Das freie skalare Feld

1 Klassische Feldtheorie

Definition 1.1 Sei $\phi = \phi(t,x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{1,n-1})$ und $\dot\phi = \partial_t \phi$. Eine (genügend reguläre) Abbildung $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{1,n-1}) \times \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{1,n-1}) \ni (\phi, \dot\phi) \mapsto L[\phi, \dot\phi] \to \mathbb{R}$ heißt *Lagrange-Funktion*.

Für festes t und ϕ ist $L[\phi, \ . \ ] : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n-1}) \to \mathbb{R}$ eine Abbildung zwischen Banach-Räumen.

Definition 1.2 Seien X, Y Banach-Räume, $V \subset X$ offen und $x \in V$. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Falls existent, heißt der lineare stetige Operator $(Df)_x : X \to Y$ mit $\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\big\|f(x+h) - f(x) - (Df)_x(h)\big\| = 0$ die Fréchet-Ableitung von f in x.

Definition 1.3 Die Fréchet-Ableitung $\pi := (DL[\phi, \ . \ ])_{\dot\phi} : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n-1}) \to \mathbb{R}$ von $L[\phi, \ . \ ]$ im Punkt $\dot\phi$ heißt kanonisch-konjugierter Impuls zu ϕ. Die Legendre-Transformation

$$H[\phi, \pi] = \sup_{\dot\phi} \Big(\pi(\dot\phi) - L[\phi, \dot\phi]\Big)$$

der Lagrange-Funktion heißt *Hamilton-Funktion*.

Wählt man speziell $\dot\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$, so ist es üblich, das lineare stetige Funktional π zu identifizieren mit

$$\pi(\dot\phi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx \ \ \varpi(x)\dot\phi(x) \ .$$

Definition 1.4 Wir nennen

$$L[\phi, \dot\phi] := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx \ \ \mathcal{L}[\phi, \dot\phi] \ , \qquad \mathcal{L}[\phi, \dot\phi] := \frac{1}{2}\big(\dot\phi^2 - (\mathrm{grad}\ \phi)^2 - m^2\phi^2\big)$$

die Lagrange-Funktion des freien skalaren Feldes.

Im unter der Identifizierung $\pi \mapsto \varpi$ entstehenden Ausdruck

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx \ \Big(\varpi(x)\dot\phi(x) - \frac{1}{2}\dot\phi(x)\Big) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx \ \Big(\frac{1}{2}(\varpi(x))^2 - \frac{1}{2}(\pi(x) - \dot\phi(x))^2\Big)$$

wird das Supremum für $\dot\phi(x) = \varpi(x)$ angenommen. Es folgt für die Hamilton-Funktion des freien skalaren Feldes:

$$H[\varpi, \phi] := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx \ \ \frac{1}{2}\big(\varpi^2 + (\mathrm{grad}\ \phi)^2 + m^2\phi^2\big)$$

Definition 1.5 Durch

$$S[\phi] := \int_{t_0}^{t_1} dt \ L[\phi(t), \dot\phi(t)]$$

wird die *Wirkung* $S : \mathcal{C}^2([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^{n-1}) \to \mathbb{R}$ definiert.

Das Hamiltonsche Prinzip besagt, daß sich die Bewegungsgleichungen als stationäre Punkte der Wirkung ergeben, also als jene Konfigutation ϕ, für die die Gâteaux-Ableitung

$$DS[\phi;\psi] = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}(S[\phi+\tau\psi] - S[\phi])$$

in eine beliebige Richtung ψ mit festgehaltenen Randwerten verschwindet:

$$DS[\phi;\psi] = 0 \qquad \text{für alle } \psi \in \mathcal{C}_0^2[t_0,t_1]\times\mathbb{R}\;,\;\; \text{d.h.} \psi(t_0,x) = \psi(t_1,x) = 0\;.$$

