Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 12**
Dr. T. Timmermann

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis Donnerstag, 03.05.12 bis 12 Uhr, in den Briefkästen Blatt 4

Aufgabe 1. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\text{(a)} \int_1^\infty dx\, \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^\alpha}, \qquad \text{(b)} \int_0^1 dx\, \left(\ln\left(1+x^{-3}\right)\right)^\alpha, \qquad \text{(c)} \int_1^\infty dx\, \left(\ln\left(1+x^{-3}\right)\right)^\alpha.$$

(*Hinweis:* Benutzen Sie die Gleichungen $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ und $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.)

Aufgabe 2. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ positiv und monoton fallend sowie $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Ferner sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und periodisch mit Periode $p > 0$, also $g(x+p) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und es gelte $\int_a^{a+p} dx\, g(x) = 0$. Wir setzen

$$g_+(x) := \max(g(x), 0), \qquad g_-(x) := \max(-g(x), 0), \qquad a_n^\pm := \int_{a+np}^{a+(n+1)p} dx\, f(x) g_\pm(x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist also $g = g_+ - g_-$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $a_n^+ > a_{n+1}^-$ und $a_n^- > a_{n+1}^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{n\to\infty} a_n^\pm = 0$.

(b) Die Folge der Summen $s_N^+ := a_{N+1}^+ + \sum_{n=0}^N (a_n^+ - a_n^-)$ ist monoton fallend; die Folge der Summen $s_N^- := -a_{N+1}^- + \sum_{n=0}^N (a_n^+ - a_n^-)$ ist monoton wachsend.

(c) Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty (a_n^+ - a_n^-)$ konvergiert.

(d) Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty dx\, f(x) g(x)$ konvergiert.

Aufgabe 3. Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf Konvergenz:

$$\text{(a)} \int_0^\infty dx\, \cos(x^\alpha) \text{ für } \alpha > 1, \qquad \text{(b)} \int_0^\infty dx\, x^{1/2} \sin x^2, \qquad \text{(c)} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{2x + x^4}}.$$

(*Hinweis:* Hilft bei (a) und (b) Aufgabe 2?)

Aufgabe 4. Die iterierten Logarithmen $\ln_n x$ sind definiert durch $\ln_1 x = \ln x$ und $\ln_{n+1} x = \ln \ln_n x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und hinreichend große $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\ln_n$ monoton wachsend mit $\lim_{x\to\infty} \ln_n x = \infty$, und für hinreichend große $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d \ln_{n+1}}{dx}(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln_2 x \cdot \dots \cdot \ln_n x}.$$

(b) Eine Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ divergiert, falls es ein $C > 0$ gibt mit

$$a_n \geq \frac{C}{x \cdot \ln x \cdot \ln_2 x \cdot \dots \cdot \ln_{n-1} x \cdot \ln_n x} \text{ für hinreichend große } n.$$