Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 11**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Funktionalanalysis

Abgabe: Bis 07.06.2011, 12 Uhr Blatt 9

Aufgabe 1. Seien $p, q \in [1, \infty]$ und sei $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ eine unendliche Matrix komplexer Zahlen mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist $(a_{i,j})_j \in \ell^{p'}$, wobei p' bestimmt ist durch $1 = 1/p + 1/p'$.

(b) Für jedes $x = (x_j)_j \in \ell^p$ liegt $Ax := (\sum_j a_{i,j} x_j)_i$ in ℓ^q.

Zeige, dass dann die Abbildung $A\colon \ell^p \to \ell^q$, $x \mapsto Ax$, stetig ist.

Aufgabe 2. Bezeichne $C(\mathbb{T}) \subseteq C(\mathbb{R})$ den Unterraum der 2π-periodischen Funktionen:

$$C(\mathbb{T}) := \{f \in C(\mathbb{R}) : f(t) = f(t + 2\pi) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}.$$

Für jedes $f \in C(\mathbb{T})$ definieren wir

- die *Fourier-Koeffizienten* $\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{e_k(t)}dt$, wobei $e_k(t) = \exp(2\pi i k t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$,
- die *Fourier-Reihe* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e_k$ (deren Konvergenz zu untersuchen ist),
- die n-te Partialsumme der Fourier-Reihe $T_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e_k \in C(\mathbb{T})$,
- $S_n\colon C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ durch $f \mapsto \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) = (T_n(f))(0)$.

Wir betrachten T_n als Abbildung $C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$. Bezeichne

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e_k(t) = \sum_{k=-n}^{n} (\mathrm{e}^{2\pi i t})^k = \frac{\mathrm{e}^{2\pi i(n+1)t} - \mathrm{e}^{-2\pi i n t}}{\mathrm{e}^{2\pi i t} - 1} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \in C(\mathbb{T})$$

den *Dirichlet-Kern*. Zeige:

(a) $\int_0^{2\pi} |D_n(t)|dt \geq \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n} k^{-1}$.

(b) $\lim_n \|S_n\| = \lim_n \|T_n\| = \infty$.
(*Hinweis:* Benutze ohne Beweis folgende einfache Aussage: Für jedes $g \in C(T)$ gilt $\sup_{f\in C(T), \|f\|=1} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) = \int_0^{2\pi} |g(t)|dt$.)

(c) Es gibt eine Funktion $f \in C(\mathbb{T})$, für welche die Fourier-Reihe bzw. genauer die Folge der Partialsummen $(T_n(f))_n$ nicht punktweise konvergiert.

Aufgabe 3. Wir benutzen die obigen Bezeichnungen und folgende Aussagen:

(a) (*Riemann-Lebesgue-Lemma*) Für jede Funktion $f \in C(\mathbb{T})$ verschwindet die Funktion $\hat{f}\colon k \mapsto \hat{f}(k)$ im unendlichen, also $\hat{f} \in C_0(\mathbb{Z})$.
(*Bemerkung:* Das sehen wir später mit Hilfe der Hilbertraum-Theorie.)

(b) Die Abbildung $\mathcal{F}\colon C(\mathbb{T}) \to C_0(\mathbb{Z})$, $f \mapsto \hat{f}$, ist injektiv.
(*Bemerkung:* Das sehen wir später mit Hilfe des Satzes von Stone-Weierstrass.)

Zeige unter Verwendung dieser Aussagen, dass $\mathcal{F}$ stetig und nicht surjektiv ist. (*Hinweis:* Betrachte $\mathcal{F}(D_n)$.)

Aufgabe 4. Wir benutzen den bald in der Vorlesung folgenden Satz von Stone-Weierstrass: Die Polynome sind dicht in $C([0,1])$ bezüglich der Supremumsnorm.

Sei $(Q_n)_n$ eine Folge von Funktionalen auf $C([0,1])$ der Form

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^{N(n)} A_{k,n} f(t_{k,n}),$$

wobei $N(n) \in \mathbb{N}$, $t_{1,n}, \ldots, t_{k,N(n)} \in [0,1]$ und $A_{k,n} \in \mathbb{C}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) $\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = \int_0^1 f(t)dt$ für alle $f \in C([0,1])$.

(b) $\lim_{n\to\infty} Q_n(p) = \int_0^1 p(t)dt$ für alle Polynome p und $\sup_n \sum_{k=1}^{N(n)} |A_{k,n}| < \infty$.