Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich Mathematik und Informatik

Seminarvortrag

zum Seminar
Algebraische Quantenfeldtheorie

Thema: Von-Neumann Algebren

vorgelegt von: Stefan Steinkamp
Termin: 16.05.2012

1 Operatortopologien auf $\mathcal{B}(H)$

Definition 1.1. Die Menge $\mathcal{B}(H)$ bezeichnet die Menge aller beschränkten, linearen Operatoren auf dem Hilbertraum H.

Definition 1.2. Eine $*$-Unteralgebra U einer $*$-Algebra A ist eine Unteralgebra $U \subseteq A$ für die gilt, $\forall a \in U$ gilt $a^* \in U$.

Definition 1.3.

1. Die schwache Operatortopologie (WOT) auf $\mathcal{B}(H)$ ist die lokalkonvexe Topologie, die von dem Halbnormsystem $\{p_{x,y} : x, y \in H\}$ mit $p_{x,y}(\psi) := |\langle \psi x, y\rangle|$ erzeugt wird.
2. Die starke Operatortopologie (SOT) auf $\mathcal{B}(H)$ ist die lokalkonvexe Topologie, die von dem Halbnormsystem $\{p_x : x \in H\}$ mit $p_x(\psi) := \|\psi x\|$ erzeugt wird.
3. Die stark-*-Operatortopologie (S^*OT) auf $\mathcal{B}(H)$ ist die lokalkonvexe Topologie, die von dem Halbnormsystem $\{p_x : x \in H\} \cup \{p'_x : x \in H\}$ mit ϕ_x wie in der starken Operatortopologie und $p'_x(\psi) := \|\psi^* x\|$.
4. Die Normtopologie (NOT) auf $\mathcal{B}(H)$ ist die von dem Halbnormsystem $\{\|\cdot\|\}$ erzeugte Operatortopologie.

Satz 1.4. *Bezeichne τ_X Topologie auf $\mathcal{B}(H)$ bezüglich des Halbnormensystems von X. Dann gilt*

$$\tau_{WOT} \subseteq \tau_{SOT} \subseteq \tau_{S^*OT} \subseteq \tau_{NOT}.$$

Beweis. $\tau_{WOT} \subseteq \tau_{SOT}$:
Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt direkt, dass für ein beliebiges Netz $(\psi_\lambda)_\lambda$, welches bezüglich der starken Operatortopologie gegen ψ konvergiert gilt, dass

$$\lim_\lambda |\langle(\psi_\lambda - \psi)x|y\rangle| \leq \lim_\lambda \|(\psi_\lambda - \psi)x\| \, \|y\| \to 0.$$

Das Netz $(\psi_\lambda)_\lambda$ konvergiert also auch in der schwachen Operatortopologie gegen ψ.
$\tau_{SOT} \subseteq \tau_{S^*OT}$:
Folgt direkt aus der Definition der Topologien, da die stark-$*$-Operatortopologie von den selben Halbnormen und weiteren gebildet wird, wie die starke Operatortopologie.
$\tau_{S^*OT} \subseteq \tau_{NOT}$:
Ist klar, da jede Halbnorm stetig betüglich der Normtopologie ist. □

Definition 1.5. Eine schwach-abgeschlossene $*$-Unteralgebra mit Eins von $\mathcal{B}(H)$ heißt von-Neumann Algebra.

Beispiel 1.6. Da $\mathbf{1} \in \mathcal{B}(H)$ und $\mathcal{B}(H)$ schwach-abgeschlossen sowie eine $*$-Unteralgebra von sich selbst ist, ist $\mathcal{B}(H)$ eine von-Neumann Algebra.

2 Projektionen

Definition 2.1. Ein Operator $P \in \mathcal{B}(H)$ mit $P = P^* = P^2$ heißt Projektion.

Bemerkung 2.2. Aufgrund von $P = P^* = P^2$ ist klar, dass $P \geq 0$.

Beispiel 2.3.

