

# Physikalische Argumente für die Quantenmechanik

Seminar zur Mathematischen Struktur der Quantenmechanik

Prof. Dr. Wend Werner

Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar

Markus Lange

05. April 2011

## Inhaltsverzeichnis

|  |    |
|--|----|
| 1 Die Physik am Ende des 19. Jahrhunderts          | 2  |
| 2 Einblicke in die Entwicklung der Quantenmechanik | 3  |
| Literatur  | 17 |

## §1 Die Physik am Ende des 19. Jahrhunderts

Die Physik am Ende des 19. Jahrhunderts bestand aus:

- Klassischer Mechanik (nach Newton)
  - Dynamik von Massepunkten wird vollständig durch Ort  $\underline{x}(t)$  und Impuls  $\underline{p}(t)$  beschrieben. Diese beiden Größen sind zudem gleichzeitig scharf messbar.
  - Akustik und Hydrodynamik sind verstanden.
- Elektrodynamik
  - Maxwell Gleichungen können die Wellenphänomene der elektromagnetischen Wellen vollständig erklären.
  - Elektrische und magnetische Felder können über Potentiale vollständig beschrieben werden.

Makroskopische Phänomene (Wellenlänge ist erheblich kleiner als Abmessung des makroskopischen Objekts) sind weitgehend durch klassische Physik erklärbar.

- Nicht widerspruchsfrei erklärbar sind z. B. Phänomene wie
  - Supraleitung (auch Quantenmechanisch nicht komplett verstanden)
  - Neutronensterne

Aber bei mikroskopischen Phänomenen treten zu große Diskrepanzen zwischen den theoretischen Vorhersagen und den experimentellen Befunden auf

- Beispiele für solche Phänomene sind
  - Hohlraumstrahlung
  - Photoelektrischer Effekt
  - Compton Effekt
  - Atomspektren
  - Kern- und Elementarteilchenphysik
- Es wurde immer deutlicher das eine neue Theorie benötigt wird.

## §2 Einblicke in die Entwicklung der Quantenmechanik

— 1900 —

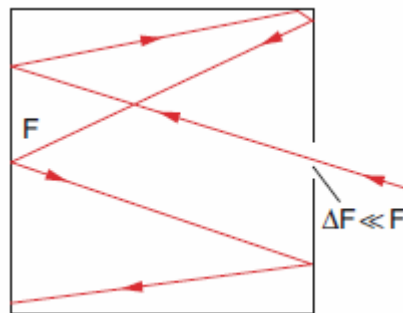
Die Geburtsstunde der Quantenmechanik fällt in den Dezember des Jahres 1900.

- Max Planck stellte während eines Vortrags in Berlin eine neue Formel vor, die für alle Frequenzen das Spektrum der Hohlraumstrahlung berechnen konnte.

### Hohlraumstrahlung (Schwarzer Strahler)

- Experimentell gut realisierbar durch einen Hohlraum mit absorbierenden Wänden, der eine Öffnung mit Fläche  $\Delta F$  hat, die sehr klein gegen die gesamte Innenfläche des Hohlraums ist.

Strahlung, die durch die Öffnung eintritt, wird sehr häufig an den absorbierenden Wänden reflektiert, bis sie theoretisch wieder auf die Öffnung treffen würde.



Also ist das Absorptionsvermögen der Öffnung  $A \approx 1$ .

Heizt man die Wände des Hohlraums auf eine Temperatur  $T$  auf, so wirkt die Öffnung als Strahlungsquelle mit maximalem Emissionsvermögen  $E^*$ .

- Beispiel: Graphitblock mit tief eingefrästem H



- \* Bei Zimmertemperatur: H erscheint schwärzer als restlicher Block.
- \* Bei 1000K (ca. 727°C): H strahlt heller als seine Umgebung.

- Man kann zeigen, dass das spektrale Emissionsvermögen  $E_\nu^*$  eines schwarzen Körpers identisch ist mit der spektralen Strahlungsdichte  $S_\nu^*$  der Hohlraumstrahlung.
- Klassische Erklärung durch Rayleigh-Jeans:
  - Stehende Wellen in einem kubischen Hohlraum können nur bestimmte stationäre Eigenschwingungen (Moden) des elektromagn. Feldes (EM-Feldes) im Hohlraum annehmen.
    - \* Die spektrale Modendichte im Frequenzintervall  $[\nu, \nu + d\nu]$  ist gegeben durch

$$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu.$$

- \* Daraus ergibt sich die spektrale Energiedichte  $\omega_\nu(\nu)$  der Hohlraumstrahlung zu

$$\omega_\nu(\nu)d\nu = n(\nu) \cdot \bar{W}_\nu(T)d\nu$$

wobei  $\bar{W}_\nu(T)$  die mittlere Energie pro Eigenschwingung ist.

- Rayleigh und Jeans verwendeten ein klassisches Modell für die Eigenschwingungen des EM-Feldes im Hohlraum. Dieses Modell ordnet jeder Eigenschwingung die mittlere Energie  $k_B T$  zu.

