Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann

SS 10

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe: Bis Donnerstag, den 24.06., vor der Vorlesung in den Briefkästen — Blatt 9

Aufgabe 1. Untersuche, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind, und bestimme gegebenenfalls die Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

(a) Berechne die Produkte AB und BA für $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

(b) Zeige, dass A genau dann invertierbar ist, falls $ad - bc \neq 0$, und bestimme in diesem Fall A^{-1}.

(c) Bestimme alle Matrizen $C \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, die gleichzeitig $C = C^T$ und $C^2 = 1$ erfüllen.

Aufgabe 3. Sei V ein Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Eine Abbildung $g\colon V \to V$ heißt *rechts-invers* zu f, falls $f \circ g = \mathrm{Id}_V$. Zeige:

(a) Falls es genau eine zu f rechts-inverse Abbildung g gibt, so ist f invertierbar und $f^{-1} = g$. (*Hinweis:* Betrachte die Abbildung $g \circ f + g - \mathrm{Id}_V$.)

(b) Falls es verschiedene zu f rechts-inverse Abbildungen gibt, so ist $\dim V = \infty$.

Aufgabe 4. Bestimme für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

ein $r \in \mathbb{N}$ und quadratische Matrizen L, R so, dass

$$A = L \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R^{-1}.$$