1. 1_H ist eine Projektion.
2. 0_H ist eine Projektion.
3. Sei $\{e_n\}_n$ eine Orthonormalbasis von H und $S \subseteq \{e_n\}_n$ eine Teilmenge. Dann definiert P_S mit $P_S(e_i) = \{e_i;\ falls\ e_i \in S;\ 0\ sonst\}$ eine orthogonale Projektion von S.

Bemerkung 2.4. Sei $P \in \mathcal{B}(H)$ eine Projektion. Dann ist auch $(1 - P) \in \mathcal{B}(H)$ eine Projektion.

Beweis. Es gilt

$$(1 - P)^* = 1 - P^* = 1 - P$$

und

$$(1 - P)^2 = 1 - 2P + P^2 = 1 - P.$$

□

Satz 2.5. *Seien P, Q Projektionen auf dem Hilbertraum H. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $P \leq Q$,
2. $PQ = P$,
3. $QP = P$,
4. $P(H) \subseteq Q(H)$,
5. $\|P(x)\| \leq \|Q(x)\|$ *für alle* $x \in H$,
6. $Q - P$ *ist eine Projektion.*

Beweis. 2. $\Leftrightarrow$ 3.

$$PQ = P \Leftrightarrow P = P^* = (PQ)^* = Q^*P^* = QP.$$

3. $\Leftrightarrow$ 4.
Ist Klar.
2. $\Rightarrow$ 6.
Es gilt

$$(Q - P)^* = Q^* - P^* = Q - P$$

und

$$(Q - P)(Q - P) = Q^2 - PQ - QP - P^2 = Q - P - P + P = Q - P.$$

6. $\Rightarrow$ 1.
$Q - P$ ist eine Projektion $\Rightarrow Q - P \geq 0\ \ \Rightarrow Q \geq P$.

1. $\Rightarrow$ 5.

$$P \leq Q \Rightarrow \|Q(x)\|^2 - \|P(x)\|^2 = \langle (Q-P)(x), x\rangle = \left\|(Q-P)^{\frac{1}{2}}(x)\right\|^2 \geq 0.$$

5. $\Rightarrow$ 2.

$$\|(P - PQ)(x)\| = \|P(1-Q)(x)\| \leq \left\|(Q-Q^2)(x)\right\| = 0.$$

□

3 Kommutanten und Bikommutanten

Definition 3.1. Sei $S \subseteq \mathcal{B}(H)$ eine Teilmenge. Dann ist der Kommutant von S (bezeichnet mit S') die Menge aller beschränkten Operatoren, die mit jedem Element von S kommutieren, also

$$S' := \{\phi \in \mathcal{B}(H) : \phi\psi = \psi\phi \ \forall \psi \in S\}.$$

Die Menge $S'' := (S')'$ wird als Bikommutant bezeichnet.

Satz 3.2. *Sei $S \subseteq \mathcal{B}(H)$ eine Teilmenge. Dann gilt:*

1. $S \subseteq S''$,
2. $S \subseteq \widetilde{S} \Rightarrow \widetilde{S}' \subseteq S'$ *und* $S'' \subseteq \widetilde{S}''$,
3. $S' = S'''$ *und* $S'' = S''''$,
4. *ist S selbstadjungiert, so ist auch S' selbstadjungiert,*
5. *S' ist eine schwach-abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{B}(H)$ mit $\mathbf{1} \in \mathcal{B}(H)$.*

Beweis.
1. Sei $X \in S$ beliebig. Dann gilt für alle $y \in S'$, dass $xy = yx$. Also ist $x \in S''$.
2. Sei $x \in \widetilde{S}'$. Dann gilt $xy = yx$ für alle $y \in \widetilde{S}$ also auch für alle $y \in S$. Also gilt $\widetilde{S}' \subseteq S'$.
   Hieraus folgt dann direkt, dass $S'' \subseteq \widetilde{S}''$.
3. Wir wissen bereits, dass $S' \subseteq S'''$ und $S \subseteq S'' \subseteq S''''$. Andererseits gilt

   $$x \in S''' \Rightarrow \forall y \in S'' \text{ gilt } xy = yx \overset{S \subseteq S''}{\Rightarrow} \forall y \in S \text{ gilt } xy = yx \Rightarrow x \in S'$$

   und

   $$x \in S'''' \Rightarrow \forall y \in S''' \text{ gilt } xy = yx \overset{S' \subseteq S'''}{\Rightarrow} \forall y \in S' \text{ gilt } xy = yx \Rightarrow x \in S''.$$

