Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 11**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Funktionalanalysis

Abgabe: Bis 28.06.2011, 12 Uhr Blatt 11

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{S}$ der *Schwartz-Raum* aller schnell fallenden, glatten Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit dem Halbnormensystem $\mathcal{P} = \{p_{m,k} : m, k \in \mathbb{N}\}$ (siehe Beispiel 8.9 vi)):

$$\mathcal{S} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall m, k \in \mathbb{N} : p_{m,k}(f) < \infty\}, \quad p_{m,k}(f) = \sup_{t\in\mathbb{R}} (1 + |t|)^m |f^{(k)}(t)|.$$

Bezeichne $\mathrm{Id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die identische Funktion $\mathrm{Id}(t) = t$ und $f \cdot g$ das punktweise Produkt von Funktionen f, g. Zeige:

(a) Für jedes $f \in \mathcal{S}$ gilt $f', \mathrm{Id} \cdot f \in \mathcal{S}$, und die Abbildungen $D\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, $f \mapsto f'$, und $M\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, $f \mapsto \mathrm{Id} \cdot f$, sind stetig.

(b) Für jedes $f \in \mathcal{S}$ und jedes beschränkte $g \in C(\mathbb{R})$ ist $f \cdot g$ integrierbar und

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt \right| \leq p_{2,0}(f) \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t)| \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1 + |t|)^2}.$$

Aufgabe 2. Für alle $f \in \mathcal{S}$ und $s \in \mathbb{R}$ existiert nach Aufgabe 1(c) das Integral

$$(\mathcal{F}(f))(s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-ist} dt.$$

Zeige:

(a) Für jedes $f \in \mathcal{S}$ gilt $\mathcal{F}(f') = i \cdot \mathrm{Id} \cdot \mathcal{F}(f)$. (*Hinweis:* Verwende partielle Integration und begründe deren Anwendbarkeit.)

(b) Für jedes $f \in \mathcal{S}$ gilt $\mathcal{F}(\mathrm{Id} \cdot f) = -i \cdot \mathcal{F}(f)'$. (*Hinweis:* Verwende den Satz von der dominierten Konvergenz, Bemerkung vi) vor Definition 2.8 im Skript.)

(c) Für jedes $f \in \mathcal{S}$ ist $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$, und die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist stetig. (*Hinweis:* Verwende (a), (b) und Aufgabe 1.)

Aufgabe 3. Bezeichne $C(\mathbb{T}) \subseteq C(\mathbb{R})$ den Unterraum der 2π-periodischen Funktionen und sei $e_k \in C(\mathbb{T})$ für $k \in \mathbb{Z}$ definiert durch $e_k(t) = \exp(ikt)$ für $t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass der von den Elementen $e_k \in C(\mathbb{T}), k \in \mathbb{Z}$, aufgespannte Unterraum von $C(\mathbb{T})$ dicht ist. (*Hinweis:* Verwende den Satz von Stone-Weierstrass.)

Aufgabe 4. Bezeichne λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Wir definieren ein Maß μ auf $\mathbb{R}$ durch $\mu(A) = \lambda(A \cap [0, 2\pi])/2\pi$ für alle messbaren Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}$, und setzen $L^2(\mathbb{T}) := L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Dann ist $C(\mathbb{T}) \subseteq L^2(\mathbb{T})$ dicht und

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt \quad \text{für alle } f, g \in C(\mathbb{T}) \subseteq L^2(\mathbb{T}).$$

(a) Zeige, dass $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{T})$ ist.

(b) Zeige, dass die Abbildung $L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, $f \mapsto (\langle e_k|f\rangle)_k$, ein isometrischer Isomorphismus ist.

(c) Schlussfolgere aus (b) das Riemann-Lebesgue-Lemma und die Injektivität der Fourier-Transformation, die auf Blatt 9 verwendet wurden, also

   i) $\hat{f} \in C_0(\mathbb{Z})$ für alle $f \in C(\mathbb{T})$, wobei $\hat{f}(k) = \langle e_k|f\rangle$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;

   ii) die Abbildung $C(\mathbb{T}) \to C_0(\mathbb{Z})$, $f \mapsto \hat{f}$, ist injektiv.