Für das freie skalare Feld findet man nach partieller Integration in t und Verwendung des Gaußschen Integralsatzes $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx\ \mathrm{div}(\psi\ \mathrm{grad}\,\phi) = 0$:

$$DS[\phi;\psi] = \int_{t_0}^{t_1} dt\ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx\ \psi(t,x)\Big(-\partial_t^2\phi(t,x) + \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi(t,x) - m^2\phi(t,x)\Big)$$

und damit die *Klein-Gordon-Gleichung*

$$\partial_t^2\phi(t,x) = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi(t,x) - m^2\phi(t,x)\;. \tag{1.1}$$

Durch Fourier-Transformation

$$\phi(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dp}{(2\pi)^{n-1}}\ \hat{\phi}(t,p)\ e^{\mathrm{i}\langle p,x\rangle} \tag{1.2}$$

entsteht

$$\partial_t^2\hat{\phi}(t,p) + \omega_p^2\hat{\phi}(t,p) = 0\;, \qquad \omega_p = \sqrt{\langle p,p\rangle + m^2} \tag{1.3}$$

mit Lösung

$$\hat{\phi}(t,p) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\Big(a_p\ e^{-i\omega_p t} + a_{-p}^\dagger\ e^{i\omega_p t}\Big)\;, \qquad a_p, a_{-p}^\dagger \in \mathbb{C}\;. \tag{1.4}$$

Somit gilt

$$\hat{\varpi}(t,p) = \sqrt{\frac{\omega_p}{2}}(-\mathrm{i})\Big(a_p\ e^{-i\omega_p t} - a_{-p}^\dagger\ e^{i\omega_p t}\Big)\;. \tag{1.5}$$

Unter Wirkung der Translationsgruppe transformiert sich das skalare Feld gemäß $\phi(t,x) \mapsto \phi(t+a_0, x_i+a_i) = \phi(t,x) + a_0\partial_t\phi(t,x) + \sum_i a_i\partial_i\phi(t,x) + \mathcal{O}(a^2)$. Invarianz der Theorie unter diesen Translationen führt nach dem Noether-Theorem auf Erhaltungssätze. Man zeigt, daß die erhaltenen Ladungen gegeben sind durch Energie $H[\varpi,\phi]$ und Impuls

$$P[\varpi,\phi] = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx\ \ \varpi(x)\ (\mathrm{grad}\ \phi)(x)\;.$$

2 Quantisierung

Die Zeit t wird ab jetzt explizit berücksichtigt. In Analogie zur Quantenmechanik werden nun Φ, Π als *operatorwertige Distributionen* auf einem Hilbert-Raum aufgefaßt, für die man die folgenden *gleichzeitigen* Kommutatorrelationen fordert:

$$[\Phi(t,x),\Phi(t,y)] = 0\;, \qquad [\Pi(t,x),\Pi(t,y)] = 0\;, \qquad [\Phi(t,x),\Pi(t,y)] = \mathrm{i}\delta(x-y)\;. \quad (2.1)$$

Dabei ist der letzte Kommutator zu verstehen in Anwendung auf Testfunktionen $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$.

$$[\Phi_t(f),\Pi_t(g)] = \int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^{n-1}} dx\,dy\; f(x)g(y)[\Phi(t,x),\Pi(t,y)] = \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx\; f(x)g(x) = \mathrm{i}\langle f,g\rangle\;.$$

Wir verzichten auf das Einsetzen der Testfunktionen und arbeiten mit symbolischen Formeln für die Distributionen.

