Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 11**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Funktionalanalysis

Besprechung am 13.04.2011 Blatt 1

Aufgabe 1. (a) Was ist ein metrischer Raum?

(b) Welche der folgenden Abbildungen $d_1, \dots, d_4 \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist eine Metrik?

$$d_1(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases} \qquad d_2(x,y) = \begin{cases} |x_1 - y_1|, & x_2 = y_2, \\ |x_1| + |x_2 - y_2| + |y_1|, & x_2 \neq y_2, \end{cases}$$

$$d_3(x,y) = |x_1 - y_1||x_2 - y_2|, \quad d_4(x,y) = \left(|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p\right)^{1/p}, \ p \in (0,\infty).$$

Aufgabe 2. (a) Wann heißt ein metrischer Raum vollständig?

(b) Prüfe, welcher der folgenden metrischen Räume vollständig ist:

i) $\mathbb{R}^2$ mit den Metriken aus Aufgabe 1(b);

ii) $C([0,1])$ mit der L^1-Metrik $d(f,g) = \int_{[0,1]} |f(t) - g(t)| dt$;

iii) $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

Aufgabe 3. (a) Wann heißt ein metrischer Raum kompakt? Charakterisiere Kompaktheit mit Hilfe von i) Folgen, ii) offenen Überdeckungen, iii) abgeschlossenen Mengen.

(b) Prüfe, welcher der folgenden Räume kompakt ist:

i) $X = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ mit der Metrik $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$, wobei

$$f \colon X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -1, & x = -\infty, \\ \frac{x}{1+|x|}, & x \in (0,\infty), \\ 1, & x = \infty; \end{cases}$$

ii) $\{f \in C([0,1]) : \|f\|_\infty \leq 1\}$ mit der Metrik $d(f,g) = \|f - g\|_\infty$. Dabei ist $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ die Supremums-Norm.

Aufgabe 4. Seien $f \colon X \to Y$ eine Abbildung topologischer Räume, $X_1, X_2 \subseteq X$ mit $X_1 \cup X_2 = X$ sowie $f|_{X_i} \colon X_i \to Y$ stetig für $i = 1, 2$. Zeige:

(a) Die Abbildung f braucht nicht stetig zu sein.

(b) Sind X_1, X_2 beide offen, so ist f stetig.

(c) Sind X_1, X_2 beide abgeschlossen, so ist f stetig.