# Grundlagen der Mathematik, Teil II

## Inhalt


**VI Integralrechnung** **1**

28 Das Riemannsche Integral . . . . . 1
29 Riemannsche Summen . . . . . 7
30 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . . 11
31 Integrationsmethoden . . . . . 14
32 Uneigentliche Integrale . . . . . 21
33 Gleichmäßig konvergente Funktionsfolgen . . . . . 24
34 Vertauschungssätze . . . . . 28
35 Die Γ-Funktion . . . . . 32

**VII Lineare Abbildungen** **37**

36 Definition und Beispiele . . . . . 37
37 Bild und Kern einer linearen Abbildung . . . . . 39
38 Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung . . . . . 42
39 Multiplikation von Matrizen . . . . . 47
40 Zur Theorie linearer Gleichungssysteme . . . . . 50
41 Elementarmatrizen . . . . . 52
42 Kommutative Diagramme und Basiswechsel . . . . . 57
43 Orthonormalsysteme . . . . . 59
44 Fourier-Reihen . . . . . 64
45 Determinanten . . . . . 71
46 Laplacescher Entwicklungssatz und komplementäre Matrix . . 76
47 Eigenwerte, Eigenräume und charakteristisches Polynom . . . 82
48 Diagonalisierbarkeit bei Vielfachheit . . . . . 88
49 Trigonalisierung . . . . . 94
50 Selbstadjungierte und unitäre Endomorphismen . . . . . 98
51 Lineare beschränkte Operatoren auf Hilbert-Räumen . . . . . 105

**VII Lineare Abbildungen**


## Literatur


[1] O. Forster, "Analysis 1," Vieweg (2006).

[2] K. Königsberger, "Analysis 1," Springer (2004).

[3] G. Fischer, "Lineare Algebra," Vieweg (2005).

[4] O. Forster, "Analysis 2," Vieweg (2005).

[5] K. Königsberger, "Analysis 2," Springer (2004).

# Teil VI
# Integralrechnung

Es gibt verschiedene Integralbegriffe, die sich unterscheiden hinsichtlich der Klasse der integrierbaren Funktionen. Wir behandeln hier das Riemann-Integral.

## 28 Das Riemannsche Integral

**Definition 28.1** Eine Funktion $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ von $[a,b]$ derart gibt, daß $\phi$ auf jedem offenen Teilintervall $]x_k, x_{k+1}[$ konstant ist. Die Werte von $\phi$ an den Punkten $x_0, \ldots, x_n$ dürfen dabei beliebig (aber beschränkt) sein.

Die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a,b]$ werde mit $\mathcal{T}[a,b]$ bezeichnet.

**Satz 28.2** *$\mathcal{T}[a,b]$ ist ein (unendlich-dimensionaler) Vektorraum über $\mathbb{C}$.*

*Beweis.* Zu zeigen ist:

i) Die Nullfunktion $\phi(x) = 0$ liegt in $\mathcal{T}[a,b]$.

ii) Aus $\phi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ folgt $\phi + \psi \in \mathcal{T}[a,b]$.

iii) Aus $\phi \in \mathcal{T}[a,b]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ folgt $\lambda\phi \in \mathcal{T}[a,b]$.

i) und iii) sind klar. Zu ii) betrachte man die Unterteilung $\{x_0, \ldots, x_n\}$ zu $\phi$ und $\{x'_0, \ldots, x'_m\}$ zu $\psi$ und bilde die Unterteilung $\{t_0, \ldots, t_k\} := \{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{x'_0, \ldots, x'_m\}$ mit $k \le m + n - 1$ und $t_j < t_{j+1}$. Dann sind $\phi$, $\psi$ und damit $\phi + \psi$ Treppenfunktionen bezüglich der gemeinsamen Unterteilung $\{t_0, \ldots, t_k\}$. □

**Definition 28.3 (Integral für Treppenfunktionen)** Sei $\phi \in \mathcal{T}[a,b]$ definiert bezüglich der Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, und auf den Teilintervallen $]x_{k-1}, x_k[$ habe $\phi$ den Wert $c_k$. Dann setzt man

$$\int_a^b dx\ \phi(x) := \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1})\ .$$

Für reellwertige positive Treppenfunktionen ist das Integral $\displaystyle\int_a^b dx\ \phi(x)$ gleich dem Inhalt der Fläche, die vom Graphen von $\phi$ und den Geraden $x = a$, $x = b$ und $y = 0$ begrenzt wird. Streng genommen muß noch gezeigt werden, daß das so definierte Intgral *unabhängig von der gewählen Unterteilung* der Treppenfunktion ist. Das geschieht durch Zurückführen zweier Unterteilungen auf eine gemeinsame noch feinere Unterteilung und Berücksichtigung der Tatsache, daß die endlich vielen Randpunkte der Teilintervalle zum Integral nicht beitragen. (Für positive

Funktionen haben die Kanten $\{x_k\} \times [0, \phi(x_k)]$ die Fläche 0, was sich dann auf allgemeine Funktionen überträgt.)

Für reellwertige Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ erklären wir $f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

**Satz 28.4** *Für Treppenfunktionen $\phi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt:*

i) $\displaystyle\int_a^b dx\ (\alpha\phi + \beta\psi)(x) = \alpha \int_a^b dx\ \phi(x) + \beta \int_a^b dx\ \psi(x)$ *(Linearität)*

ii) $\displaystyle\Big| \int_a^b dx\ \phi(x) \Big| \leq (b-a) \cdot \sup_{x\in[a,b]} |\phi(x)|$ *(Beschränktheit)*

iii) *Sind $\phi, \psi$ reellwertig mit $\phi \leq \psi$, so gilt*
$\displaystyle\int_a^b dx\ \phi(x) \leq \int_a^b dx\ \psi(x)$ *(Monotonie)*

(Man sagt: Das Integral ist ein lineares, beschränktes und monotones Funktional auf $\mathcal{T}[a, b]$.)

*Beweis.* Nach Wahl gemeinsamer Unterteilungen sind das die üblichen Eigenschaften endlicher Summen. □

**Definition 28.5 (Ober- und Unterintegral)** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte reellwertige Funktion. Dann heißt

$$\int_a^{*b} dx\ f(x) := \inf \Big\{ \int_a^b dx\ \psi(x)\ :\ \psi \in \mathcal{T}[a, b]\ ,\ \psi \geq f \Big\}$$

das *Oberintegral* von $f$ und

$$\int_{a_*}^b dx\ f(x) := \sup \Big\{ \int_a^b dx\ \phi(x)\ :\ \phi \in \mathcal{T}[a, b]\ ,\ \phi \leq f \Big\}$$

das *Unterintegral* von $f$. (Dabei sind die Treppenfunktionen $\phi \in \mathcal{T}[a, b]$ reellwertig.)

Es gilt stets $\displaystyle\int_a^{*b} dx\ f(x) \geq \int_{a_*}^b dx\ f(x)$ wegen der Monotonie des Integrals nach Satz 28.4.iii).

Für reellwertige Treppenfunktionen $\psi \in \mathcal{T}[a, b]$ gilt $\displaystyle\int_a^{*b} dx\ \psi(x) = \int_{a_*}^b dx\ \psi(x)$, denn die Treppenfunktion selbst realisiert das Infimum und Supremum.

**Definition 28.6** Eine beschränkte reellwertige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar*, wenn ihre Ober- und Unterintegrale übereinstimmen; in diesem Fall setzt man

$$\int_a^b dx\ f(x) := \int_a^{*b} dx\ f(x) = \int_{a_*}^b dx\ f(x)\ .$$

Eine beschränkte komplexwertige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt Riemann-integrierbar, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ Riemann-integrierbar sind; in diesem Fall setzt man

$$\int_a^b dx\ f(x) := \int_a^b dx\ (\operatorname{Re} f)(x) + \mathrm{i} \int_a^b dx\ (\operatorname{Im} f)(x)\ .$$

Damit ist jede Treppenfunktion auch Riemann-integrierbar, und ihr Riemann-Integral stimmt mit dem Integral nach Definition 28.3 überein. Im folgenden meinen wir mit 'integrierbar' stets 'Riemann-integrierbar'. Der folgende Satz ist unser wichtigstes Werkzeug für das Riemann-Integral.