   Demnach gilt $S' = S'''$ und $S'' = S''''$.
4. Sei $x \in S'$. Dann gilt für alle $a \in S$

   $$x^*a = (a^*x)^* = (xa^*)^* = ax^*.$$

   Es gilt also $x^* \in S'$ und somit $S'^* \subseteq S'$. Es ist klar, dass $S' = S'^{**} \subseteq S'^*$. Also folgt $S' = S'^*$.

5. Es ist klar, dass $\mathbf{1} \in S'$. Sei $a \in S$, $x, y \in S'$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist
$$a(x+y) = ax + ay = xa + ya = (x+y)a,$$
$$a(\lambda x) = \lambda ax = \lambda xa = (\lambda x)a$$
und
$$a(xy) = (ax)y = (xa)y = x(ay) = x(ya) = (xy)a.$$
Also ist S' eine Unteralgebra von $\mathcal{B}(H)$.
Sei $(x_\lambda)_\lambda$ ein Netz in S', welches in der schwachen Operatortopologie gegen x konvergiert und sei $a \in S$ beliebig. Dann bleibt zu zeigen, dass $xa = ax$. Seien $c, d \in H$ beliebig, dann gilt
$$\langle xa\xi|\eta\rangle = \langle a\xi|x^*\eta\rangle = \lim_\lambda \langle a_\lambda \xi|x^*\eta\rangle = \lim_\lambda \langle xa_\lambda \xi|\eta\rangle = \lim_\lambda \langle a_\lambda x\xi|\eta\rangle = \langle ax\xi|\eta\rangle.$$
Somit ist S' schwach abgeschlossen in $\mathcal{B}(H)$.

$\square$

Lemma 3.3. *Sei S eine $*$-Unteralgebra von $\mathcal{B}(H)$ mit $\mathbf{1}$. Dann gilt bezüglich der starken Operatortopologie, dass S dicht in S'' liegt.*

Beweis. Auf den Beweis wird hier aus zeitlichen Gründen verzichtet. Er steht zum Beispiel in [3]. $\square$

Satz 3.4. *(Bikommutantentheorem) Sei $S \subseteq \mathcal{B}(H)$ eine $*$-Unteralgebra mit $\mathbf{1} \in \mathcal{B}(H)$. Dann sind äquivalent:*

1. *$S = S''$.*
2. *S ist in der schwachen Operatortopologie abgeschlossen,*
3. *S ist in der starken Operatortopologie abgeschlossen.*

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2.
Es gilt nach 3.2, dass $S = S'' = (S')'$ in der schwachen Operatortopologie abgeschlossen ist.
2. $\Rightarrow$ 3.
Nach 1.4 ist die schwache Operatortopologie gröber als die starke Operatortopologie.
3. $\Rightarrow$ 1.
Wir wissen nach 3.3, dass $S \subseteq S''$ dicht liegt, also $\overline{S} = S''$. Desweiteren wissen wir nach 3.2 und 1.4, dass S bezüglich der stark-$*$-Operatortopologie abgeschlossen ist. Es gilt also $S = \overline{S} = S''$. $\square$

Folgerung 3.5. Eine $*$-Unteralgebra S von $\mathcal{B}(H)$ mit $\mathbf{1}$ ist genau dann eine von-Neumann Algebra, wenn eine (und somit alle) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. $S = S''$.
2. S ist schwach abgeschlossen.

