Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 10**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe: Bis Donnerstag, den 01.07., vor der Vorlesung in den Briefkästen — Blatt 10

Aufgabe 1. Zeige, dass es keine *reelle* 2×2-Matrix A gibt mit

(a) $AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (c) $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, (d) $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2. (a) Zeige: Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$, wobei $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

(b) Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Zeige: $\det(C(m,n)) = 1$, wobei

$$C(m,n) = \begin{pmatrix} 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \cdots & \binom{m}{n} \\ 1 & \binom{m+1}{1} & \binom{m+1}{2} & \cdots & \binom{m+1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{m+n}{1} & \binom{m+n}{2} & \cdots & \binom{m+n}{n} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. (a) Seien $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige: $\det(A_n) = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$, wobei

$$A_n = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R}).$$

(b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$. Zeige: $\det(B_n) = \prod_{1 \le i < j \le n}(x_i - x_j)$, wobei

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die *Spur* einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ ist definiert als die Summe ihrer Diagonaleinträge: $\mathrm{Spur}(A) := \sum_i a_{ii}$. Beispielsweise gilt

$$\mathrm{Spur} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1+5+9 = 15, \quad \mathrm{Spur} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0+0 = 0, \quad \mathrm{Spur}\, E_n = n.$$

Zeige:

(a) $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ für alle $A, B \in M(n \times n, \mathbb{C})$.

(b) Die Spur ist die Ableitung der Determinante an der Einheitsmatrix, also

$$\lim_{t\to 0} \frac{\det(E_n + tA) - \det(E_n)}{t} = \mathrm{Spur}(A) \quad \text{für alle } A \in M(n \times n, \mathbb{C}).$$

Aufgabe 5. Berechne für die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.

Aufgabe 6. Wir betrachten ein Polynom $p(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X^1 + a_0$ mit komplexen Koeffizienten $a_{n-1}, \ldots, a_0$ und eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Sei $p(A) := A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0E_n$. Zeige:

(a) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A)$.

(b) Ist λ' ein Eigenwert von $p(A)$, so gibt es einen Eigenwert λ von A mit $\lambda' = p(\lambda)$. (*Hinweis:* Schreibe $p(X) - \lambda' = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$ mit geeigneten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$).