Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **WS 11/12**

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis Donnerstag, 26.04.12 bis 12 Uhr, in den Briefkästen — Blatt 3

Aufgabe 1. (a) Bestimmen Sie $A, B, C \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{t^2(t^2-1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}.$$

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$ mit Hilfe der Substitution $t = \sqrt{x}$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \ln 2;$

(b) $\displaystyle\int_0^2 dx \frac{x}{\sqrt{1+4x}} = \frac{5}{6}$ (Substitution $t = \sqrt{1+4x}$);

(c) $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (Substitution $x = 2\tan z$).

Aufgabe 3. Berechnen Sie mit Hilfe der Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$ und gegebenenfalls Partialbruchzerlegung:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sin x}$, (b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$.

(*Hinweis:* Benutzen Sie Beispiele 29.12 und 29.13 der Vorlesung.
Es sollte bei (a) $-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C$ und bei (b) $\ln\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ herauskommen, aber natürlich kommt es auf den Lösungsweg an.)

Aufgabe 4. Wir setzen

$$L(x) := \int_1^x \frac{dt}{t} \quad \text{für } x > 0.$$

Zeigen Sie ohne Benutzung der Eigenschaften des Logarithmus und nur unter Verwendung der obigen Integral-Darstellung folgende Eigenschaften:

(a) Die Funktion $L\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und $L'(x) = 1/x$ für alle $x \in]0,\infty[$.

(b) L wächst streng monoton und ist konkav.

(c) $L(xy) = L(x) + L(y)$ für alle $x, y > 0$. (*Hinweis:* Zerlegung des Integrationsintervalls und Substitution.)

(d) $L(\mathrm{e}^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.