- \* Damit kommt man auf das sogenannte Rayleigh-Jeans'sche Strahlungsgesetz:

$$\omega_\nu(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_B T d\nu$$

- Somit wird aus der Öffnung (des Hohlraums) die Strahlungsdichte

$$S_\nu^*(\nu)d\nu = \frac{2\nu^2}{c^2}k_B T d\nu$$

emittiert.

- Experimentelle Befunde liefern für den Infrarotbereich gute Übereinstimmungen. Aber umso größer die Frequenzen werden, desto größer werden die Abweichungen von den theoretischen Vorhersagen.

- \* Im Grenzfall  $\nu \rightarrow \infty$  kommt es sogar zur sog. Ultraviolett-Katastrophe. Die integrierte Strahlungsdichte  $S^*$  würde unendlich groß werden.

- Die Planck'sche Quantenhypothese:

- Planck wollte die Ultraviolett-Katastrophe vermeiden und nahm deswegen an, dass sich die Eigenmoden des Hohlraums zwar wie Oszillatoren verhalten, aber dass jeder Oszillator Energie nur als ganzzahliges Vielfaches eines kleinsten Energiequants  $h \cdot \nu$  ( $\nu \hat{=}$  Frequenz der Schwingungsmode) aufnehmen kann.

\* Planck'sches Wirkungsquantum:  $h = 6.6260693 \cdot 10^{-34} \text{Js}$

– Für die Energie der n-ten Schwingungsmode, der Frequenz  $\nu$ , gilt

$$W_\nu = n \cdot h \cdot \nu$$

Mit Hilfe klassischer Überlegungen (hauptsächlich wahrscheinlichkeitstheoretischer Natur) kommt man darauf, dass die spektrale Energiedichte  $\omega_\nu(\nu)$  der Hohlraumstrahlung gegeben ist durch:

$$\omega_\nu(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} \frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

– Die theoretisch vorhergesagten Strahlungsdichten, der vom Flächenelement  $dF$ , eines schwarzen Körpers in den Raumwinkel  $d\Omega$  emittierten Strahlung stimmt mit den experimentell gefunden überein.

\* Für  $h\nu \ll k_B T$  kann man  $e^{+x} \approx 1 + x$  durch  $\frac{h\nu}{k_B T}$  annähern und erhält

$$S_\nu^*(\nu) \approx \frac{2\nu^2}{c^2} k_B T \quad \implies \quad \omega_\nu(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T$$

also das Rayleigh-Jeans Gesetz.

– Das Maximum der Intensitätsverteilung der thermischen Strahlung, in Abhängigkeit der Temperatur der Strahlungsquelle, ist durch das sogenannte Wien'sche Verschiebungsgesetz

$$\nu_{max} \cdot h = 2.82 \cdot k_B T$$

gegeben.

• Beispiel: Die Sonne kann in guter Näherung als Schwarzen Strahler angesehen werden:

– Sei  $\lambda = 580 \text{nm}$  ( $\approx \nu = 5.2 \cdot 10^{14} \text{s}^{-1}$  [Orange gelb]). Dann wird von  $1 \text{m}^2$  der Sonnenoberfläche in den Raumwinkel  $\Delta\Omega = 1 \text{sr}$  (Steradian) im Wellenlängenintervall  $\Delta\lambda = 1 \text{nm}$  ( $\hat{=} \Delta\nu = 1.2 \cdot 10^{12} \text{s}^{-1}$ ) bei einer Sonnenoberflächentemperatur von  $5800 \text{K}$  eine Strahlungsdichte

$$S_\nu^* \Delta\nu \approx 9.1 \cdot 10^4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{sr}}$$

abgestrahlt.

– Die Erde erscheint vom Mittelpunkt der Sonne aus unter dem Raumwinkel

$$\Delta\Omega_E = \frac{\pi R_E^2}{4\pi r_{SE}^2} = 2.5 \cdot 10^{-7} \text{sr}$$

