Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **SS 10**

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe: Bis Donnerstag, den 08.07., vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 11

Aufgabe 1. Bestimme für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) alle Eigenwerte, (b) die zugehörigen Eigenvektoren, (c) eine invertierbare Matrix P und eine Diagonalmatrix D mit $D = P^{-1}AP$, (d) die Matrix A^4.

Aufgabe 2. Seien $k \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$. Rekursiv definieren wir $a_n \in C$ für $n > k$ durch $a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}$.

(a) Bestimme eine Matrix $A \in M(k \times k, \mathbb{C})$ so, dass für alle $n > k$ gilt:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimme das charakteristische Polynom von A.

(c) Zeige: Ist λ ein Eigenwert von A, so ist $(\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \ldots, \lambda, 1)^T$ ein zugehöriger Eigenvektor.

Aufgabe 3. Die Folge $(a_n)_n$ *Fibonacci-Zahlen* ist rekursiv definiert durch $a_1 = a_2 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für alle $n > 2$. Für jedes $n \geq 1$ sei $v^{(n)} = (a_n, a_{n-1})^T$. Bestimme

(a) eine Matrix A, die $v^{(n+2)} = A^n v^{(2)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt;

(b) die Eigenwerte und Eigenvektoren von A;

(c) Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ so, dass $a_{n+1} = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt;

(d) den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Aufgabe 4. (a) Bestimme mit Hilfe des Gram-Schmidt-Orthonormierungsverfahrens eine Orthonormalbasis für den Unterraum U von $\mathbb{C}^4$, der von folgenden Vektoren aufgespannt wird:

$$v_1 = (1,1,1,1)^T, \qquad v_2 = (1,1,2,4)^T, \qquad v_3 = (1,2,-4,-3)^T.$$

(b) Bestimme den Abstand von $w = (1,2,3,4)^T$ zu U.

Aufgabe 5. Das *Kreuzprodukt* $v \times w$ zweier Vektoren $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ und $w = (w_1, w_2, w_3)^T$ im $\mathbb{R}^3$ ist der Vektor

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass für alle $u, v, w, x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:

(a) $v \times w$ ist orthogonal zu v und w.

(b) $\|v \times w\|^2 = \|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2$.

(c) $\|v \times w\| = \|v\|\|w\| \sin\alpha$, wobei α den (kleineren) Winkel zwischen v und w bezeichne.

(d) Der Abstand zweier windschiefer Geraden $u + \mathbb{R}x$ und $v + \mathbb{R}y$ (d.h. (x, y) linear unabhängig) ist gegeben durch $\|\langle u - v, x \times y\rangle\|/\|x \times y\|$.

Aufgabe 6. Wir betrachten $C([-1, 1])$ als Vektorraum mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} \overline{f(x)}g(x)\mathrm{d}x \quad \text{für alle } f, g \in C([-1, 1]).$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist das *n-te Legendre-Polynom* gegeben durch

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

(a) Zeige, dass das Gram-Schmidt-Orthonormierungsverfahren für die Polynome $1, x, x^2$, betrachtet als Elemente von $C([-1, 1])$, die Polynome $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ liefert.

(b) Zeige, dass die Familie $(P_n(x))_n$ orthogonal in $C([-1, 1])$ ist. (*Hinweis:* Verwende iterierte partielle Integration.)