**Satz 28.7** *Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ reellwertige Treppenfunktionen $\phi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$ existieren mit $\phi \le f \le \psi$ und*

$$\int_a^b dx\ \psi(x) - \int_a^b dx\ \phi(x) \le \epsilon\ .$$

*Beweis.* ($\Rightarrow$) Nach Definition von inf und sup gibt es eine Treppenfunktionen $\psi \ge f$ mit $\displaystyle\int_a^b dx\ \psi(x) - \int_a^{*b} dx\ f(x) \le \frac{\epsilon}{2}$ und eine Treppenfunktion $\phi \le f$ mit $\displaystyle\int_{a^*}^b dx\ f(x) - \int_a^b \phi(x) \le \frac{\epsilon}{2}$.

($\Leftarrow$) Nach Definition ist $\displaystyle\int_a^{*b} dx\ f(x) - \int_{a^*}^b dx\ f(x) \le \epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$, also stimmen Ober- und Unterintegral überein. □

**Satz 28.8** *Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integierbar.*

*Beweis.* Nach Satz 22.13 sind stetige Funktionen auf kompakten Intervallen auch gleichmäßig stetig. Also gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{b-a}{n} < \delta$ und die Unterteilungsstellen $x_k := a + k\frac{b-a}{n}$ mit $0 \le k \le n$. Für $1 \le k \le n$ setze $c_k := \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ und $c'_k := \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$. Konstruiere die Treppenfunktionen $\phi, \psi$ mit der Unterteilung $\{x_0, \ldots, x_n\}$ derart, daß $\psi$ auf $[x_{k-1}, x_k]$ den Wert $c_k$ hat und $\phi$ auf $[x_{k-1}, x_k]$ den Wert $c'_k$. Nach Konstruktion gilt $\phi \le f \le \psi$.

Nach dem Extremwertsatz 22.9 wird das Supremum und Infimum angenommen, d.h. es gibt $\xi_k, \xi'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ mit $c_k = f(\xi_k)$ und $c'_k = f(\xi'_k)$. Wegen $|\xi_k - \xi'_k| < \delta$ ist $|c_k - c'_k| < \frac{\epsilon}{b-a}$ für alle $k$ und deshalb $\psi(x) - \phi(x) < \frac{\epsilon}{b-a}$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt nach Satz 28.4

$$\int_a^b dx\ \psi(x) - \int_a^b dx\ \phi(x) = \int_a^b dx\ (\psi - \phi)(x) \le (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |\psi(x) - \phi(x)| < \epsilon\ .$$

Nach Satz 28.7 ist $f$ integrierbar. □

**Satz 28.9** *Jede monotone beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.*

*Beweis.* (für $f$ monoton wachsend) Wir wählen eine äquidistante Unterteilung $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ und die Treppenfunktionen

$$\begin{aligned} \phi(x) &:= f(x_{k-1}) && \text{für } x_{k-1} \le x < x_k \\ \psi(x) &:= f(x_k) && \text{für } x_{k-1} \le x < x_k \end{aligned}$$

und $\phi(b) = \psi(b) = f(b)$. Dann gilt $\phi \le f \le \psi$ und

$$\begin{aligned} \int_a^b dx\ \psi(x) - \int_a^b dx\ \phi(x) &= \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \ . \end{aligned}$$

Wähle $n > \frac{1}{\epsilon}(b-a)(f(b) - f(a))$, dann ist $f$ integrierbar nach Satz 28.7. □

**Beispiel 28.10** Wir betrachten die monotone Funktion $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$. Dann ist mit den Bezeichnungen im vorigen Beweis

$$\begin{aligned} \int_0^b dx\ \psi(x) &= \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{kb}{n}\Big)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{b^3}{3}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\Big(1 + \frac{1}{2n}\Big) \ , \\ \int_0^b dx\ \phi(x) &= \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{(k-1)b}{n}\Big)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{b^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{b^3}{3}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{1}{2n}\Big) \ . \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\frac{b^3}{3}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{1}{2n}\Big) \le \int_0^b dx\ x^2 \le \frac{b^3}{3}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\Big(1 + \frac{1}{2n}\Big)$$

für alle $n \in \mathbb{N}^\times$, also $\displaystyle\int_0^b dx\ x^2 = \frac{b^3}{3}$. ◁

Wir werden nun grundlegende Eigenschaften des Riemann-Integrals zeigen. Diese Beweise beruhen auf der Einschachtelung integrierbarer Funktionen durch Treppenfunktionen und sind leider etwas mühsam.

**Satz 28.11** *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ integrierbare Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann ist auch die Funktion $\alpha f + \beta g$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b dx\ (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \int_a^b dx\ f(x) + \beta \int_a^b dx\ g(x) \ .$$

*Somit bildet die Menge der über $[a,b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen einen unendlich-dimensionalen Vektorraum.*

*Beweis.* Es genügt, den Satz für reellwertige $f, g$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zu beweisen. Der allgemeine Fall läßt sich dann mit Definition 28.6 darauf zurückführen. Wir betrachten zunächst $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\times$. Nach Voraussetzung gibt es zu $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ mit $\phi_1 \le f \le \psi_1$ und $\phi_2 \le g \le \psi_2$ sowie

$$\int_a^b dx\ \psi_1(x) - \int_a^b dx\ \phi_1(x) \le \frac{\epsilon}{2\alpha}\ , \qquad \int_a^b dx\ \psi_2(x) - \int_a^b dx\ \phi_2(x) \le \frac{\epsilon}{2\beta}\ .$$

Dann ist $\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \le \alpha f + \beta g \le \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$, und nach Satz 28.4 gilt

$$\int_a^b dx\ (\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)(x) - \int_a^b dx\ (\alpha\phi_1 + \beta\psi_2)(x) \le \epsilon\ .$$

Damit ist $\alpha f + \beta g$ integrierbar. Sowohl $I_1 = \int_a^b dx\ (\alpha f + \beta g)(x)$ als auch $I_2 = \alpha \int_a^b dx\ f(x) + \beta \int_a^b dx\ g(x)$ liegen zwischen $\int_a^b dx\ (\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)(x)$ und $\int_a^b dx\ (\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)(x)$, also gilt $I_1 = I_2$.

Mit $f$ ist auch $-f$ integrierbar durch Wahl der Treppenfunktionen $-\psi_1 \le -f \le -\phi_1$, so daß die Aussage auch für $\alpha < 0$ und/oder $\beta < 0$ gilt. □

**Satz 28.12** *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Dann gilt:*

i) *Ist $f \le g$, so folgt $\int_a^b dx\ f(x) \le \int_a^b dx\ g(x)$.*

ii) *Die Funktionen $f_+ := \max(f, 0)$ und $f_- := \max(-f, 0)$ sowie $|f| = f_+ + f_-$ sind integrierbar, und es gilt $\left| \int_a^b dx\ f(x) \right| \le \int_a^b dx\ |f(x)|$.*

iii) *Für jedes $p \in [1, \infty[$ ist die Funktion $|f|^p$ integrierbar.*

iv) *Die Funktion $fg$ ist integrierbar.*

*Beweis.* i) Es ist $g - f \ge 0$ eine integrierbare Funktion, deren (Unter)integral $\ge$ dem Integral der Treppenfunktion 0 ist. Also ist $\int_a^b dx\ (g - f)(x) \ge 0$.

ii) Aus $\psi \ge f \ge \phi$ folgt $\psi_+ \ge f_+ \ge \phi_+$ und $\phi_- \ge f_- \ge \psi_-$. Dann gilt $\psi - \phi = (\psi_+ - \psi_-) - (\phi_+ - \phi_-) = \psi_+ - \phi_+ + (\phi_- - \psi_-) \ge \psi_+ - \phi_+$, also $\int_a^b dx\ (\psi_+ - \phi_+)(x) \le \int_a^b dx\ (\psi - \phi)(x) \le \epsilon$. Damit ist $f_+$ integrierbar, analog auch $f_- = (-f)_+$ und damit $|f| = f_+ + f_-$. Wegen $f \le |f|$ und $-f \le |f|$

gelten $\int_a^b dx\ f(x) \le \int_a^b dx\ |f(x)|$ und $-\int_a^b dx\ f(x) \le \int_a^b dx\ |f(x)|$, folglich $\Big|\int_a^b dx\ f(x)\Big| \le \int_a^b dx\ |f(x)|$.

iii) Die Funktion $f$ ist beschränkt, $|f| \le M$. Wegen der Linearität genügt es, $0 \le f \le 1$ zu betrachten. Nach Voraussetzung gibt es Treppenfunktionen $\phi, \psi$ mit $0 \le \phi \le f \le \psi \le 1$ und $\int_a^b dx\ \psi(x) - \int_a^b dx\ \phi(x) \le \frac{\epsilon}{p}$. Die Funktionen $\phi^p$ und $\psi^p$ sind wieder Treppenfunktionen mit $\phi^p \le |f|^p \le \psi^p$. Nach dem Schrankensatz 24.5 für die Funktion $h : \psi \mapsto \psi^p$ mit $0 \le h' \le p$ auf $[0,1]$ gilt $\frac{\psi^p - \phi^p}{\psi - \phi} \le p$ und damit

$$\int_a^b dx\ (\psi^p - \phi^p)(x) \le p \int_a^b dx\ (\psi - \phi)(x) \le \epsilon\ .$$

Damit ist $|f|^p$ integrierbar.

iv) Verwende $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$. □

Insbesondere sind auch $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ und $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ integrierbar.