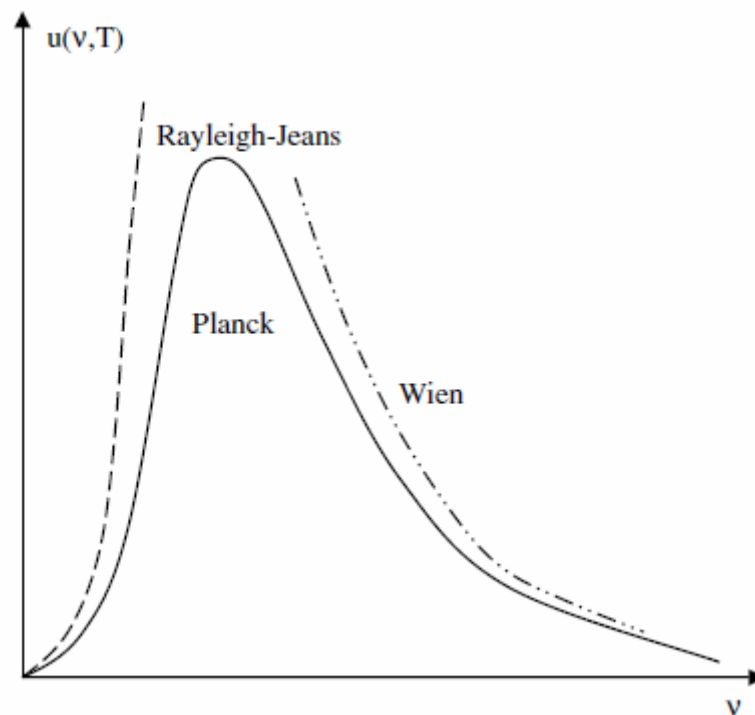


Abbildung 1: Spektralverteilung der Hohlraumstrahlung

- Integriert man, für den sichtbaren Spektralbereich zwischen  $\nu_1 = 4 \cdot 10^{14} \text{s}^{-1}$  und  $\nu_2 = 7 \cdot 10^{14} \text{s}^{-1}$ , die Strahlungsdichte über die Sonnenoberfläche, so trifft eine Strahlungsleistung von etwa  $500 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$  auf die Erde auf. Dies entspricht ca. 36% der gesamten auftreffenden Intensität der Sonnenstrahlung.

### Photoelektrischer Effekt

- Erstmals 1839 beobachtet von Alexandre Edmond Becquerel.
- Systematische Untersuchungen 1886 durch Heinrich Hertz und Wilhelm Hallwachs, deshalb auch als Hallwachs Effekt bekannt.
- Der Effekt: Wird eine, gegen ihre Umgebung isolierte, negative geladene Metallplatte mit ultraviolettem Licht bestrahlt, so nimmt ihre Ladung ab.  
Resultat: Es müssen also Elektronen die Platte verlassen haben.

— 1902 —

- Phillip Lenard fand nach sorgfältigen Messungen des photoelektrischen Effekts folgende Resultate:

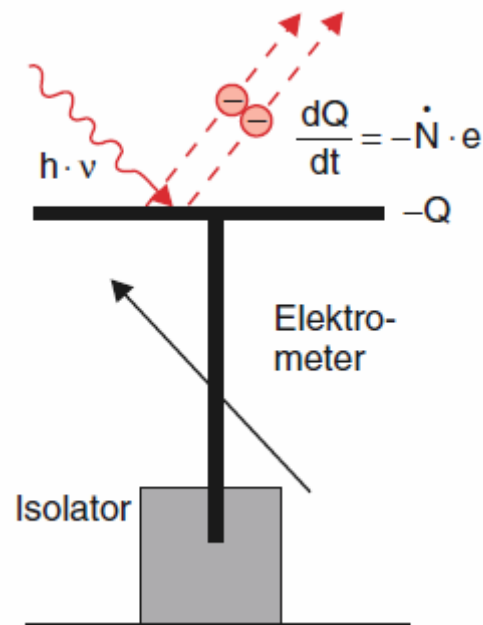


Abbildung 2: Versuch von Hallwachs zum Nachweis des photoelektrischen Effekts

- Die kinetische Energie  $\frac{m}{2}v^2$  der aus der Metalloberfläche ausgelösten Elektronen (Photoelektronen) ist nur von der Frequenz  $\nu$  des Lichts, nicht aber von der Intensität abhängig.
  - \* Dies stellt einen ersten Hinweis auf die Teilcheneigenschaften des Lichts da, den wäre es eine reine Welle müsste die Energie mit der Amplitude der Welle und somit mit der Intensität zusammenhängen.
- Zwischen Lichteintritt und Elektronenaustritt gibt es keine messbare Verzögerung
  - \* Weiterer Hinweis auf Teilcheneigenschaften, den sonst müssten sich erst einige Photonen mit niedriger Intensität ansammeln um ein Elektron auszulösen.
- Die Zahl der Photoelektronen ist proportional zur Lichtintensität.

— 1905 —

- Albert Einstein lieferte mit seinem Lichtquanten-Modell eine theoretische Erklärung des photoelektrischen Effekts.
- Das Modell:

- Planck nahm bei seiner Quantisierung nur an, dass die Energiezustände der Atome quantisiert sind und nur durch Wechselwirkung das Strahlungsfeld eine Quantisierung erfährt.
- Einstein ging einen Schritt weiter und postulierte die Existenz von Quanten des Strahlungsfeldes.
  - \* Ein Photon besitzt die Energie  $E^{ph} = h\nu$  und stellt die kleinst mögliche Menge an EM-Strahlung der Frequenz  $\nu$  da.
  - \* Ein Photon gibt seine Energie beim Stoß mit einem Elektron vollständig an dieses ab.
  - \* Einstein ordnete einem Photon außerdem den Impuls

$$\underline{p} = \hbar \underline{k}, \quad |p| = \hbar k = \frac{h\nu}{c}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

zu.