3. S ist stark abgeschlossen.

Beweis. Folgt direkt aus der Definition von von-Neumann Algebren und 3.4. $\square$

Folgerung 3.6. Sei $S \subseteq \mathcal{B}(H)$ selbstadjungiert. Dann ist S' eine von-Neumann Algebra.

Beweis. Nach 3.2 ist S' selbstadjungiert und es gilt $S' = S'''$. Desweiteren gilt offensichtlich, dass $\mathbf{1} \in S'$. Mit 3.5 folgt dann, dass S' eine von-Neumann Algebra ist. $\square$

Folgerung 3.7. Sei $S \subseteq \mathcal{B}(H)$ eine Teilmenge. Dann ist $(S \cup S^*)''$ eine von-Neumann Algebra.

Beweis. Dies ist klar, da $S \cup S^*$ und somit $(S \cup S^*)'$ offensichtlich selbstadjungiert. Somit ist $(S \cup S^*)''$ nach 3.6 eine von-Neumann Algebra. $\square$

Bemerkung 3.8. Wir nennen $(S \cup S')''$ die von S erzeugte von Neumann Algebra. Ist S eine von Neumann Algebra, so gilt $S = (S \cup S^*)''$.

4 Faktoren

Definition 4.1. Das Zentrum einer Algebra A ist die Menge

$$\mathcal{Z}(A) := \{x \in A : \; xy = yx \; \forall y \in A\}.$$

Satz 4.2. *Sei $U \subseteq \mathcal{B}(H)$ eine Unteralgebra. Dann gilt*

$$\mathcal{Z}(U) = U \cap U'.$$

Beweis. Die einfache Rechnung

$$\mathcal{Z}(U) = \{x \in U : xy = yx \; \forall y \in U\} = U \cap \{x \in \mathcal{B}(H) : xy = yx \; \forall y \in U\} = U \cap U'$$

zeigt dies. $\square$

Definition 4.3. Eine von Neumann Algebra S mit

$$\mathcal{Z}(S) = \mathbb{C}\mathbf{1}$$

heißt Faktor.

Beispiel 4.4. Sei H ein Hilbertraum. Dann ist die von Neumann Algebra $\mathcal{B}(H)$ ein Faktor.
Sei o.B.d.A. $H \widetilde{\neq} 0$ und $H \widetilde{\neq} \mathbb{C}$, sonst ist die Aussage klar.
Wir berechnen das Zentrum der von Neumann Algebra $\mathcal{B}(H)$. Sei dazu $\psi \in \mathcal{B}(H)'$ beliebig und seien $\xi_1, \xi_2 \in H$ zwei linear unabhängige Vektoren. Seien P_1, P_2 die orthogonalen Projektionen auf die eindimensionalen Unterräume $\mathbb{C}\xi_1$ bzw. $\mathbb{C}\xi_2$ und sei P die orthogonale Projektion auf den Unterraum $\mathbb{C}(\xi_1 + \xi_2)$.
Da $\psi \in \mathcal{B}(H)'$ mit P_1 kommutiert gilt

$$P_1 \psi \xi_1 = \psi P_1 \xi_1.$$

Es gilt also $\psi\xi_1 \in \mathbb{C}\xi_1$ und somit existiert ein $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ mit $\psi\xi_1 = \lambda_1\xi_1$.
Analog folgt die Existenz von λ_2, λ mit $\psi\xi_2 = \lambda_2\xi_2$ und $\psi(\xi_1 + \xi_2) = \lambda(\xi_1 + \xi_2)$.
Aufgrund der Linearität von ψ wissen wir, dass

$$\lambda\xi_1 + \lambda\xi_2 = \lambda(\xi_1 + \xi_2) = \psi(\xi_1 + \xi_2) = \psi\xi_1 + \psi\xi_2 = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2.$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von ξ_1 und ξ_2 folgt nun $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Da ξ_1 und ξ_2 beliebige Vektoren aus H waren, folgt schon, dass

$$\psi\xi = \lambda\xi$$

für alle $\xi \in H$. Somit ist $\psi = \lambda 1_H$.
Somit ist $\mathcal{Z}(\mathcal{B}(H)) = \mathbb{C}1_H$ und $\mathcal{B}(H)$ ein Faktor.