Die Kommutatorrelationen lassen sich nun in Analogie zur klassischen Lösung (1.4) und (1.5) realisieren durch den Ansatz

$$\Phi(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dp}{(2\pi)^{n-1}\sqrt{2\omega_p}} \left(a_p\; e^{-\mathrm{i}(\omega_p t - \langle p,x\rangle)} + a_p^\dagger\; e^{\mathrm{i}(\omega_p t - \langle p,x\rangle)}\right)\,, \quad (2.2)$$

$$\Pi(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dp}{(2\pi)^{n-1}}\sqrt{\frac{\omega_p}{2}}(-\mathrm{i}) \left(a_p\; e^{-\mathrm{i}(\omega_p t - \langle p,x\rangle)} - a_p^\dagger\; e^{\mathrm{i}(\omega_p t - \langle p,x\rangle)}\right)\,, \quad (2.3)$$

mit

$$[a_p, a_{p'}] = 0\;, \qquad [a_p^\dagger, a_{p'}^\dagger] = 0\;, \qquad [a_p, a_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3\delta(p-p')\;. \quad (2.4)$$

Zum Nachweis wird $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dp}{(2\pi)^{n-1}}\; e^{\mathrm{i}\langle p,x\rangle} = \delta(x)$ benötigt. Analog gilt $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx\; e^{\mathrm{i}\langle p,x\rangle} = (2\pi)^{n-1}\delta(p)$.

Ein Hilbert-Raum $\mathcal{H}$, auf dem Φ, Π als unbeschränkte Operatoren wirken, läßt sich nun ausgehend von einem ausgezeichneten Vakuum-Vektor $\Omega \in \mathcal{H}$ mit $\langle\Omega,\Omega\rangle = 1$ erklären als

$$\mathcal{H} = \overline{\mathrm{span}\Big\{a_{p_1}^\dagger \cdots a_{p_N}^\dagger\Omega \;:\; N\in\mathbb{N}\;,\; p_i\in\mathbb{R}^{n-1}\Big\}}^{\|\;\|}\;,$$

zusammen mit $a_p\Omega = 0$ für alle p sowie der Konvention $a_p^\dagger = (a_p)^*$ bezüglich des Skalarprodukts auf $\mathcal{H}$.

Allgemein liefert die Quantisierung der klassischen erhaltenen Ladungen die Generatoren der zugehörigen Symmetriegruppe. Entsprechend betrachten wir die Quantisierung der Hamilton-Funktion unter Verwendung von (2.4):

$$\begin{aligned}
H' = \frac{1}{2}\int dx \int \frac{dp}{(2\pi)^{n-1}} \int \frac{dq}{(2\pi)^{n-1}} \\
\times \Big\{ \Big((-\mathrm{i})^2 \sqrt{\frac{\omega_p\omega_q}{4}} \Big(a_p\; e^{-\mathrm{i}(\omega_p t - \langle p,x\rangle)} - a_p^\dagger\; e^{\mathrm{i}(\omega_p t - \langle p,x\rangle)}\Big)\Big(a_q\; e^{-\mathrm{i}(\omega_q t - \langle q,x\rangle)} - a_q^\dagger\; e^{\mathrm{i}(\omega_q t - \langle q,x\rangle)}\Big) \\
+ \frac{(-\mathrm{i})^2}{\sqrt{4\omega_p\omega_q}} \Big\langle p a_p\; e^{-\mathrm{i}(\omega_p t - \langle p,x\rangle)} - p a_p^\dagger\; e^{\mathrm{i}(\omega_p t - \langle p,x\rangle)}, q a_q\; e^{-\mathrm{i}(\omega_q t - \langle q,x\rangle)} - q a_q^\dagger\; e^{\mathrm{i}(\omega_q t - \langle q,x\rangle)} \Big\rangle \\
+ m^2 \frac{1}{\sqrt{4\omega_p\omega_q}} \Big(a_p\; e^{-\mathrm{i}(\omega_p t - \langle p,x\rangle)} + a_p^\dagger\; e^{\mathrm{i}(\omega_p t - \langle p,x\rangle)}\Big)\Big(a_q\; e^{-\mathrm{i}(\omega_q t - \langle q,x\rangle)} + a_q^\dagger\; e^{\mathrm{i}(\omega_q t - \langle q,x\rangle)}\Big)\Big\}\;.
\end{aligned}$$