**Satz 28.13** *Sei $a < b < c$. Eine Funktion $f : [a,c] \to \mathbb{C}$ ist genau dann integrierbar, wenn $f$ über $[a,b]$ und über $[b,c]$ integrierbar ist, und dann gilt* $\int_a^c dx\ f(x) = \int_a^b dx\ f(x) + \int_b^c dx\ f(x)$.

*Beweis.* Folgt durch Unterteilung der approximierenden Treppenfunktionen in $b$. □

Man setzt $\int_a^a dx\ f(x) := 0$ und $\int_b^a dx\ f(x) = -\int_a^b dx\ f(x)$ für $b \ge a$, falls $f$ über $[a,b]$ integrierbar ist. Die Zusammensetzungsformel aus Satz 28.13 gilt dann für beliebige $a, b, c$, wenn $f$ über $[\min(a,b,c), \max(a,b,c)]$ integrierbar ist. Daraus erhalten wir im Beispiel 28.10

$$\int_a^b dx\ x^2 = \int_a^0 dx\ x^2 + \int_0^b dx\ x^2 = \int_0^b dx\ x^2 - \int_0^a dx\ x^2 = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)\ .$$

**Satz 28.14 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)** *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion mit $g \ge 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b dx\ (fg)(x) = f(\xi) \int_a^b dx\ g(x)$. Für $g = 1$ gilt speziell $\int_a^b dx\ f(x) = (b-a) f(\xi)$ für ein $\xi \in [a,b]$.*

*Beweis.* Setze $M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ und $m := \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, dann gilt $mg \le fg \le Mg$ und folglich

$$m \int_a^b dx\ g(x) \le \int_a^b dx\ (fg)(x) \le M \int_a^b dx\ g(x)\ .$$

Somit gibt es ein $\lambda \in [m, M]$ mit $\displaystyle\int_a^b dx\ (fg)(x) = \lambda \int_a^b dx\ g(x)$. Nach dem Extremwertsatz (Satz 22.9) nimmt die stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ihr Supremum $M$ und Infimum $m$ an. Nach dem Zwischenwertsatz (Folgerung 20.8) gibt es dann ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \lambda$. □

Man nennt $M(f) := \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b dx\ f(x)$ den *Mittelwert* der stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Allgemeiner heißt $M_g(f) := \dfrac{\displaystyle\int_a^b dx\ (fg)(x)}{\displaystyle\int_a^b dx\ g(x)}$ der bezüglich $g$ gewichtete Mittelwert von $f$.

## 29 Riemannsche Summen

Wir zeigen nun, daß eine approximierende Treppenfunktion weitgehend beliebig ist, solange die Unterteilung genügend fein wird.

**Satz 29.1 (Riemannsche Summen)** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für eine beliebige Unterteilung $a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b$ von $[a, b]$ mit $|x_{k+1} - x_k| < \delta$ und beliebige Wahl von Stützstellen $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ gilt*

$$\Big| \int_a^b dx\ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \Big| < \epsilon\ .$$

*Beweis.* i) Sei zunächst $f$ eine Treppenfunktion, die bezüglich einer Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ definiert ist, und $M := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Unterteilung von $[a, b]$ mit $|x_{k+1} - x_k| < \delta$. Für beliebige Wahl von Stützstellen $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ definieren wir eine Treppenfunktion $\Phi \in \mathcal{T}[a, b]$ durch $\Phi(x) = f(\xi_k)$ für $x_k < x \le x_{k+1}$ und $\Phi(a) = f(\xi_0)$. Dann gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \int_a^b dx\ \Phi(x)$ und

$$\Big| \int_a^b dx\ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \Big| \le \int_a^b dx\ |f(x) - \Phi(x)|\ .$$

Die Funktionen $f$ und $\Phi$ stimmen auf jedem offenen Intervall $]x_k, x_{k+1}[$ überein, für das $[x_k, x_{k+1}]$ keinen Punkt $t_j$ enthält. Damit ist $f - \Phi \neq 0$ höchstens auf $2m$ Teilintervallen. Deren Gesamtlänge ist $< 2m\delta$. Wegen $|f(x) - \Phi(x)| \leq 2M$ für alle $x \in [a, b]$ folgt

$$\int_a^b dx\ |f(x) - \Phi(x)| < 4Mm\delta\ .$$

ii) Sei nun $f$ wieder eine beliebige integrierbare Funktion. Wähle $\delta < \frac{\epsilon}{8Mm}$ für die beiden Treppenfunktion $\phi, \psi$ mit $\phi \leq f \leq \psi$ und $\int_a^b dx\ (\psi - \phi)(x) < \frac{\epsilon}{2}$. Dann ist auch

$$\sum_{k=0}^{n-1} \phi(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \psi(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

d.h. nach i) gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \in \Big] - \frac{\epsilon}{2} + \int_a^b dx\ \phi(x), \frac{\epsilon}{2} + \int_a^b dx\ \psi(x) \Big[$$

Aus $\int_a^b dx\ \psi(x) \leq \frac{\epsilon}{2} + \int_a^b dx\ f(x)$ und $\int_a^b dx\ \phi(x) \geq -\frac{\epsilon}{2} + \int_a^b dx\ f(x)$ folgt die Behauptung. □

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt folglich

$$\int_a^b dx\ f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)\ ,$$

*falls* $\{x_k\}$ eine von $n$ abhängige Unterteilung von $[a, b]$ ist mit $\max(|x_{k+1} - x_k|) \to 0$ für $n \to \infty$ und $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

**Beispiel 29.2** $\int_0^a dx\ \cos x = \sin a\ .$

*Beweis.* Wähle $(n + 1)$ Stützstellen $x_k = \frac{ka}{n}$, $0 \leq k \leq n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_0^a dx\ \cos x &= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\Big(\frac{ka}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \Big(e^{\frac{\mathrm{i}ka}{n}} + e^{\frac{-\mathrm{i}ka}{n}}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{2n} \Big(\frac{1 - e^{\mathrm{i}a}}{1 - e^{\frac{\mathrm{i}a}{n}}} + \frac{1 - e^{-\mathrm{i}a}}{1 - e^{-\frac{\mathrm{i}a}{n}}}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{2n} \Big(e^{\frac{\mathrm{i}a}{2}(1-\frac{1}{n})} \frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2n}} + e^{-\frac{\mathrm{i}a}{2}(1-\frac{1}{n})} \frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2n}}\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{2n}\Big(2\cos\Big(\frac{a}{2}-\frac{a}{2n}\Big)\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2n}}\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2n}}{\frac{\sin\frac{a}{2n}}{\frac{a}{2n}}} + \frac{a}{2n}\frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a}{2n}}{\sin\frac{a}{2n}}\Big)\\
&= \sin a
\end{aligned}
$$

unter Verwendung von $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ und $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$. □

Im Prinzip läßt sich auf ähnliche Weise die Berechnung des Riemann-Integrals auf die Berechnung von Reihen zurückführen. Tatsächlich sind Integrale über den später einzuführenden Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung meist einfacher zu berechnen als Reihen, und so können manche Reihen über den 'Umweg' der Integrale berechnet werden. Riemannsche Summen sind aber ein wichtiges Hilfmittel in Beweisen:

**Satz 29.3** *Für komplexwertige integrierbare Funktionen* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *gilt* $\Big|\int_a^b dx\ f(x)\Big| \le \int_a^b dx|f(x)| \le (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

*Beweis.* Wir nehmen das Gegenteil an, $\Big|\int_a^b dx\ f(x)\Big| - \int_a^b dx\ |f(x)| = \epsilon > 0$. Wir wählen Riemannsche Summen für $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ und $|f|$ mit

$$
\begin{aligned}
\Big|\int_a^b dx\ (\operatorname{Re} f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(\operatorname{Re} f)(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)\Big| &< \frac{\epsilon}{4}\,,\\
\Big|\int_a^b dx\ (\operatorname{Im} f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(\operatorname{Im} f)(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)\Big| &< \frac{\epsilon}{4}\,,\\
\Big|\int_a^b dx\ |f(x)| - \sum_{k=0}^{n-1}|f(\xi_k)|(x_{k+1}-x_k)\Big| &< \frac{\epsilon}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Die ersten beiden Ungleichungen ergeben

$$
\Big|\int_a^b dx\ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)\Big| < \frac{\epsilon}{2}\,.
$$

Daraus folgt nach Dreiecksungleichung

$$
\begin{aligned}
\Big|\int_a^b dx\ f(x)\Big| &= \Big|\Big(\int_a^b dx\ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)\Big) + \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)\Big|\\
&\le \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=0}^{n-1}|f(\xi_k)|(x_{k+1}-x_k) < \frac{3\epsilon}{4} + \int_a^b dx\ |f(x)|\,,
\end{aligned}
$$

Widerspruch. Die Ungleichung $\int_a^b dx|f(x)| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ folgt aus $|f(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. □

Für eine integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $p \geq 1$ setzen wir

$$\|f\|_p := \Big( \int_a^b dx\, |f(x)|^p \Big)^{\frac{1}{p}} .$$

An dieser Stelle wird ein Schwachpunkt der Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen sichtbar. Entgegen der Erwartung ist $f \mapsto \|f\|_p$ *keine* Norm! Zwar gelten Skalierung (N2) und Dreiecksungleichung (N3), aber aus $\|f\|_p = 0$ folgt nicht $f = 0$. Sei z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq \frac{a+b}{2} \\ 1 & \text{für } x = \frac{a+b}{2} \end{cases} , \qquad \psi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x - \frac{a+b}{2}| > \frac{1}{n+1} \\ 1 & \text{für } |x - \frac{a+b}{2}| \leq \frac{1}{n+1} \end{cases} .$$

Dann ist $\psi_n$ Treppenfunktion mit $0 \leq |f|^p \leq \psi_n$, und wegen $\int_a^b dx\, \psi(x) \leq \frac{2}{n+1}$ ist $f$ integrierbar mit $\int_a^b dx\, |f(x)|^p = 0$, aber $f \neq 0$. Dieser Schwachpunkt wird später im Lebesgue-Integral behoben. Zumindest für *stetige Funktionen* tritt das Problem nicht auf: Sei $|f(y)| = M > 0$ für ein $y \in [a,b]$, dann gibt es wegen der Stetigkeit von $|f|$ ein $\epsilon > 0$ mit $|f(x)| \geq \frac{M}{2}$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x-y| < \epsilon$. Dann ist

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{M}{2} & \text{für } |x-y| < \epsilon \\ 0 & \text{für } |x-y| \geq \epsilon \end{cases}$$

Treppenfunktion mit $\phi \leq |f|^p$ und $\int_a^b dx\, \phi(x) \geq \frac{M}{2} \min(\epsilon, b-a) > 0$, also auch $\int_a^b dx\, |f(x)|^p > 0$.

**Satz 29.4 (Höldersche Ungleichung für Integrale)** *Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrierbare Funktionen und $p, q \geq 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt*

$$\Big| \int_a^b dx\, (fg)(x) \Big| \leq \|f\|_p\, \|g\|_q .$$

*Beweis.* Nach Satz 28.12.iii) existieren $\|f\|_p, \|g\|_q$. Wir wählen eine äquidistante Unterteilung $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ und beliebige Stützstellen $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Dann ist nach Satz 25.7 (Höldersche Ungleichung für Summen) sowie $\big(\frac{b-a}{n}\big)^{\frac{1}{p}} \big(\frac{b-a}{n}\big)^{\frac{1}{q}} = \frac{b-a}{n}$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \big| f(\xi_k) g(\xi_k) \big| \leq \Big( \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \big| f(\xi_k) \big|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big( \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \big| g(\xi_k) \big|^q \Big)^{\frac{1}{q}} .$$

Die drei Summen sind für $n \to \infty$ Riemannsche Summen zu $\int_a^b dx\ \big|(fg)(x)\big|$, $\|f\|_p$ bzw. $\|g\|_q$. □

**Satz 29.5 (Minkowskische Ungleichung für Integrale)** *Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrierbare Funktionen und $p \geq 1$. Dann gilt*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \ .$$

*Beweis.* Analog zu Satz 29.4 mit der Minkowskischen Ungleichung für Summen aus Satz 25.8. □

Folglich ist $\Big(\mathcal{C}([a,b]), \| \ \|_p\Big)$ ein normierter Vektorraum, wobei $\mathcal{C}([a,b])$ den Vektorraum der stetigen Funktionen über $[a,b]$ bezeichnet. Insbesondere wird durch

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b dx\ \overline{f(x)}\ g(x) \ , \qquad f, g \in \mathcal{C}([a,b])$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{C}([a,b])$ definiert. Es zeigt sich jedoch, daß $\Big(\mathcal{C}([a,b]), \| \ \|_p\Big)$ nicht vollständig (d.h. kein Banach-Raum) ist. Auch dieser Schwachpunkt wird durch das Lebesgue-Integral repariert.

## 30 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

**Definition 30.1** Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *Regelfunktion*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\phi \in \mathcal{T}[a,b]$ gibt mit $|f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon$ für alle $x \in [a,b]$.

Wegen $\operatorname{Re}\phi - \epsilon \leq \operatorname{Re} f \leq \operatorname{Re}\phi + \epsilon$ sowie $\int_a^b dx\ (\operatorname{Re}\phi + \epsilon)(x) - \int_a^b dx\ (\operatorname{Re}\phi - \epsilon)(x) = 2\epsilon(b-a)$ und analog für die Imaginärteile ist jede Regelfunktion integrierbar. Die Konstruktionen in den Beweisen zu Satz 28.8 und Satz 28.9 zeigen, daß jede stetige Funktion und jede monotone Funktion eine Regelfunktion ist.

**Satz 30.2** *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion. Dann existieren in jedem Punkt $x_0 \in [a,b[$ die rechtsseitigen Grenzwerte $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$, und in jedem Punkt $x_0 \in ]a,b]$ existieren die linksseitigen Grenzwerte $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$.*

*Beweis.* (für rechtsseitige Grenzwerte) Sei $\phi$ die Treppenfunktion mit $|f(x) - \phi(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ für alle $x \in [a,b]$ und $]x_0, \beta[$ das Intervall, auf dem $\phi$ konstant ist. Dann gilt für alle $x, x' \in ]x_0, \beta[$ die Abschätzung $|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - \phi(x)| + |\phi(x') - f(x')| \leq \epsilon$. Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium existiert der Limes $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$. □

Wir betrachten nun die Abhängigkeit des Integrals von einer der Integrationsgrenzen als neue Funktion, die man auch *unbestimmtes Integral* nennt.

**Satz 30.3** *Sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion und $a \in I$. Für $x \in I$ werde durch $F(x) := \int_a^x dt\, f(t)$ eine Funktion $F : I \to \mathbb{C}$ definiert. Dann gilt: Die Funktion $F : I \to \mathbb{C}$ ist stetig und in jedem Punkt $x_0 \in I$ sowohl linksseitig als auch rechtsseitig differenzierbar mit*

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{1}{h}\big(F(x_0{+}h){-}F(x_0)\big) = \lim_{x\searrow x_0} f(x)\,, \qquad \lim_{h\nearrow 0} \frac{1}{h}\big(F(x_0{+}h){-}F(x_0)\big) = \lim_{x\nearrow x_0} f(x)\,.$$

*Insbesondere ist $F$ differenzierbar in jedem Punkt $x \in I$, in dem $f$ stetig ist, mit $F'(x) = f(x)$.*

*Beweis.* Wegen $|F(x_1) - F(x_2)| \le |x_1 - x_2| \sup_{x\in[x_1,x_2]} |f(x)|$ ist $F$ auf jedem abgeschlossenen Intervall Lipschitz-stetig und damit stetig.