Lemma 4.5. *Sei S ein Faktor, $A \in S$, $B \in S'$ und $AB = 0$. Dann ist $A = 0$ oder $B = 0$.*

Beweis. Da S ein Faktor ist, gilt für alle $B \in S'$, dass $B = \lambda\mathbf{1}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Ist nun $AB = 0$ und $A \neq 0$, so folgt mit dieser Eigenschaft sofort, dass $B = 0$. Dies zeigt schon die Aussage. □

Satz 4.6. *Sei $A \subseteq \mathcal{B}(H)$ eine auf den Hilbertraum H wirkende C^*-Algebra mit $1_H \in A$. Dann sind äquivalent:*

1. *A ist ein Faktor.*
2. *A ist bezüglich der starken Topologie dicht in $\mathcal{B}(H)$.*

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2.
Ist A ein Faktor, so gilt $A' = \mathbb{C}1_H$ und nach 4.4 $A'' = (\mathbb{C}1_H)' = \mathcal{B}(H)$. Nach 3.3 ist nun $A \subseteq A'' = \mathcal{B}(H)$ dicht bezüglich der starken Topologie.
2. $\Rightarrow$ 1.
Ist A bezüglich der starken Topologie dicht in $\mathcal{B}(H)$, so gilt nach 4.4 $A' = \mathcal{B}(H)' = \mathbb{C}1_H$. □

5 Die GNS-Konstruktion

Dieser Teil wird ohne Beweise geführt. Das Ziel ist die GNS-Konstruktion zu wiederholen, diese jedoch nicht zu beweisen. Für einen Beweis ist [3] zu empfehlen.

Definition 5.1. Sei A eine C^*-Algebra und sei $\{0\} \neq H$ ein Hilbertraum. Ein *-Homomorphismus $\pi : A \to \mathcal{B}(H)$ heißt *-Darstellung von A auf H. Eine *-Darstellung $\pi : A \to \mathcal{L}(H)$ heißt:

1. treu, falls π injektiv ist.
2. nichtentartet, falls $\overline{\pi(A)H} = H$, wobei $\pi(A)H := LH\{\pi(a)\xi : a \in A,\ \xi \in H\}$.
3. zyklisch, falls ein $\xi \in H$ existiert mit $\pi(A)\xi$ dicht in H. ξ heißt dann zyklischer Vektor in H.

Bemerkung 5.2. Ist $\pi : A \to \mathcal{B}(H)$ eine *-Darstellung und ist $\xi \in H$, so wird durch

$$\phi_{\pi,\xi} : A \to \mathbb{C}, \ \phi_{\pi,\xi}(a) := < \pi(a)\xi, \xi >$$

ein positives lineares Funktional auf A definiert mit $\|\phi_{\pi,\xi}\| \leq \|\xi\|^2$

Satz 5.3. *(GNS-Konstruktion)[Gelfand-Naimark-Segal] Sei A eine C^*-Algebra und sei ϕ ein positives lineares Funktional mit $\|\phi\| = 1$. Dann existiert ein Hilbertraum H_ϕ, eine zyklische Darstellung $\pi_\phi : A \to \mathcal{B}(H_\phi)$ und ein $\xi_\phi \in H_\phi$ mit $\|\xi_\phi\| = 1$, so dass*

1. *ξ_ϕ ist ein zyklischer Vektor für π_ϕ.*
2. *Es gilt $\phi(a) = < \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi >$ für alle $a \in A$ (also $\phi = \phi_{\pi_\phi,\xi_\phi}$).*

Literatur

[1] R. Haag, *Local Quantum Physics*, 2. Edition, Springer Verlag, 1991.

[2] J. F. R. Jones, *Von Neumann Algebras*, 2003.

[3] G. J. Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1990.