- Einstein fand folgende, nach ihm benannte, Gleichung für die maximale kinetische Energie der Photoelektronen

$$E_{kin}^{max} = h\nu - W_a$$

- Mit Hilfe der Einsteingleichung war es nun möglich aus dem einsetzenden Photonenstrom die Planck'sche Konstante  $h$  und die Austrittsarbeit  $W_a$  verschiedener Materialien zu bestimmen.
- Die Hypothese zeigt auch endlich die Doppelnatur der Strahlung auf.
- Beispiel: Eine Nickelplatte ( $W_a = 5eV$ ) sei  $0.5m$  entfernt von der Lichtquelle, die  $2W$  Lichtleistung bei  $\lambda = 250nm$  (ca.  $\nu = 1.1992 \cdot 10^{15}s^{-1}$ ) emittiert. Auf  $1cm^2$  der Platte fällt dann die Lichtintensität

$$I_L = \frac{2W}{4\pi(50cm)^2} \approx 6.4 \cdot 10^{-5} W/cm^2.$$

Unter der Annahme, dass die Eindringtiefe der Lichtwelle gleich der Wellenlänge ist, wird diese Lichtintensität auf  $N = \frac{10^{23}}{cm^3} \cdot \lambda = 2.5 \cdot 10^{18}$  Elektronen pro  $cm^2$  verteilt. Die pro Elektron im Mittel aufgenommene Leistung ist dann

$$P_{el} \approx 2.56 \cdot 10^{-23}W \approx 4 \cdot 10^{-4}eV/s$$

Es müsste als etwa  $\Delta t = W_a/P_{el} = 12500s$  dauern bis Elektronen emittiert würden, im klaren Widerspruch zum Experiment.



— 1913 —

- Niels Bohr stellte sein berühmtes Planetenmodell des Atoms vor.

Um die Entwicklung und Bedeutung des Bohr'schen Atommodells besser zu verstehen, betrachten wir ein, weiteres klassische nicht zuerklärendes Phänomen, die Atomspektren.

- Bereits 1859 stellten Gustav Kirchhoff und Robert Bunsen fest, dass Atome nur Licht mit ganz bestimmten Wellenlängen absorbieren bzw. emittieren können.
  - Diese Wellenlängen nennt man Absorptions- bzw. Emissionsspektrum des Atoms
- Versuchsaufbau zum messen des Emissionsspektrums

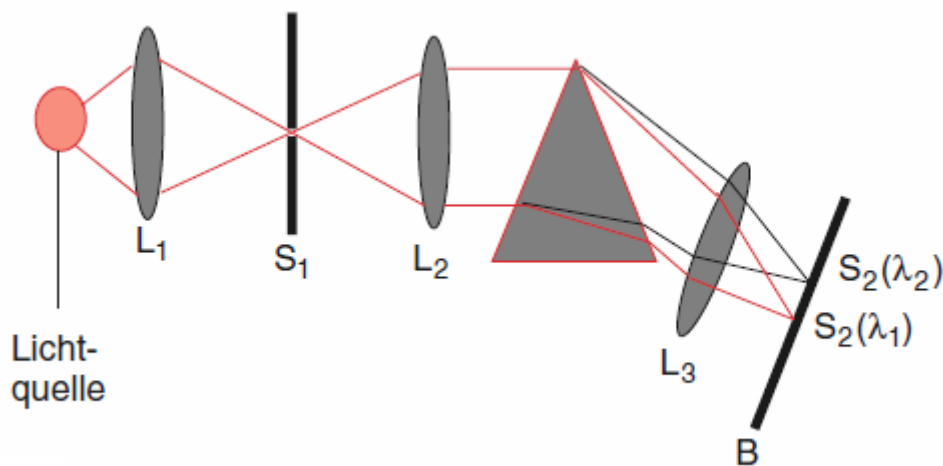


Abbildung 3: Schematischer Aufbau eines Prismenspektrographen

- Beschreibung: Das z. B. durch Gasentladung von Atomen emittierte Licht wird durch die Linse  $L_1$  auf den Eintrittsspalt  $S_1$  des Spektrographen abgebildet. Im Spektrograph fällt das Licht über die Linse  $L_2$  und  $L_3$  auf den Betrachtungsschirm  $B$  und bildet dort ein Bild  $S_2$  des Spalts  $S_1$ . Durch das Prisma ist der Ort  $x$  des Bildes  $S_2$  von der Wellenlänge des Lichts am Spalt  $S_1$  abhängig (Dispersion).
- Bring man eine Photoplatte in die Beobachtungsebene  $B$ , so entstehen durch das Emissionsspektrums des Atoms diskrete Schwärzungen an den Stellen  $x(\lambda_k)$ . Man nennt ein solches Spektrum Linienspektrum.
- Auch Absorptionsspektren können, mit einem anderen Versuchsaufbau, über einen Spektrographen nachgewiesen werden.
- Mit Hilfe viele Experimente zu den Atomspektren wurden folgende Ergebnisse gefunden:

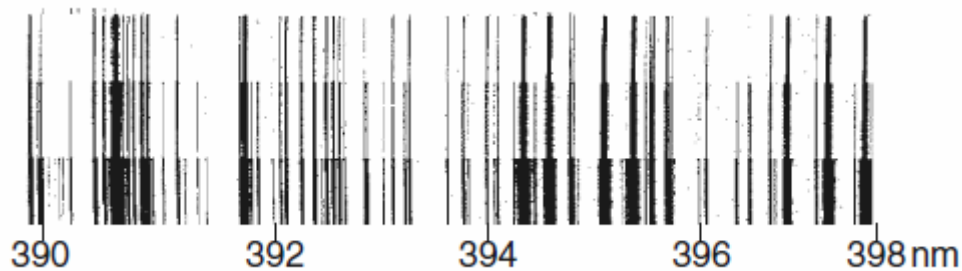


Abbildung 4: Bild eines Linienspektrums

- Jede Wellenlänge die absorbiert wird, kann bei entsprechender Zuführung von Energie, auch von dem Atom emittiert werden.
- Das Absorptions- und Emissionsspektrum ist charakteristisch und eindeutig für jedes Atom.
  - \* Dies ist z. B. sehr wichtig für Astrophysiker, da somit aus den Spektren der Sterne auf deren chemische Zusammensetzung geschlossen werden kann.
- Die Spektrallinien sind auch bei extrem guter Wellenlängenauflösung der Nachweisgeräte nicht beliebig scharf.
- Für das Wasserstoff-Atom (einfachstes Atom, besteht nur aus einem Proton und einem Elektron) fand Johann Jakob Balmer 1885 ein Emissionsspektrum, dass aus einer Serie von Linien bestand (Balmer Serie). Die Wellenlängen dieser Linien gehorchen dabei einer einfach Formel

$$\frac{1}{\lambda_k} = R_y \cdot \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

wobei  $R_y = 109678 \text{ cm}^{-1}$  die sogenannte Rydberg-Konstante ist und nur ganz zahlige Werte  $n_1 = 2, n_2 = 3, 4, 5, \dots$  auftreten.

- Für  $n_2 \in \{3, 4, 5, 6\}$  liegt die entsp. Frequenz im sichtbaren Lichtspektrum.
- Theodore Lyman (Lyman Serie:  $n_1 = 1$ , Ultraviolettbereich) und Friedrich Paschen (Paschen Serie:  $n_1 = 3$ , vorwiegend Infrarot Bereich) fanden weitere Serien die ebenfalls obiger Formel genügen.

Wie oben bereits erwähnt lässt sich dieses Phänomen nicht klassisch erklären, was uns zurück zum Bohr'schen Atommodell bringt.

- Das Modell
  - Nach dem Rutherford'schen Atommodell war bekannt, dass

- \* die gesamte positive Ladung und ca. 99.9% der Masse des Atoms im Atomkern liegen.
- \* die negativen Ladungen in Form von Elektronen sich im Raum um den Atomkern befinden. Dieser Raum wird Atomhülle genannt.
- \* die Elektronen sich auf beliebigen Bahnen um den Atomkern bewegen und zwischen ihnen der Raum leer ist.

– Bohr erweiterte nun dieses Modell um drei weitere Postulate

- \* Elektronen bewegen sich auf stabilen Kreisbahnen um den Atomkern. Anders als die klassische Elektrodynamik vorhersagt, strahlen die Elektronen beim Umlauf keine Energie in Form von EM-Strahlung ab. (Widerspricht der klassischen Theorie, aber klassisch ist nicht mal das H-Atom stabil)
- \* Der Radius der Elektronenbahn ändert sich nicht kontinuierlich, sondern sprunghaft. Bei diesem Sprung wird EM-Strahlung gemäß dem von Planck gefunden Zusammenhang zwischen Energie und Frequenz abgegeben bzw. aufgenommen.

$$\nu = \frac{E_{n_1} - E_{n_2}}{h}$$

- \* Elektronenbahnen sind nur stabil, wenn der Bahndrehimpuls  $L$  des Elektrons ein ganz zahliges Vielfaches des reduzierten Planck'schen Wirkungsquantums  $\hbar = h/2\pi$  ist.

$$L = n \cdot \hbar$$

- Mit Hilfe dieses Modells konnten die Atomspektren des H-Atoms sowie von Ionen mit nur einem Elektron erklärt werden. Dies stellt gleichzeitig aber auch die Grenze für dieses Atommodell dar, weshalb man das Bohr'sche Atommodell heute eher als wichtigen Denkanstoß in Richtung eines QM-Atommodells betrachtet.

