Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 12**
Dr. T. Timmermann

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis Donnerstag, 05.07.12 bis 12 Uhr, in den Briefkästen Blatt 12

Für jedes $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ konvergieren die Potenzreihen

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k, \qquad \cos(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}, \qquad \sin(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1},$$

mit $A^0 := E_n$. Ferner kann man zeigen, dass für jede Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$, für die alle Eigenwerte betragsmäßig echt kleiner als Eins sind, folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\ln(E_n + A) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} A^k.$$

Aufgabe 1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $C = A + B$.

(a) Berechnen Sie $\exp(C)$ und $\sin(C)$ mittels einer Diagonalisierung von C. (*Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 3 von Blatt 11).

(b) Berechnen Sie $\exp(B), \cos(B), \sin(B)$.
(*Hinweis:* $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}/(2n)!$ und $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}/(2n+1)!$)

(c) Überlegen Sie sich, dass A, B, C die bekannten Additionstheoreme

$$\exp(C) = \exp(A)\exp(B)\ , \qquad \sin(C) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$$

erfüllen, und berechnen Sie $\exp(C), \cos(C), \sin(C)$ noch einmal mit den Ergebnissen aus (b) und diesen Gleichungen.

Bemerkung: Für allgemeine Matrizen $A, B \in M(n \times n, \mathbb{C})$ sind $\exp(A + B)$ und $\exp(A)\exp(B)$ verschieden! Zu begründen ist, weshalb in diesem speziellen Fall dennoch $\exp(C) = \exp(A)\exp(B)$ gilt.

Aufgabe 2. Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $\ln(E_2 + A) = \begin{pmatrix} \ln\frac{16}{15} & \ln\frac{4}{5} \\ \ln\frac{25}{16} & \ln\frac{25}{12} \end{pmatrix}$.