Das Integral von $e^{\pm\mathrm{i}\langle p+p',x\rangle}$ über x liefert eine δ-Distribution, so daß mit $\omega_{-p} = \omega_p$ folgt:

$$\begin{aligned}
H' = \int \frac{dp}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{2}\Big\{ \Big(-\frac{\omega_p}{2}\Big(a_p a_{-p}\, e^{-2\mathrm{i}\omega_p t} - a_p a_p^\dagger - a_p^\dagger a_p + a_p^\dagger a_{-p}^\dagger\, e^{2\mathrm{i}\omega_p t}\Big) \\
- \frac{1}{2\omega_p}\Big(-\langle p,p\rangle a_p a_{-p}\, e^{-2\mathrm{i}\omega_p t} - \langle p,p\rangle a_p a_p^\dagger - \langle p,p\rangle a_p^\dagger a_p - \langle p,p\rangle a_p^\dagger a_{-p}^\dagger\, e^{2\mathrm{i}\omega_p t}\Big) \\
+ \frac{m^2}{2\omega_p}\Big(a_p a_{-p}\, e^{-2\mathrm{i}\omega_p t} + a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p + a_p^\dagger a_{-p}^\dagger\, e^{2\mathrm{i}\omega_p t}\Big) \\
= \int \frac{dp}{(2\pi)^{n-1}}\, \frac{\omega_p}{2}\big(a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p\big)\ . \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt ist $\omega_p^2 = \langle p,p\rangle + m^2$ benutzt, siehe (1.3). Das Ergebnis führt bereits auf eine erste Divergenz: Es gilt nämlich $(a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p)\Omega = \Omega$ für alle p, somit $H\Omega = \int \frac{dp}{(2\pi)^{n-1}}\, \frac{\omega_p}{2} \to \infty$. Dabei ist $\frac{\omega_p}{2} > 0$ die Grundzustandsenergie des harmonischen Oszillators der Frequenz ω_p, und die gesamte Grundzustandsenergie divergiert. Deshalb vereinbart man

Definition 2.1 (Normalordnung) Sei $P(a,a^\dagger)$ ein Polynom in Erzeugern $a_p^\dagger$ und Vernichtern a_q. Dann heißt das Polynom $:P(a,a^\dagger):$, das durch Permutation aller $a_p^\dagger$ nach links von allen a_q **ohne Berücksichtigung der Kommutatorrelation** entsteht, die *Normalordnung* von $P(a,a^\dagger)$.

Somit definieren wir korrekter:

Definition 2.2 Das normalgeordnete Operatorprodukt

$$H = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx\ \ \frac{1}{2}\big(:\Pi^2: + :(\mathrm{grad}\,\Phi)^2: + m^2 :\Phi^2: \big) \equiv \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dp}{(2\pi)^{n-1}}\, \omega_p a_p^\dagger a_p$$

heißt Hamilton-Operators des freien Skalarfeldes.

Es folgt mit Hilfe der Kommutatorrelationen (2.4)

$$[H,a_p^\dagger] = \omega_p a_p \qquad [H,a_p] = -\omega_p a_p\ , \qquad \Rightarrow \quad [H,\Phi] = -i\partial_t\Phi\ ,\ \ [H,\Pi] = -i\partial_t\Pi\ .$$

In diesem Sinn ist H der unbeschränkte Operator, der nach dem Satz von Stone die Zeittranslation generiert:

$$e^{\mathrm{i}H\tau}\Phi(t,x)e^{-\mathrm{i}H\tau} = \Phi(t+\tau,x)\ , \qquad e^{\mathrm{i}H\tau}\Pi(t,x)e^{-\mathrm{i}H\tau} = \Pi(t+\tau,x)\ . \qquad (2.6)$$

Analog definiert man den *Impulsoperator* als

$$P_j = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx\ \ :\Pi\partial_j\Phi: \qquad \longrightarrow \qquad P_j = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dp}{(2\pi)^{n-1}}\, p_j a_p^\dagger a_p\ . \qquad (2.7)$$