— 1914 —

- Ein Beweis dass bei Stoßprozessen die Energiequantellung eine Rolle spielt liefert der von James Franck und Gustav Hertz durchgeführte Versuch.
- In einer Röhre, die mit Quecksilberdampf bei einem Druck von etwa  $10^{-2}$  mbar gefüllt ist, werden von einer Glühkathode  $K$  Elektronen emittiert, die durch ein Gitter  $G$  auf die Energie  $e \cdot U$  beschleunigt werden.

Der Elektronenauffänger  $A$  wird auf einer Spannung  $U_A = U - \Delta U$  gehalten, sodass die Elektronen nach Durchfliegen des Gitters abgebremst werden und nur dann  $A$  erreichen können, wenn ihre Energie hinter dem Gitter mindestens  $e \cdot \Delta U$  ist.

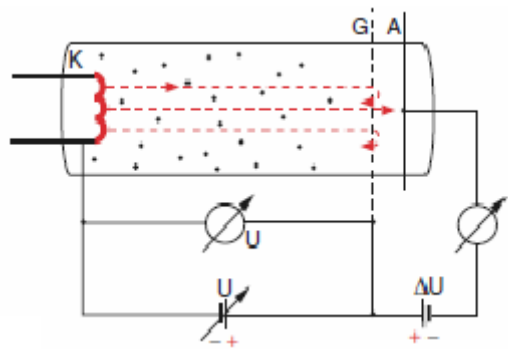


Abbildung 5: Versuchsaufbau des Frank-Hertz-Versuch

- Misst man den auf  $A$  auftreffenden Elektronenstrom  $I(U)$  als Funktion der Beschleunigungsspannung  $U$  so sieht man folgenden Verlauf

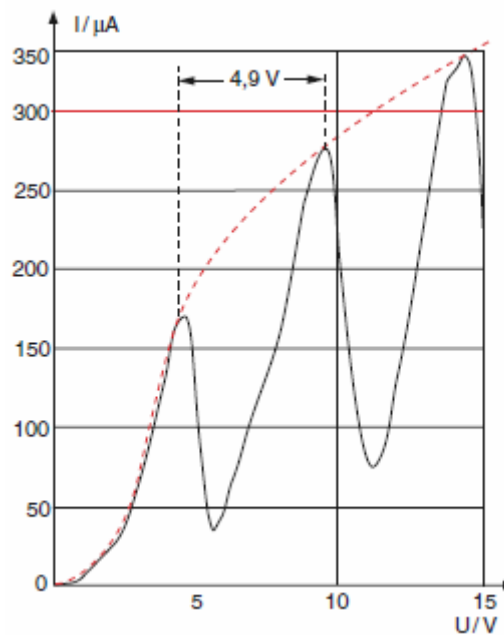


Abbildung 6: schwarze Kurve: Verlauf des Elektronenstroms mit Quecksilberdampf;  
rote Kurve: Verlauf des Elektronenstroms ohne Quecksilberdampf;

- Dieses Verhalten lässt sich durch inelastische Stöße der Elektronen mit den  $Hg$ -Atomen erklären. Die Elektronen geben beim Stoß mit einem  $Hg$ -Atom einen Teil  $\Delta E_{kin} \approx E_a$  ihrer kinetischen Energie ab. Dieser Teil entspricht genau der Anregungsenergie  $E_a = 4.9 eV$  des  $Hg$ -Atoms.
- Verliert das Elektron zu viel Energie durch die Stoßprozesse kann es, wegen der Ge-

genspannung  $-\Delta U$ , den Auffänger  $A$  nicht mehr erreichen und trägt somit nicht mehr zum Elektronenstrom bei.

- Dies zeigt, dass Atome nur Energie in bestimmten Energiequanten  $\Delta E_i$  aufnehmen können. Genauere Untersuchungen zeigen, dass die Größe diese Energiequanten  $\Delta E_i$  von der Struktur und dem Anregungszustand des Atoms abhängen.
- Die angeregten  $H_\gamma$ -Atome kehren nach kurzer Zeit ( $\approx 10^{-8}s$ ) wieder in ihren tiefsten Energiezustand zurück, dabei wird ein Photon emittiert. Dies zeigt das nur der tiefste Energiezustand eines Atoms (Grundzustand) wirklich stabil ist.

— 1921 —

- Albert Einstein erhält den Nobelpreis für seine Theorie des Photoeffekts.