Sei $A := \lim_{x\searrow x_0} f(x)$. Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta > 0$, so daß $|f(x) - A| < \epsilon$ für alle $x \in ]x_0, x_0 + \delta[$. Dann gilt für einen solchen Punkt $x$

$$\Big|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - A\Big| = \Big|\frac{1}{x{-}x_0}\int_{x_0}^x dx\,(f(x) - A)\Big| \le \frac{1}{x{-}x_0}\int_{x_0}^x dx\,|f(x) - A| \le \epsilon\,.$$

Damit existiert der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x\searrow x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$ und ist gleich $A$. Analog für den linksseitigen Grenzwert. □

**Definition 30.4** Eine stetige Funktion $F : I \to \mathbb{C}$, für die eine Regelfunktion $f : I \to \mathbb{C}$ existiert mit

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{1}{h}\big(F(x_0{+}h){-}F(x_0)\big) = \lim_{x\searrow x_0} f(x)\,, \qquad \lim_{h\nearrow 0} \frac{1}{h}\big(F(x_0{+}h){-}F(x_0)\big) = \lim_{x\nearrow x_0} f(x)\,,$$

heißt *Stammfunktion* zu $f$.

Die Menge aller Stammfunktionen zu einer Regelfunktion $f : I \to \mathbb{C}$ heißt das *unbestimmte Integral* zu $f$, geschrieben $\int dx\, f(x)$.

Nicht jede differenzierbare Funktion ist eine Stammfunktion. Es läßt sich zeigen (Königsberger, Analysis I), daß Funktionen, die mit Ausnahme abzählbar vieler Punkte stetig differenzierbar sind, Stammfunktion sind.

**Satz 30.5** *Es sei $F : I \to \mathbb{C}$ Stammfunktion zu einer Regelfunktion $f : I \to \mathbb{C}$. Eine weitere Funktion $G : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann Stammfunktion zu $f$, wenn $F - G$ konstant ist.*

*Beweis.* ($\Rightarrow$) Nach dem Identitätssatz 24.6 für stetige und differenzierbare Funktionen ist $F - G$ konstant in jedem offenen Intervall, in dem $f$ stetig ist. Wegen der Stetigkeit von $F, G$ ist $F - G$ dann auf ganz $I$ konstant.

($\Leftarrow$) ist klar. □

**Satz 30.6 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)** *Es sei $G : I \to \mathbb{C}$ eine beliebige Stammfunktion zu einer Regelfunktion $f : I \to \mathbb{C}$. Dann gilt für beliebige $a, b \in I$*

$$\int_a^b dx\ f(x) = G(b) - G(a)\ .$$

*Beweis.* Das ist klar für die Stammfunktion $F(x) = \int_a^x dx\ f(x)$. Für jede weitere Stammfunktion $G$ gilt $G(x) = F(x) + c$ für ein $c \in \mathbb{C}$, und in der Differenz $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$ hebt sich die Konstante weg. □

Jede Ableitungsformel der Differentialrechnung liefert damit ein unbestimmtes Integral. Die Grundintegrale sind

$$\int dx\ x^s = \frac{x^{s+1}}{s+1} + c\ , \qquad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \text{ für } s \in \mathbb{N}\ , \quad x \in \mathbb{R}^\times \text{ für } s \in \mathbb{Z}\ ,\ s \le -2\ , \\ x \in \mathbb{R}_+^\times \text{ für } s \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \end{array}$$

$$\int dx\ \frac{1}{x} = \ln|x| + c\ , \qquad x \neq 0$$

$$\int dx\ e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} + c\ , \qquad a \in \mathbb{C}$$

$$\int dx\ \sin x = -\cos x + c\ ,$$

$$\int dx\ \cos x = \sin x + c\ ,$$

$$\int dx\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c\ , \qquad |x| < 1$$

$$\int dx\ \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + c\ ,$$

$$\int dx\ \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + c\ , \qquad x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

$$\int dx\ \frac{1}{\sin^2 x} = -\cot x + c\ , \qquad x \notin \pi\mathbb{Z}$$

Über den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefern diese unbestimmten Integrale ein Riemannsches Integral, falls das Intervall $[a, b]$ im Definitionsbereich der Stammfunktion liegt. So erhalten wir z.B.

$$\int_a^b dx\ x^n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}\ ,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ \cos x = \sin(\tfrac{\pi}{2}) - \sin(0) = 1\ ,$$

$$\int_0^a dx\ e^x = e^a - 1\ .$$

Ist $F$ die Stammfunktion zu $f$, dann ist für das Riemannsche Integral die folgende Schreibweise üblich:

$$\int_a^b dx\ f(x) = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a)\ ,$$

also z.B. $\displaystyle\int_0^1 dx\ \frac{1}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

# 31 Integrationsmethoden

## 31.1 Partielle Integration

Aus der Produktregel für das Differential gewinnt man die folgende Rechenregel:

**Satz 31.1 (partielle Integration)** *Es seien $u, v : I \to \mathbb{C}$ Stammfunktionen zu Regelfunktionen $f = v' : I \to \mathbb{C}$ und $g = u' : I \to \mathbb{C}$ (die Ableitung ist im Sinne von Definition 30.4 zu verstehen). Dann ist auch $uv$ eine Stammfunktion, und es gilt*

$$\int dx\ (uv')(x) = (uv)(x) - \int dx\ (u'v)(x)\ ,$$
$$\int_a^b dx\ (uv')(x) = uv\Big|_a^b - \int_a^b dx\ (u'v)(x)\ .$$

*Beweis.* Folgt (mit einseitigen Grenzwerten) aus der Rechnung zur Produktregel in Satz 23.6. □

**Beispiel 31.2** Es gilt $\displaystyle\int dx\ \ln x = x \ln x - x$.
Dazu wähle $u(x) = \ln x$ und $v(x) = x$, so folgt mit $v'(x) = 1$:

$$\int dx\ \ln x \cdot 1 = x \ln x - \int dx\ x \cdot \frac{1}{x} = x \ln x - x \qquad \triangleleft$$

**Beispiel 31.3** $I_n(x) := \displaystyle\int dx\ \sin^n x$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Wir setzen $u = \sin^{n-1} x$, $v = -\cos x$, dann folgt mit partieller Integration (die Konstante $c$ ist weggelassen)

$$\begin{aligned}\int dx\ \sin^n x &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int dx\ ((n-1)\cos x \sin^{n-2} x)\cos x \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int dx\ \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x)\ .\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Rekursionsformel

$$I_n(x) = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}\ ,$$

aus der mit $I_0 = x$ und $I_1 = -\cos x$ die unbestimmten Integrale berechnet werden können, z.B. $\int dx\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$. Interessant sind die Riemannschen Integrale ($k \in \mathbb{N}^\times$)

$$A_{2k} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ \sin^{2k} x = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{2k(2k-2)\cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2}\ ,$$
$$A_{2k+1} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ \sin^{2k+1} x = \frac{2k(2k-2)\cdots 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3}\ .$$

Wegen $0 \le \sin^{2k+2} x \le \sin^{2k+1} x \le \sin^{2k} x \le 1$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt $0 \le A_{2k+2} \le A_{2k+1} \le A_{2k} \le \frac{\pi}{2}$. Andererseits ist $\lim_{k\to\infty} \frac{A_{2k+2}}{A_{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{2k+2} = 1$, also auch $\lim_{k\to\infty} \frac{A_{2k+1}}{A_{2k}} = 1$ und daraus

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \lim_{k\to\infty} \frac{(2k)^2(2k-2)^2\cdots 2^2}{(2k+1)(2k-1)(2k-2+1)(2k-2-1)\cdots(2+1)(2-1)} \\ &= \lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{k} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}\ .\end{aligned}$$

Diese Formel heißt *Wallissches Produkt.* ◁

**Beispiel 31.4** $\int dx\ \arcsin x$. Wir setzen $u = \arcsin x$, $v = x$, dann folgt mit partieller Integration und $\sqrt{1-x^2}' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int dx\ \arcsin x = x \arcsin x - \int dx\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\ .$$

Ähnlich zeigt man $\int dx\ \arctan x = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. ◁