Es folgt $[P_j,\Phi] = \mathrm{i}\partial_j\Phi$ und $[P_j,\Pi] = \mathrm{i}\partial_j\Pi$, somit generiert $-P_i$ die räumliche Translation:

$$e^{-\mathrm{i}\sum_j y_j P_j}\Phi(t,x)e^{\mathrm{i}\sum_j y_j P_j} = \Phi(t,x+y)\ , \qquad e^{-\mathrm{i}\sum_j y_j P_j}\Pi(t,x)e^{\mathrm{i}\sum_j y_j P_j} = \Pi(t,x+y)\ . \qquad (2.8)$$

3 Korrelationsfunktionen

Wir betrachten zunächst den Vakuumerwartungswert des Operatorprodukts $\Phi(s,x)\Phi(t,y)$

$$D(t,x;s,y) := \langle \Omega, \Phi(t,x)\Phi(s,y)\Omega\rangle \ . \tag{3.1}$$

Nach dem Wightmanschen Rekonstruktionstheorem (und der Faktorisierung der höheren Korreleationsfunktionen als Produkte von 2-Punktfunktionen) beschreibt $D(t,x;s,y)$ vollständig die Theorie des freien Feldes. Wegen $a_p\Omega = 0$ und $a_p^\dagger = (a_p)^*$ folgt

$$\begin{aligned} D(t,x;s,y) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dp}{(2\pi)^{n-1}} \int \frac{dq}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{\sqrt{4\omega_p\omega_q}} \underbrace{\langle \Omega, a_p a_q^\dagger \Omega\rangle}_{=(2\pi)^{n-1}\delta(p-q)} e^{-\mathrm{i}(\omega_p t - \langle p,x\rangle)} e^{+\mathrm{i}(\omega_q s - \langle q,y\rangle)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dp}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{2\omega_p} e^{-\mathrm{i}(\omega_p(t-s) - \langle p, x-y\rangle)} \ . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Damit hängt D nur von der Differenz der Argumente ab, und wir können z.B. $s=0$ und $y=0$ wählen. Gegebenenfalls fassen wir die Argumente zu Punkten im Minkowski-Raum zusammen: $p_M = (E,p)$, $x_M = (t,x)$ und $\langle p_M, x_M\rangle_M := Et - \langle p,x\rangle$.

Lemma 3.1 *$D(t,x;s,y)$ ist eine Lorentz-Invariante.*

Beweis. Es gilt

$$\frac{1}{2\omega_p} = \int_0^\infty \delta\big(\sqrt{E^2 - \langle p,p\rangle - m^2}\big) = \int_{-\infty}^\infty \delta\big(\sqrt{E^2 - \langle p,p\rangle - m^2}\big)\theta(E)$$

unter Verwendung des Transformationssatzes $\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x - x_0)$ und der Heaviside-Funktion

$$\theta(x) = \begin{cases} x & \text{für } x > 0 \ , \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \ . \end{cases}$$

Damit entsteht das Integral über den Vorwärtslichtkegel im Impulsraum

$$D(x_M; y_M) = 2\pi \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dp_M}{(2\pi)^n} \delta(\langle p_M, p_M\rangle_M - m^2)\theta(E) \ e^{-\mathrm{i}\langle p_M, x_M - y_M\rangle_M} \ . \tag{3.3}$$

Der Vorwärtslichtkegel bleibt invariant unter Lorentz-Transformationen, die die Zeitorientierung erhalten. □

Wir diskutieren den Spezialfall $s = t$ der Gleichzeitigkeit in (3.2),

$$D(t,x;t,y) = \int \frac{dp}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{2\omega_p} e^{\mathrm{i}\langle p, x-y\rangle)} \ .$$

