Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **WS 11/12**

Übung zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis Donnerstag, 19.04.12 bis 12 Uhr, in den Briefkästen — Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, wobei $0 < a < b$. Ferner sei $q_n := \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(f)$, wobei $\displaystyle S_n(f) := \sum_{k=0}^{n-1} f(aq_n^k)aq_n^k(q_n - 1)$.

Sei nun $f(x) = x^c$ für alle $x \in [a,b]$, wobei $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Zeigen Sie:

(b) $\displaystyle S_n(f) = \frac{q_n - 1}{q_n^{c+1} - 1}\left(b^{c+1} - a^{c+1}\right)$ für alle $n = 1, 2, \ldots$.

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n(f) = \frac{1}{c+1}(b^{c+1} - a^{c+1})$. (*Hinweis:* Was ist $\displaystyle\lim_{q\to 1}\frac{q-1}{q^{c+1}-1}$?)

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass in der Situation von Aufgabe 1 (b), (c) im Fall $c = -1$ gilt:

(a) $S_n(f) = n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}} - 1\right)$ für alle $n = 1, 2, \ldots$.

(b) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln\frac{b}{a}$. (*Hinweis:* Was ist $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^{t\ln\frac{b}{a}} - 1}{t}$?).

Aufgabe 3. Zeigen Sie mit partieller Integration:

(a) $\displaystyle\int_0^b dx\, x^n\,\mathrm{e}^x = n!(-1)^{n+1} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}b^k\,\mathrm{e}^b$ für alle $b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} dx\, \ln^n x = n!(-1)^{n+1} + \mathrm{e}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (*Hinweis:* Setzen Sie $u(x) = x$.)

Aufgabe 4. Zeigen Sie mit zweifacher partieller Integration:

(a) $\displaystyle\int dx\, x^2 \sin x = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$.

(b) $\displaystyle\int dx\, \sin(\ln x) = \frac{1}{2}x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$.
(*Hinweis:* Setzen Sie $u(x) = x$ und achten Sie auf Vorzeichen.)