Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 11**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Funktionalanalysis

Abgabe: Bis 12.04.2011, 12 Uhr, in den Briefkästen Blatt 2

Aufgabe 1. Sei X die Menge aller Abbildungen $f\colon [0,1] \to \{0,1\}$. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heiße *offen*, falls für jedes $f \in U$ eine endliche Teilmenge $F \subseteq [0,1]$ existiert mit $\{g \in X : g|_F = f|_F\} \subseteq U$. Zeige:

(a) Die offenen Mengen erfüllen die Axiome einer Topologie.

(b) Eine Folge $(f_n)_n$ in X konvergiert genau dann gegen ein $f \in X$, wenn $\lim_n f_n(t) = f(t)$ für jedes $t \in [0,1]$ gilt.

(c) Die unten rekursiv definierte Folge $(f_n)_n$ besitzt keine konvergente Teilfolge:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1/2, \\ 1, & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}, \quad f_{n+1}(t) = \begin{cases} f_n(2t), & 0 \leq t < 1/2, \\ f_n(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (n \geq 1).$$

(*Bemerkung:* Nach dem Satz von Tychonoff ist X kompakt und nach (c) nicht folgenkompakt.)

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Vektorraum. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt *konvex*, falls $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$ für alle $x, y \in A$ und $\lambda \in [0,1]$. Zeige:

(a) Ist $A \subseteq X$ offen, so ist auch die kleinste A enthaltende konvexe Teilmenge von X offen.

(b) Ist $A \subseteq X$ kompakt und $B \subseteq X$ abgeschlossen, so ist auch $A + B$ abgeschlossen. (*Hinweis:* Verwende offene Überdeckungen.)

Aufgabe 3. Sei $\mathrm{Lip}([0,1])$ der Raum aller Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, für die gilt:

$$L(f) := \sup\left\{ \frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|} : s,t \in [0,1], s \neq t \right\} < \infty.$$

Zeige:

(a) Die Abbildung $f \mapsto \|f\| := L(f) + |f(0)|$ ist eine Norm auf $\mathrm{Lip}([0,1])$.

(b) Bezüglich dieser Norm ist $\mathrm{Lip}([0,1])$ ein Banachraum. (*Hinweis:* Verwende eine Isometrie $(\mathrm{Lip}([0,1]), \|\cdot\|) \to (C_b(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ für einen geeigneten Raum Ω.)

Aufgabe 4. Sei $K \in C([0,1] \times [0,1])$ nicht-negativ und $T_K, S_K\colon C([0,1]) \to C([0,1])$ definiert durch

$$(T_K(f))(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\,dy, \qquad (S_K(f))(x) = \int_x^1 K(x,y) f(y)\,dy.$$

(a) Zeige: $\|T_K\| = \max_{0 \leq y \leq 1} \int_0^1 K(x,y)dx$, d.h. $\|T_K(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \max_{0 \leq y \leq 1} \int_0^1 K(x,y)dx$ für alle $f \in C([0,1])$.

(b) Berechne $\|S_K\|$.