In Radialkoordinaten ist $\langle p, x-y\rangle = ur\cos\theta$ mit $r^2 = \langle x-y, x-y\rangle$, das Volumenmaß dann $dp = u^{n-2}du\, \sin\theta\, d\theta\, \frac{\sqrt{\pi}^{n-1}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} D(t,x;t,y) &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^{n-1}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\infty du\, u^{n-2} \frac{1}{2\sqrt{u^2+m^2}} \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta e^{\mathrm{i}ur\cos\theta} \\ &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^{n-1}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\infty du\, u^{n-2} \frac{1}{2\sqrt{u^2+m^2}} \frac{e^{\mathrm{i}ur} - e^{-\mathrm{i}ur}}{\mathrm{i}ur} \\ &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^{n-1}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\infty du\, u^{n-3} \frac{\sin(ur)}{r\sqrt{u^2+m^2}} \ . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Im Fall $n = 4$ konvergiert das Integral gegen

$$D(t,x;t,0)\Big|_{n=4} = \frac{m}{4\pi^2 r} K_1\big(mr\big) \ . \tag{3.5}$$

Die Besselfunktion $K_1(x)$ verschwindet exponentiell für große x, ist aber ungleich Null.

Die Forderung ist deshalb nicht, daß die Korrelation zwischen raumartig getrennten Punkten verschwindet, sondern, daß raumartig getrennt lokalisierten Feldoperatoren miteinander kommutieren. Somit betrachten wir

Definition 3.2

$$\Delta(x_M; y_M) := \langle \Omega, [\Phi(x_M), \Phi(y_M)]\Omega\rangle = D(x_M; y_M) - D(y_M; x_M) \tag{3.6}$$

heißt Kommutatorfunktion.

Nun gilt

$$\begin{aligned}\Delta(x_M; y_M) &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dp_M}{(2\pi)^n} \delta(\langle p_M, p_M\rangle_M - m^2)\theta(E)\ \big(e^{-\mathrm{i}\langle p_M, x_M - y_M\rangle_M} - e^{+\mathrm{i}\langle p_M, x_M - y_M\rangle_M}\big) \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dp_M}{(2\pi)^n} \delta(\langle p_M, p_M\rangle_M - m^2)\big(\theta(E) - \theta(-E)\big)\ e^{-\mathrm{i}\langle p_M, x_M - y_M\rangle_M} \ .\end{aligned}$$

Dabei ist $\mathrm{sign}(E) = \big(\theta(E) - \theta(-E)\big)$ die Vorzeichenfunktion. An gleichen Zeitpunkten ist der Integrand in $\Delta(t,x;t,y)$ eine ungerade Funktion, so daß das Integral verschwindet,

$$\Delta(t,x;t,y) = 0 \qquad \text{für alle } x, y \ .$$

Zusammen mit der Lorentz-Invarianz wird so das Kausalitätsaxiom realisiert, $\Delta(x_M; y_M) = 0$ für $\langle x_M - y_M, x_M - y_M\rangle_M < 0$.

Wegen $(\partial_t^2 - \mathrm{div}_x\,\mathrm{grad}_x + m^2)\Phi(x) = 0$ erfüllt der Kommutator (3.6) die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\partial_t^2 - \mathrm{div}_x\,\mathrm{grad}_x + m^2)\Delta(t,x;s,y) = 0 \ .$$

Zusätzlich gilt wegen der Kommutatorrelation (2.1)

$$\partial_t \Delta(t,x;s,y)\Big|_{s=t} = \langle \Omega, [\Pi(t,x), \Phi(t,y)]\Omega\rangle = -\mathrm{i}\delta(x-y) \ .$$

Damit gilt:

Lemma 3.3 *$\Delta(t,x;s,y)$ ist die eindeutige Lösung der (hyperbolischen) Klein-Gordon-Gleichung zur Anfangsbedingung $\Delta(t,x;t,y) = 0$ und $\partial_t\Delta(t,x;s,y)\Big|_{s=t} = -\mathrm{i}\delta(x-y)$.*
□

Wegen $\Delta(t,x;t,y) = 0$ kann der allgemeine Kommutator zerlegt werden in:

Definition 3.4 In der Zerlegung

$$\begin{aligned}&\Delta(t,x;s,y) = \Delta_R(t,x;s,y) + \Delta_A(t,x;s,y) \ , \\ &\Delta_R(t,x;s,y) := \theta(t-s)\Delta(t,x;s,y) \ , \qquad \Delta_A(t,x;s,y) := \theta(s-t)\Delta(t,x;s,y)\end{aligned} \tag{3.7}$$

heißt die Δ_R die retardierte Greensche Funktion und Δ_R die avancierte Greensche Funktion.