— 1922 —

- Arthur Holly Compton entdeckte den nach ihm benannten Effekt, der sehr deutliche den Teilchencharakter der Lichtquanten aufzeigt.
- **Compton-Effekt**
  - Wird ein beliebiges Material mit Röntgenstrahlung der Wellenlänge  $\lambda_0$  bestrahlt, kann man in der Streustrahlung außer der erwarteten Wellenlänge  $\lambda_0$  auch Anteile mit größerer Wellenlänge  $\lambda_s > \lambda_0$  nachweisen.
  - Die Wellenlängenverteilung der langwelligen Streustrahlung hängt stark vom Streuwinkel und weniger vom Streumaterial ab.
- Erklärung des Effekts durch das Photonenmodell:
  - Sei das Koordinatensystem so gewählt, dass die Strahlung in x-Richtung einfällt und die x-y-Ebene die Streuebene ist.
  - Der Compton-Effekt kann nun als elastischer Stoß zwischen einem Photon, mit der Energie  $h\nu_0$  und dem Impuls  $\underline{p} = \hbar \underline{k}_0$ , und einem schwach gebundenen Elektron des Steumaterials gedeutet werden.
    - \* Da das Photon sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt und auch ein Elektron sehr schnell werden kann, muss relativistisch gerechnet werden.
    - \* Außerdem sei, zur Vereinfachung der folgenden Rechnungen, die Bindungsenergie  $E_B$  des Elektron sehr klein gegen die Photonenenergie ( $E_B \ll h\nu_0$ ) und es befinde sich in Ruhe.

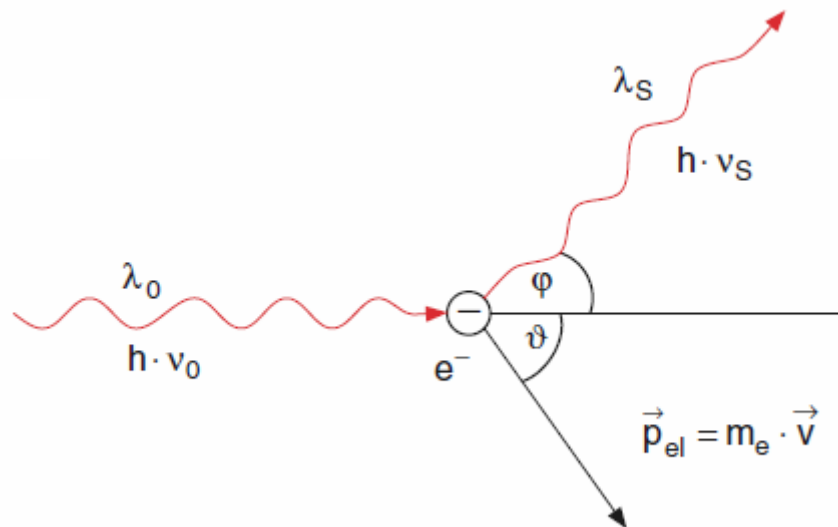


Abbildung 7: Schema des Compton-Effekt

- Bei dem Stoß  $h\nu_0 + e^- \rightarrow h\nu_s + e^-(E_{kin})$  gilt wie immer Energie- und Impulserhaltung.

- Der Energiesatz lautet:  $h\nu_0 = h\nu_s + E_{kin}^e$   
mit  $E_{kin}^e = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0c^2$  und  $\beta = v/c$ .

Durch quadrieren, aus multiplizieren und umordnen erhält man:

$$\frac{m_0^2v^2}{1-\beta^2} = \frac{h^2}{c^2} (\nu_0 - \nu_s)^2 + 2h(\nu_0 - \nu_s)m_0 \quad (1)$$

- Impulssatz:  $\hbar\underline{k}_0 = \hbar\underline{k}_s + \underline{p}_e$  mit  $\underline{p}_e = \frac{m_0v}{\sqrt{1-\beta^2}}$ .  
Einsetzen, quadrieren und umordnen liefert:

$$\frac{m_0^2v^2}{1-\beta^2} = \frac{h^2}{c^2} (\nu_0^2 + \nu_s^2 - 2\nu_0\nu_s \cos \varphi) \quad (2)$$

wobei  $\varphi$  der Winkel zwischen Einfalls- und Streurichtung des Photons ist.

- Ein Vergleich der Gleichungen (1) und (2) liefert:

$$\nu_0 - \nu_s = \frac{h}{m_0c^2} \nu_0\nu_s (1 - \cos \varphi)$$

Mit  $\lambda = c/\nu$  und  $(1 - \cos \varphi) = 2 \sin^2(\varphi/2)$  erhält man die Compton-Streuformel:

$$\lambda_s - \lambda_0 = 2\lambda_c \sin^2(\varphi/2) \quad (3)$$

dabei bezeichnet  $\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = 2.4262 \cdot 10^{-12}m$  die Compton Wellenlänge des Elektrons.

- \* Die Compton Wellenlänge gibt die Wellenlängenänderung  $\Delta\lambda = \lambda_s - \lambda_0$  bei einem Streuwinkel von  $\varphi = 90^\circ$  an.
- Die berechneten Wellenlängenänderungen (Gl. (3)) zeigen hervorragende Übereinstimmungen mit entsprechenden Messergebnissen.

— 1924 —

Zum Abschluss wollen wir noch den Wellencharakter von Teilchen betrachten.

