Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 11**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Funktionalanalysis

Abgabe: Bis 31.05.2011, 12 Uhr Blatt 8

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *von erster Kategorie*, falls sie eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist, und andernfalls *von zweiter Kategorie*.

Aufgabe 1. Seien $1 \leq p < q \leq \infty$. Zeige:

(a) Es gilt $\ell^p \subseteq \ell^q$.

(b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist $A_N := \{x \in \ell^p : \|x\|_p \leq N\} \subseteq \ell^q$ abgeschlossen.

(c) Es gibt eine Folge $(x^{(k)})_k$ von Elementen von ℓ^q mit $\|x^{(k)}\|_p = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_k \|x^{(k)}\|_q = 0$.

(d) Der Teilraum $\ell^p \subseteq \ell^q$ ist von erster Kategorie.

Aufgabe 2. Sei $f\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ stetig und $\lim_{n\to\infty} f(nt) = 0$ für alle $t \in (0, \infty)$. Zeige:

(a) Für jedes $\epsilon > 0$ ist das Innere einer der Mengen $(E_{n,\epsilon})_{n\in\mathbb{N}}$ nicht leer, wobei

$$E_{\epsilon,n} := \{t \in [0, \infty) \mid \forall m \geq n : |f(mt)| \leq \epsilon\}.$$

(b) Ist $(a, b) \subseteq (0, \infty)$, so gibt es ein $N > 0$ mit $(N, \infty) \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}}(ma, mb)$.

(c) $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Aufgabe 3. Wir betrachten $C([0, 1])$ mit der Supremumsnorm und definieren

$$A_n := \{f \in C([0, 1]) \mid \exists t \in [0, 1] \forall s \in [0, 1] : |f(t) - f(s)| \leq n|t - s|\} \subseteq C([0, 1])$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist A_n abgeschlossen.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist das Innere von A_n leer.

(c) Ist $f \in C([0, 1])$ in $t \in [0, 1]$ differenzierbar, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f \in A_n$.

(d) Die nirgends differenzierbaren Funktionen bilden eine dichte Teilmenge von $C([0, 1])$, deren Komplement von erster Kategorie ist.

Achtung: Aufgabe 4 befindet sich auf der Rückseite!

Aufgabe 4. (Diese Aufgabe greift Aufgabe 1 von Blatt 2 nochmal auf.)

Sei X die Menge aller Abbildungen $f\colon [0,1) \to \{0,1\}$. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heiße offen, falls für jedes $f \in U$ eine endliche Teilmenge $F \subseteq [0,1)$ existiert mit $\{g \in X : g|_F = f|_F\} \subseteq U$. Die Folge $(f_n)_n$ in X sei definiert durch

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\right) \text{ für ein } k \in \{0, 1, \ldots, 2^{n-1}-1\}, \\ 1, & t \in \left[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}\right) \text{ für ein } k \in \{0, 1, \ldots, 2^{n-1}-1\}. \end{cases}$$

Sei $(f_{n_k})_k$ eine Teilfolge von $(f_n)_n$. Zeige:

(a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist der Abschluss der Menge

$$A_k := \{t \in [0,1) \mid \forall l \geq k : f_{n_l}(t) = f_{n_k}(t)\} \subseteq [0,1)$$

nirgends dicht.

(b) Die Menge aller $t \in [0,1)$, für welche die Folge $(f_{n_k}(t))_k$ irgendwann konstant wird, ist nirgends dicht.

(c) Die Folge $(f_{n_k})_k$ konvergiert nicht und X ist nicht folgenkompakt.