Wir betrachten

$$\begin{aligned}\Delta_R(t,x;s,y) &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dp_M}{(2\pi)^n} \delta(\langle p_M, p_M\rangle_M - m^2)\big(\theta(E) - \theta(-E)\big)\ \theta(t-s) e^{-\mathrm{i}\left(E(t-s) - \langle p, x-y\rangle\right)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dp}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{2\omega_p} \theta(t-s) \Big(e^{-\mathrm{i}\left(\omega_p(t-s) - \langle p, x-y\rangle\right)} - e^{-\mathrm{i}\left(-\omega_p(t-s) - \langle p, x-y\rangle\right)}\Big)\ .\end{aligned}$$

Diese Formel läßt sich alternativ über den Residuensatz realisieren:

Lemma 3.5

$$\Delta_R(t,x;s,y) = \lim_{\epsilon \searrow 0} (+\mathrm{i}) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dE\,dp}{(2\pi)^n} \frac{e^{-\mathrm{i}\left(E(t-s) - \langle p, x-y\rangle\right)}}{E^2 - (\langle p,p\rangle + m^2) + \mathrm{i}\epsilon E}\ . \tag{*}$$

$$\Delta_A(t,x;s,y) = \lim_{\epsilon \searrow 0} (-\mathrm{i}) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dE\,dp}{(2\pi)^n} \frac{e^{-\mathrm{i}\left(E(t-s) - \langle p, x-y\rangle\right)}}{E^2 - (\langle p,p\rangle + m^2) - \mathrm{i}\epsilon E}\ . \tag{**}$$

Beweis. Ist $t > s$, dann dürfen wir in (*) das Integral über E in der *unteren* Halbebene schließen. Dann liegen die beiden Pole $E_\pm = -\frac{\mathrm{i}\epsilon}{2} \pm \sqrt{\omega_p^2 - \epsilon^2/4}$ im Inneren des Integrationsweges, der in negativem Sinn durchlaufen wird. Nach Residuensatz mit $E^2 - (\langle p,p\rangle + m^2) - \mathrm{i}\epsilon E = (E - E_+)(E - E_-)$ gilt

$$\begin{aligned}(*) &= (-2\pi\mathrm{i})(+\mathrm{i}) \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dp}{(2\pi)^n} \Big(\frac{e^{-\mathrm{i}\left(E_+(t-s) - \langle p, x-y\rangle\right)}}{E_+ - E_-} + \frac{e^{-\mathrm{i}\left(E_-(t-s) - \langle p, x-y\rangle\right)}}{E_- - E_+}\Big) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dp}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{2\omega_p} \Big(e^{-\mathrm{i}\left(\omega_p(t-s) - \langle p, x-y\rangle\right)} - e^{-\mathrm{i}\left(-\omega_p(t-s) - \langle p, x-y\rangle\right)}\Big)\ .\end{aligned}$$

Ist dagegen $t < s$, so haben wir das E-Integral in der *oberen* Halbebene zu schließen, in der keine Pole liegen. Damit ist $(*) = 0$ für $t < s$.