### De Broglie-Wellenlänge

- Die duale Beschreibung durch Wellen- und Teilchenmodell, welche sich beim Licht bewährt hatte, wollte Louis de Broglie auch für Elektronen, Neutronen und sogar ganze Atome anwenden.
  - Der Wellencharakter solcher Teilchen war bis dato noch nie beobachtet worden.
- Ein Teilchen der Masse  $m$ , welches sich mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, hat nach der dualen Beschreibung den Impuls  $\underline{p} = \hbar \underline{k}$  mit  $k = 2\pi/\lambda$ .  
Womit dem Teilchen die sogenannte de Broglie Wellenlänge

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot E_{kin}}}$$

zugeordnet werden kann.

- Werden Elektronen durch eine Spannung  $U$  beschleunigt ( $v \ll c$ ), gilt  $E_{kin} = e \cdot U$  und somit folgt für die de Broglie Wellenlänge

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2me \cdot U}}$$

Beispiel:  $U = 100V$ ,  $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}kg$ ,  $h = 6.6 \cdot 10^{-34}Js$

$$\Rightarrow \lambda_{dB} = 1.2 \cdot 10^{-10}m = 0.12nm$$

- Für relativistische Teilchen ( $v \approx c$ ) gilt  $E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$ ,  $E \gg m_0c^2 \Rightarrow E \approx p \cdot c$ , somit

$$\lambda_{dB} \approx \frac{h \cdot c}{E}$$

Beispiel:  $E = 1GeV$ ,  $m_0c^2 = 0.5MeV \Rightarrow E \gg m_0c^2$

$$\Rightarrow \lambda_{dB} = 1.2 \cdot 10^{-15}m = 0.000012\text{\AA}$$

— 1926 —

- Clinton Joseph Davisson und Lester Halbert Germer gelang es nachzuweisen, dass Elektronen Welleneigenschaften besitzen.
- Sie beschossen dazu eine dünne Folie aus kristallinem Material, hinter der im Abstand  $d$  eine Photoplatte stand, mit schnellen Elektronen. Auf der Photoplatte bildeten sich Beugungsringe deren Durchmesser mit steigender Beschleunigung der Elektronen abnahm. Den selben Effekt sieht man beim Durchstrahlen der Folie mit Röntgenstrahlen.
  - Diese Beugungserscheinungen sind aber nicht auf Elektronen begrenzt, auch Strahlen neutraler Atome zeigen Interferenz- und Beugungsphänomene welche typisch für Wellen sind.

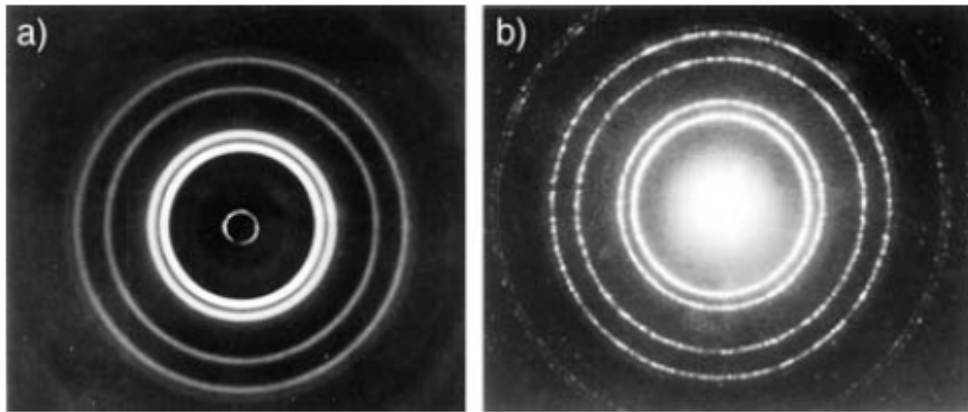


Abbildung 8: Vergleich (a) der Röntgenbeugung an einer dünnen Folie und (b) der Elektronenbeugung

- Erwin Schrödinger stellte die Schrödinger-Gleichung auf

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = \hat{H} \psi(t)$$

wobei  $\hat{H}$  der Hamilton-Operator des zu beschreibenden Systems ist.

Die Schrödinger-Gleichung ist eine Grundgleichung zur Beschreibung der Dynamik von quantenmechanischen Systemen.

— 1927 —

- Arthur Holly Compton erhält den Nobelpreis für die Entdeckung des Compton-Effekts.



— 1929 —

- Louis de Broglie erhält den Nobelpreis für seine Arbeit zum Wellencharakter von Teilchen.

## Literatur

- [1] Demtröder, Wolfgang : *Experimentalphysik 3: Atome, Moleküle und Festkörper*  
Springer Verlag
- [2] Eholtzky, Fritz: *Quantenmechanik und ihre Anwendungen*  
Springer Verlag
- [3] Friedrich, Rudolf: *Quantenmechanik Vorlesung Sommersemester 2010*
- [4] Schwabl, Franz : *Quantenmechanik*  
Springer Verlag