**Beispiel 31.5** $\int dx\ \sqrt{1-x^2}$. Wir setzen $v = x$, $u = \sqrt{1-x^2}$, dann folgt

$$\begin{aligned}\int dx\ \sqrt{1-x^2} &= x\sqrt{1-x^2} - \int dx\ x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} - \int dx\ \frac{(1-x^2)-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int dx\ \sqrt{1-x^2} + \arcsin x\end{aligned}$$

also $\int dx\ \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x$. Der Graph $(x, \sqrt{1-x^2})$ für $x \in [0,1]$ beschreibt einen Viertelkreisbogen mit Radius 1. Dementsprechend ist $\int_0^1 dx\ \sqrt{1-x^2} = \left(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ die Fläche der Viertelkreisscheibe, d.h. die Kreisscheibe vom Radius 1 hat die Fläche $\pi$. ◁

**Satz 31.6 (Trapezregel)** *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $a, b \in I$. Dann ist*

$$\int_a^b dx\ f(x) = \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)) - R\ ,$$
$$R = \frac{1}{2}\int_a^b dx\ (x-a)(b-x)f''(x) = \frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi) \quad \textit{für ein } \xi \in [a,b]\ .$$

*Beweis.* Setze $g = \frac{1}{2}(x-a)(b-x)$ mit $g'(x) = \frac{1}{2}(b+a-2x)$ und $g''(x) = -1$. Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} R &= \int_a^b dx\ (gf'')(x) = (gf')(x)\Big|_a^b - \int_a^b dx\ (g'f')(x) \\ &= -(g'f)(x)\Big|_a^b + \int_a^b dx\ (g''f)(x) = \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)) - \int_a^b dx\ f(x)\ . \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_a^b dx\ (x-a)(b-x)f''(x) &= \frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b dx\ (x-a)(b-x) \\ &= \frac{1}{2}f''(\xi)\Big(\frac{x^2}{2}(a+b) - \frac{x^3}{3} - abx\Big)\Big|_a^b = \frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)\ . \end{aligned}$$

□

Approximiert man eine viermal stetig differenzierbare Funktion $f$ durch eine Parabel mit gleichen Funktionswerten in $a, b, \frac{a+b}{2}$, so entsteht die *Keplersche Faßregel*

$$\int_a^b dx\ f(x) = \frac{b-a}{6}(f(b)+f(a)+4f(\tfrac{a+b}{2})) - R\ , \qquad R = \frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi)$$

für ein $\xi \in [a,b]$. Sie liefert für Graphen kubischer Polynome eine exakte Formel (d.h. $R = 0$) zur Flächenberechnung.

Über die partielle Integration gewinnen wir eine Formel für das Restglied der Taylorschen Formel.

**Satz 31.7** *Es sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann gilt für alle $x \in I$*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)\ .$$
$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x dt\ (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\ .$$

*Beweis.* Durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$. Die Formel gilt für $n = 0$ auf Grund des Hauptsatzes des Differential- und Integralrechnung. Angenommen sie gilt bis einschließlich $n - 1 \geq 0$, dann ergibt partielle Integration des Restgliedes

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x dt\ (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) = -\frac{1}{n!}\int_a^x dt\ \Big(\frac{d}{dt}(x-t)^n\Big) f^{(n)}(t) \\ &= -\frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n)}(t)\Big|_a^x + \frac{1}{n!}\int_a^x dt\ (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \\ &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)\ . \end{aligned}$$ □

Die bisherige Form des Restgliedes ergibt sich nun aus dem Mittelwertsatz: Es gibt ein $\xi \in ]a, x[$ bzw. $\xi \in ]x, a[$ mit

$$R_{n+1}(x) = f^{n+1}(\xi)\frac{1}{n!}\int_a^x dt\ (x-t)^n = f^{n+1}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\ .$$

### 31.2 Substitutionsregel

Aus der Kettenregel für die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion gewinnen wir die sehr wichtige Substitutionsregel:

**Satz 31.8** *Es sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion, $F : I \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion zu $f$ und $t : [a, b] \to I$ eine stetig differenzierbare und streng monotone Funktion. Dann ist $F \circ t : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion zu $(f \circ t) \cdot t' : [a, b] \to \mathbb{C}$, und es gilt*

$$\int_a^b dx\ f(t(x)) \cdot t'(x) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt\ f(t)\ .$$

*Beweis.* Wir wiederholen den Beweis der Kettenregel in Satz 23.8 für rechtsseitige Grenzwerte und $t$ streng monoton wachsend. Für $x_0 \in [a, b[$ sei $y_0 := t(x_0) \in I$ und $A := \lim_{y \searrow y_0} f(y)$. Setze $\phi(y) := \begin{cases} \frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0} & \text{für } y > y_0 \\ A & \text{für } y = y_0 \end{cases}$ Nach Voraussetzung gilt $\lim_{y \searrow y_0} \phi(y) = \phi(y_0) = A$ und $F(y) - F(y_0) = (y - y_0)\phi(y)$ für alle $y \in I$ mit $y \geq y_0$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow x_0} \frac{F(t(x)) - F(t(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \searrow x_0} \frac{\phi(t(x)) \cdot (t(x) - t(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \searrow x_0} \phi(t(x)) \cdot \lim_{x \searrow x_0} \frac{t(x) - t(x_0)}{x - x_0} \\ &= \phi(t(x_0)) \cdot t'(x_0) = A \cdot t'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(t(x)) \cdot t'(x)\ . \end{aligned}$$

Analog für linksseitige Grenzwerte und/oder $t$ streng monoton fallend. Also ist $(F \circ t)(x)$ Stammfunktion zu $((f \circ t) \cdot t')(x)$. Nach dem Hauptsatz der Differential-

und Integralrechnung gilt

$$\int_a^b dt\ f(t(x)) \cdot t'(x) = (F \circ t)(x)\Big|_a^b = F(t(b)) - F(t(a)) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt\ f(t)\ . \quad \square$$

**Beispiel 31.9** $\int_a^b dx\ f(\alpha x + \beta)$ mit $\alpha \neq 0$. Setze $t(x) = \alpha x + \beta$, $t'(x) = \alpha$, dann ist

$$\int_a^b dx\ f(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\alpha} \int_a^b f(t(x)) \cdot t'(x) = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} dt\ f(t)\ . \quad \triangleleft$$

**Beispiel 31.10** Oft gelingt es, Integrale in der Form $\int dx\ \frac{t'(x)}{t(x)}$ zu identifizieren für eine stetig differenzierbare Funktion $t : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $t(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Setzt man $f(t) = \frac{1}{t}$, so ist

$$\int_a^b dx\ \frac{t'(x)}{t(x)} = \int_a^b dx\ f(t(x))t'(x) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt\ f(t) = \ln|t|\Big|_{t(a)}^{t(b)} = \ln\left|\frac{t(b)}{t(a)}\right| .$$

Z.B. erhalten wir für $[a, b] \subseteq \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\int_a^b dx\ \tan x = -\int_a^b dx\ \frac{\cos'(x)}{\cos x} = -\ln\left|\frac{\cos b}{\cos a}\right| .$$

Das entsprechende unbestimmte Integral ist $\int dx\ \tan x = -\ln|\cos x| + c$. Analog ist $\int dx\ \cot x = \ln|\sin x| + c$. $\triangleleft$

**Beispiel 31.11** $\int_a^b dx\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Setze $x = \sinh t$, also $t(x) = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. (Siehe den letzten Teil von 21.3.) Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(t(x))} = \frac{1}{\cosh t(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 t(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} .$$

Also ist $f(t) = 1$ und

$$\int_a^b dx\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \int_{\operatorname{arsinh}(a)}^{\operatorname{arsinh}(b)} dt\ 1 = \operatorname{arsinh}(b) - \operatorname{arsinh}(a) = \ln\frac{b + \sqrt{b^2+1}}{a + \sqrt{a^2+1}} .$$

Das entsprechende unbestimmte Integral ist $\int dx\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$. Analog zeigt man $\int dx\ \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c$ für $|x| \geq 1$. $\triangleleft$