Völlig analog folgt (**), wobei beim Schließen in der oberen Halbebene der Integrationsweg in positivem Sinn verläuft. □

Anwenden des Klein-Gordon-Operators kürzt den Nenner, so daß folgt

Lemma 3.6

$$\begin{aligned}(\partial_t^2 - \mathrm{div}_x\,\mathrm{grad}_x + m^2)\Delta_R(t,x;s,y) &= -\mathrm{i}\delta_M(x_M - y_M)\ , \\ (\partial_t^2 - \mathrm{div}_x\,\mathrm{grad}_x + m^2)\Delta_A(t,x;s,y) &= +\mathrm{i}\delta_M(x_M - y_M)\ .\end{aligned}$$

Damit sind $\Delta_R(t,x;s,y)$ bzw. $\Delta_A(t,x;s,y)$ Greensche Funktionen zum Klein-Gordon-Operator mit Lokalisierung bei $t > s$ bzw. $t < s$.

Eine weitere Greensche Funktion wird durch das zeitgeordnete Produkt erhalten:

Definition 3.7

$$\begin{aligned}\Delta_F(t,x;s,y) &= \langle \Omega, T\Phi(t,x)\Phi(s,y)\Omega\rangle \\ &:= \theta(t-s)\langle \Omega, \Phi(t,x)\Phi(s,y)\Omega\rangle + \theta(s-t)\langle \Omega, \Phi(s,y)\Phi(t,x)\Omega\rangle\end{aligned} \tag{3.8}$$

heißt *kausale Greensche Funktion* oder *Feynman-Propagator*.

Somit wirken die Felder in der Reihenfolge ihrer Zeit-Argumente auf das Vakuum Ω. Einsetzen von (3.2) liefert

$$\Delta_F(t,x;s,y) = \int \frac{dp}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{2\omega_p} \Big(\theta(t-s) e^{-\mathrm{i}(\omega_p(t-s) - \langle p, x-y \rangle)} + \theta(s-t) e^{+\mathrm{i}(\omega_p(t-s) - \langle p, x-y \rangle)} \Big) . \tag{3.9}$$

Mit ähnlichen Methoden zeigt man:

Lemma 3.8 *Es gilt*

$$\Delta_F(t,x;s,y) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \mathrm{i} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dE\, dp}{(2\pi)^n} \frac{e^{-\mathrm{i}(E(t-s) - \langle p, x-y \rangle)}}{E^2 - (\langle p,p \rangle + m^2) + \mathrm{i}\epsilon} \tag{$\dagger$}$$

$$(\partial_t^2 - \mathrm{div}_x \, \mathrm{grad}_x + m^2) \Delta_F(t,x;s,y) = -\mathrm{i} \delta_M(x_M - y_M) . \tag{3.10}$$

Beweis. Die Pole liegen sind nun bei

$$E_\pm = (\omega_p^4 + \epsilon^2)^{\frac{1}{4}} \, e^{-\frac{i}{2} \arctan \frac{\epsilon}{\omega_p^2}} .$$

Für $t > s$ können wir das E-Integral in der *unteren* Halbebene schließen, in der der Pol E_+ liegt. Somit folgt (Umlauf in negativem Sinn)

$$(\dagger) = (-2\pi\mathrm{i}) \lim_{\epsilon \searrow 0} \mathrm{i} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dp}{(2\pi)^n} \frac{e^{-\mathrm{i}(E_+(t-s) - \langle p, x-y \rangle)}}{2E_+} \qquad \text{für } t > s .$$

Für $t < s$ schließen wir das E-Integral in der *obere* Halbebene, in der der Pol E_- liegt. Somit folgt (Umlauf in positivem Sinn)

$$(\dagger) = (+2\pi\mathrm{i}) \lim_{\epsilon \searrow 0} \mathrm{i} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dp}{(2\pi)^n} \frac{e^{-\mathrm{i}(E_-(t-s) - \langle p, x-y \rangle)}}{2E_-} \qquad \text{für } t < s .$$

Hier ist noch $p \mapsto -p$ zu substituieren. Der Limes $\epsilon \searrow 0$ liefert (3.9).

Anwenden des Klein-Gordon-Operators auf ($\dagger$) kürzt den Nenner, so daß sich (3.10) ergibt. □

Literatur

[1] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995.

[2] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, Dover Publishing, 2005.

[3] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, vol I*, Cambridge University Press, 2002. Press, 1995.