Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 11**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Funktionalanalysis

Abgabe: Bis 10.05.2011, 12 Uhr, in den Briefkästen Blatt 5

Aufgabe 1. Sei X ein Vektorraum mit Halbnormen $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ und sei f ein Funktional auf X mit $|f(x)| \leq |x|_1 + |x|_2$ für alle $x \in X$. Zeige:

(a) Durch $|(x_1, x_2)| := |x_1|_1 + |x_2|_2$ wird auf $X \times X$ eine Halbnorm definiert.

(b) Es gibt Funktionale f_1, f_2 auf X mit $f = f_1 + f_2$ und $|f_1(x)| \leq |x|_1$, $|f_2(x)| \leq |x|_2$ für alle $x \in X$.
(*Hinweis:* Anwendung von Hahn-Banach auf $\{(x,x) : x \in X\} \subseteq X \times X$.)

Aufgabe 2. Sei X ein normierter Raum. Bezeichne $\ell^\infty(\mathbb{N}; X')$ den normierten Raum aller Folgen $(f_n)_n$ von Funktionalen auf X mit $\sup_n \|f_n\| < \infty$, wobei $\lambda(f_n)_n = (\lambda f_n)_n$, $(f_n)_n + (g_n)_n = (f_n + g_n)_n$, $\|(f_n)_n\| = \sup_n \|f_n\|$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $\epsilon_k \in (\ell^\infty)'$ definiert durch $(\lambda_n)_n \mapsto \lambda_k$. Zeige:

(a) Die Vorschrift $T \mapsto (\epsilon_k \circ T)_k$ definiert einen isometrischen Isomorphismus $\Phi \colon \mathcal{L}(X, \ell^\infty) \to \ell^\infty(\mathbb{N}, X')$.

(b) Für jeden Unterraum $Y \subseteq X$ ist die Abbildung $\mathcal{L}(X, \ell^\infty) \to \mathcal{L}(Y, \ell^\infty)$, $T \mapsto T|_Y$, surjektiv.
(*Hinweis:* Komponentenweise Anwendung von Hahn-Banach.)

Aufgabe 3. Sei $(X, \leq)$ ein *geordneter Vektorraum*, also ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer Relation, die für alle $x, y, z \in X$, $\lambda \in [0, \infty)$ folgende Bedingungen erfüllt:

$$x \leq x, \quad x \leq y \text{ und } y \leq z \Rightarrow x \leq z, \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \text{ und } \lambda x \leq \lambda y.$$

Sei $Y \subseteq X$ ein Unterraum und *kofinal* in dem Sinn, dass für jedes $x \in X$ ein $y \in Y$ mit $x \leq y$ existiert. Ferner sei $f \colon Y \to \mathbb{R}$ linear und *positiv* in dem Sinn, dass für alle $y_1, y_2 \in Y$ gilt: $y_1 \leq y_2 \Rightarrow f(y_1) \leq f(y_2)$. Zeige schrittweise:

(a) Für jedes $x \in X$ existieren $y_1, y_2 \in Y$ mit $y_1 \leq x \leq y_2$.

(b) Die Funktion $q \colon X \to [-\infty, \infty]$, definiert durch $q(x) := \inf\{f(y) : y \in Y, x \leq y\}$, nimmt nur endliche Werte an und ist sub-linear, also $q(x+z) \leq q(x) + q(z)$ und $q(\lambda z) = \lambda q(z)$ für alle $x, z \in X$, $\lambda \in [0, \infty)$.

(c) Es gibt eine positive lineare Fortsetzung $g \colon X \to \mathbb{R}$ von f.

Aufgabe 4*. (Auf diese Aufgabe gibt es zwei Zusatzpunkte.)
Bezeichne $\ell^\infty_\mathbb{R}$ den Raum aller beschränkten Folgen reeller Zahlen, sei $S \colon \ell^\infty_\mathbb{R} \to \ell^\infty_\mathbb{R}$ definiert durch $S((x_n)_n) = (x_{n+1})_n$ und sei

$$M := \{x - S(x) : x \in \ell^\infty_\mathbb{R}\} \subseteq \ell^\infty_\mathbb{R}.$$

Ferner sei $\mathbb{1} = (1, 1, 1, \ldots) \in \ell^\infty_\mathbb{R}$. Zeige schrittweise:

(a) Falls $x = (x_n)_n \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}$ und $d(\mathbb{1}, x - S(x)) = 1 - \epsilon$, dann $x_1 - x_N \geq (N-1)\epsilon$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $d(\mathbb{1}, M) = 1$.

(b) Es gibt ein $L \in (\ell^\infty_{\mathbb{R}})'$ mit $L(\mathbb{1}) = 1 = \|L\|$ und $L \circ S = L$.
(*Hinweis:* Anwendung von Hahn-Banach auf $\mathbb{R}\mathbb{1} + \overline{M} \subset \ell^\infty_{\mathbb{R}}/\overline{M}$.)

(c) $L(x) \geq 0$, falls $x = (x_n)_n \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}$ und $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(*Hinweis:* Benutze $\|L\| = 1$ und $L(\mathbb{1}) = 1$.)

(d) Für jede Folge $x = (x_n)_n \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}$ gilt $\liminf_n x_n \leq L(x) \leq \limsup_n x_n$. Insbesondere gilt $L(x) = \lim_n x_n$, falls $x = (x_n)_n$ konvergiert.
(*Hinweis:* Das ist eine Verfeinerung von (c). Es genügt, eine der beiden Ungleichung zu zeigen. Benutze, dass für jedes $\epsilon > 0$ und hinreichend große $N \in \mathbb{N}$ alle Komponenten von $(\limsup_k x_k + \epsilon)\mathbb{1} - S^N(x)$ nichtnegativ sind.)

(*Bemerkung:* Ein Funktional L mit den Eigenschaften in (b,c,d) heißt *Banach-Limes*.)