**Beispiel 31.12**

$$\int_a^b dx\ \frac{1}{Ax^2+2Bx+C} = \frac{1}{A}\int_a^b dx\ \frac{1}{(x+\frac{B}{A})^2+\frac{CA-B^2}{A^2}}$$

wird je nach Vorzeichen von $CA-B^2$ gelöst. Für $CA-B^2=0$ substituieren wir $t(x)=x+\frac{B}{A}$ mit $t'(x)=1$, also

$$\int_a^b dx\ \frac{1}{Ax^2+2Bx+C} = \frac{1}{A}\int_a^b dx\ \frac{t'(x)}{(t(x))^2} = \frac{1}{A}\int_{a+\frac{B}{A}}^{b+\frac{B}{A}} dt\ \frac{1}{t^2} = \frac{1}{A}\Big(-\frac{1}{t}\Big|_{a+\frac{B}{A}}^{b+\frac{B}{A}}\Big)$$
$$= \Big(\frac{1}{aA+B}-\frac{1}{bA+B}\Big)\,.$$

Für $CA-B^2>0$ lautet die Substitution $x+\frac{B}{A}=\frac{\sqrt{CA-B^2}}{A}\tan t$, also

$$\frac{dx}{dt} =: \dot{x} = \frac{\sqrt{CA-B^2}}{A}(1+\tan^2 t) = \frac{A}{\sqrt{CA-B^2}}\cdot\Big(\Big(x+\frac{B}{A}\Big)^2+\frac{CA-B^2}{A^2}\Big)\,.$$

Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt $t'(x)=\frac{1}{\dot{x}(t(x))}$, somit folgt für $f(t(x))=\frac{A}{\sqrt{CA-B^2}}$:

$$\int_a^b dx\ \frac{1}{Ax^2+2Bx+C} = \frac{1}{A}\int_a^b dx\ \frac{f(t(x))}{\dot{x}(t(x))} = \int_{t(a)}^{t(b)} dt\ \frac{1}{\sqrt{CA-B^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{CA-B^2}}\Big(\arctan\Big(\frac{Ab+B}{\sqrt{CA-B^2}}\Big)-\arctan\Big(\frac{Aa+B}{\sqrt{CA-B^2}}\Big)\Big)\,.$$

Der Fall $CA-B^2<0$ wird über eine Partialbruchzerlegung gelöst und im Abschnitt 31.3 behandelt. ◁

## 31.3 Rationale Funktionen und Partialbruchzerlegung

Durch Partialbruchzerlegung (Satz 13.10) lassen sich rationale Funktionen darstellen als Summe von Polynomen und Funktionen der Form $\frac{b}{(x-a)^k}$ mit $a,b\in\mathbb{C}$ und $k\in\mathbb{N}^\times$. Handelt es sich um eine reelle rationale Funktion, so treten die zueinander komplex-konjugierten Funktionen $\frac{b}{(x-a)^k}$ und $\frac{\bar{b}}{(x-\bar{a})^k}$ in der Summe gemeinsam auf. Für $k\geq 2$ wird für reelle und komplexe Nullstellen gleichermaßen $\int dx\ \frac{b}{(x-a)^k} = \frac{b}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+c$ erhalten. Für $k=1$ und eine reelle Nullstelle $a\in\mathbb{R}$ hat man $\int dx\ \frac{b}{(x-a)} = b\ln|x-a|+c$. Ist $k=1$ und $a\notin\mathbb{R}$, so muß man, wenn man komplexe Logarithmen vermeiden möchte, die beiden komplex-konjugierten Funktionen wieder zusammenfassen zu

$$\frac{b}{(x-a)}+\frac{\bar{b}}{(x-\bar{a})} = \frac{2x\mathrm{Re}(b)-2\mathrm{Re}(\bar{b}a)}{(x-\mathrm{Re}(a))^2+(\mathrm{Im}(a))^2} =: \frac{Bx+C}{(x+p)^2+q^2}\,,$$

mit $B, C, p, q \in \mathbb{R}$ und $q > 0$. Man schreibt $Bx + C = \frac{B}{2}(2x + 2p) + (C - Bp)$, so daß ein Term $\frac{B}{2}\frac{f'(x)}{f(x)}$ mit $f(x) = (x+p)^2 + q^2$ entsteht, der die Stammfunktion $\frac{B}{2}\ln|f(x)|$ hat. Der verbleibende Teil wird nach Substitution $t = \frac{x+p}{q}$ zum arctan aus Beispiel 31.12:

$$\int dx\ \frac{Bx + C}{(x+p)^2 + q^2} = \frac{B}{2}\ln((x+p)^2 + q^2) + \frac{C - Bp}{q}\arctan\frac{x+p}{q}\ .$$

In vielen anderen Fällen gibt es Substitutionen $t(x)$, die auf rationale Funktionen in $t$ führen:

**Beispiel 31.13** Es sei $\int dx\ R(\cos x, \sin x)$ für eine rationale Funktion $R$ von $\sin x$ und $\cos x$. Setzt man

$$t = \tan\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\ ,\ \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}\ ,\ t'(x) = \frac{1}{2}(1 + t^2)\ ,$$

so entsteht

$$\int_a^b dx\ R(\cos x, \sin x) = \int_{\tan\frac{a}{2}}^{\tan\frac{b}{2}} dt\ R\big(\tfrac{1-t^2}{1+t^2}, \tfrac{2t}{1+t^2}\big)\tfrac{2}{1+t^2}\ .$$

Eine solche rationale Funktion kann dann mittels Partialbruchzerlegung integriert werden. ◁

**Beispiel 31.14**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ \frac{1}{2 + \cos x} = \int_0^1 dt\ \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} = \int_0^1 dt\ \frac{2}{3 + t^2}$$
$$\overset{t=\sqrt{3}u}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} du\ \frac{1}{1+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$ ◁

**Beispiel 31.15** $\int dx\ R(e^{px})$ für $p \in \mathbb{R}^\times$ und eine rationale Funktion $R$. Die Transformation $t = e^{px}$ führt auf

$$\int_a^b dx\ R(e^{px}) = \frac{1}{p}\int_{e^{pa}}^{e^{pb}} dt\ R(t)\frac{1}{t}\ .$$

Insbesondere lassen sich auf diese Weise rationale Funktionen von $\sinh x$ und $\cosh x$ integrieren. ◁

**Beispiel 31.16** $\int dx\ R(x, \sqrt[n]{px+q})$ für $n \in \mathbb{N}^\times$ und $p \in \mathbb{R}^\times$, $q \in \mathbb{R}$. Die Transformation $t = \sqrt[n]{px+q}$ führt auf eine rationale Funktion:

$$\int_a^b dx\ R(x, \sqrt[n]{px+q}) = \frac{n}{p}\int_{\sqrt[n]{pa+q}}^{\sqrt[n]{pb+q}} dt\ R\big(\tfrac{t^n - q}{p}, t\big)t^{n-1}\ .$$ ◁

**Beispiel 31.17** $\int dx\ R(x, \sqrt{px^2+qx+r})$ für $p \in \mathbb{R}^\times$ und $q, r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq \frac{q^2}{4p}$. Durch quadratische Ergänzung $px^2+qx+r = p(x+\frac{q}{2p})^2 + r - \frac{q^2}{4p}$ und linearer Substitution $t = \sqrt{\left|\frac{4p^2}{4pr-q^2}\right|}(x+\frac{q}{2p})^2$ entsteht je nach Vorzeichen von $p$ und $4pr-q^2$ eines der Integrale

$$\int dt\ R'(t, \sqrt{t^2+1})\ , \quad \int dt\ R'(t, \sqrt{t^2-1})\ , \quad \int dt\ R'(t, \sqrt{1-t^2})\ ,$$

welches durch $t = \sinh y$, $t = \cosh y$ bzw. $t = \sin y$ auf eine rationale Funktion von $e^y$ (in den ersten beiden Fällen) bzw. (im dritten Fall) nach nochmaliger Substitution $\tan \frac{y}{2} = u$ auf eine rationale Funktion von $u$ zurückgeführt wird. ◁

# 32 Uneigentliche Integrale

Wir haben bisher nur Funktionen über kompakten (beschränkt und abgeschlossen) Intervallen intgriert. Wünschenswert wäre aber auch die Integration über offene Intervalle sowie über unbeschränkte Intervalle. Solche "uneigentlichen Integrale" können über einen Grenzprozeß Riemannscher Integrale erhalten werden.

