (0,0,1), \quad v_2 = (2,1,1), \quad v_3 = (0,1,1), \quad v_4 = (2,0,1),$
$w_1 = (1,1,1,1), \quad w_2 = (1,0,1,0), \quad w_3 = (0,0,0,1), \quad w_4 = (2,1,2,1),$

(b) v_i wie in (a),
$w_1 = (1,1,1,1), \quad w_2 = (1,1,1,0), \quad w_3 = (0,1,1,1), \quad w_4 = (2,1,1,0).$

Aufgabe 3. Sei $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$F\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_4 \\ x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

und seien

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimme die darstellende Matrix $M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}(F)$ von F. (*Hinweis:* Löse das entstehende lineare Gleichungssystem für alle zu betrachtenden rechten Seiten simultan.)

Aufgabe 4. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ und definiere $f, g, h\colon M(2,\mathbb{R}) \to M(2,\mathbb{R})$ durch

$$f(X) = AX, \qquad g(X) = XA, \qquad h(X) = AX - XA \qquad \text{für alle } X \in M(2,\mathbb{R}).$$

Bestimme für jede dieser Abbildungen die Darstellungsmatrix bezüglich der Basis

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Dimension und eines Basis des Kerns.