**Definition 32.1** Eine Funktion $f : [a, \infty[ \to \mathbb{C}$ sei über jedes kompakte Intervall $[a, R]$ mit $R > a$ integrierbar. Existiert der Limes $\lim\limits_{R\to\infty} \int_a^R dx\ f(x)$, dann heißt das Integral $\int_a^\infty dx\ f(x)$ *konvergent*, und man setzt $\int_a^\infty dx\ f(x) := \lim\limits_{R\to\infty} \int_a^R dx\ f(x)$.

Analog wird für $f : ]-\infty, b] \to \mathbb{C}$ im Fall der Konvergenz das Integral $\int_{-\infty}^b dx\ f(x)$ definiert.

**Beispiel 32.2** Das Integral $\int_1^\infty dx\ \frac{1}{x^s}$ konvergiert für $s > 1$. Es gilt

$$\int_1^R dx\ \frac{1}{x^s} = \begin{cases} \frac{R^{1-s}-1}{1-s} & \text{für } s \neq 1 \\ \ln R & \text{für } s = 1 \end{cases}$$

Der Grenzwert für $R \to \infty$ existiert genau für $s > 1$, und es gilt $\int_1^\infty dx\ \frac{1}{x^s} = \frac{1}{s-1}$ für alle $s > 1$. ◁

**Definition 32.3** Es sei $f : [a, b[ \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die über jedes Teilintervall $[a, b-\epsilon]$ mit $0 < \epsilon < b-a$ integrierbar ist. Existiert der einseitige Grenzwert $\lim\limits_{\epsilon\searrow 0} \int_a^{b-\epsilon} dx\ f(x)$, so heißt das Integral $\int_a^b dx\ f(x)$ *konvergent*, und man setzt $\int_a^b dx\ f(x) := \lim\limits_{\epsilon\searrow 0} \int_a^{b-\epsilon} dx\ f(x)$.

Analog wird für $f : ]a,b] \to \mathbb{C}$ im Fall der Konvergenz das Integral $\int_a^b dx\ f(x)$ definiert.

**Beispiel 32.4** $\int_0^1 dx\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist auf $[0,1[$ definiert, und auf dem kompakten Teilintervall $[0, 1-\epsilon]$ gilt

$$\int_0^{1-\epsilon} dx\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{1-\epsilon} = \arcsin(1-\epsilon)\ .$$

Der arcsin ist stetig auf $[-1,1]$, so daß gilt $\lim_{\epsilon \searrow 0} \arcsin(1-\epsilon) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ und damit $\int_0^1 dx\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$. ◁

**Beispiel 32.5** $\int_0^b dx\ \ln x$. Die Funktion $f(x) = \ln x$ ist auf $]0,b]$ definiert, und auf dem kompakten Teilintervall $[\epsilon, b]$ gilt

$$\int_\epsilon^b dx\ \ln x = \big(x \ln x - x\big)\Big|_\epsilon^b = b \ln b - b - (\epsilon \ln \epsilon - \epsilon)$$

Damit existiert der Limes $\epsilon \to 0$, und es gilt $\int_0^b dx\ \ln x = b \ln b - b$. ◁

**Definition 32.6** Es sei $f : ]a,b[ \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $-\infty \le a < b \le \infty$, die über jedes kompakte Teilintervall $[\alpha, \beta] \subseteq ]a,b[$ integrierbar ist, und $c \in ]a,b[$. Existieren die uneigentlichen Integrale

$$\int_c^b dx\ f(x) = \lim_{\beta \nearrow b} \int_c^\beta dx\ f(x) \quad \text{und} \quad \int_a^c dx\ f(x) = \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^c dx\ f(x)\ ,$$

so heißt das Integral $\int_a^b dx\ \ f(x)$ *konvergent*, und man setzt $\int_a^b dx\ \ f(x) := \int_a^c dx\ f(x) + \int_c^b dx\ f(x)$. (Die Definition ist unabhängig von der Wahl von $c \in ]a,b[$.)

**Beispiel 32.7** $\int_{-\infty}^\infty dx\ \frac{1}{1+x^2}$. Zu betrachten sind die Integrale $\int_0^R dx\ \frac{1}{1+x^2} = \arctan(R)$ und $\int_{-R'}^0 dx\ \frac{1}{1+x^2} = -\arctan(-R') = \arctan R'$. Der Grenzwert $\lim_{R\to\infty} \arctan(R) = \frac{\pi}{2}$ existiert, somit gilt $\int_{-\infty}^\infty dx\ \frac{1}{1+x^2} = \pi$.

**Satz 32.8 (Majorantenkriterium)** *Es seien $f : [a, b[ \to \mathbb{C}$ und $g : [a, b[ \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen mit $|f| \leq g$. Existiert das Integral $\int_a^b dx\, g(x)$, dann existiert auch $\int_a^b dx\; f(x)$.*

*Beweis.* Seien $F, G$ die Stammfunktionen zu $f, g$ für kompakte Teilintervalle in $[a, b[$, d.h.

$$\int_a^u dx\; f(x) = F(u) - F(a)\;, \qquad \int_a^u dx\; g(x) = G(u) - G(a)\;, \qquad a < u < b\;.$$

Aus der Existenz von $\int_a^b dx\, g(x)$ folgt, daß es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\beta \in ]a, b[$ gibt, so daß für alle $u, v \in ]\beta, b[$ gilt $|G(u) - G(v)| \leq \epsilon$. Für diese $u > v$ gilt dann

$$|F(u) - F(v)| = \Big| \int_v^u dx\; f(x) \Big| \leq \int_v^u dx\; |f(x)| \leq \int_v^u dx\; g(x) = G(u) - G(v) \leq \epsilon\;.$$

($G$ ist monoton wachsend wegen $g \geq 0$). Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium existiert der Limes $\lim_{u \nearrow b} F(u)$ und damit das Integral $\int_a^b dx\; f(x)$. □

**Beispiel 32.9** *Das Integral $\int_0^\infty dx\; \dfrac{\sin x}{x}$ ist konvergent.*

*Beweis.* Die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ und damit über jedes kompakte Teilinvervall von $\mathbb{R}$ integrierbar. Damit ist nur die obere Integrationsgrenze kritisch, und es genügt, das Integral über $[1, \infty[$ zu betrachten. Partielle Integration liefert

$$\int_1^R dx\; \frac{\sin x}{x} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^R - \int_1^R dx\; \frac{\cos x}{x^2} = \cos 1 - \frac{\cos R}{R} - \int_1^R dx\; \frac{\cos x}{x^2}\;.$$

Es gilt $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ für alle $x \in [1, \infty[$ und $\int_1^R dx \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{R}$. Damit ist das Integral $\int_0^\infty dx\; \dfrac{\sin x}{x}$ konvergent. Der Grenzwert kann später mit Fourier-Reihen berechnet werden; es gilt $\int_0^\infty dx\; \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

Das Integral ist aber *nicht absolut konvergent*. Zerlegung in Intervalle der

Länge $\pi$ ergibt

$$\int_0^{n\pi} dx \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} dx \left|\frac{\sin x}{x}\right|$$
$$\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} dx \, |\sin x| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} dx \, \sin x = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \, .$$

Die harmonischen Reihe divergiert, d.h. der Limes $n \to \infty$ existiert nicht. ◁

**Satz 32.10 (Integralvergleichskriterium für Reihen)** *Es sei $f : [1, \infty[ \to \mathbb{R}_+$ eine monoton fallende Funktion. Dann konvergiert die Folge der Differenzen*

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} dx \, f(x) \, ,$$

*und für ihren Grenzwert gilt $0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq f(1)$. Insbesondere konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ genau dann, wenn das Integral $\int_1^{\infty} dx \, f(x)$ konvergiert, und in diesem Fall gilt*

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^{\infty} dx \, f(x) \leq f(1) \, .$$

*Beweis.* Es gilt $f(k) \geq \int_k^{k+1} dx \, f(x) \geq f(k+1)$, da $f$ monoton fallend. Damit wächst $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton, andererseits gilt

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} dx \, f(x) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k+1) = f(1) - f(n+1) \leq f(1) \, .$$

Somit ist $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent mit Grenzwert zwischen 0 und $f(1)$. □

**Beispiel 32.11** Es existiert der Grenzwert $\gamma := \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$ mit $0 \leq \gamma \leq 1$. Zum Beweis verwende man den Satz 32.10 für $f(x) = \frac{1}{x}$ und $\lim_{n\to\infty}(\ln(n+1) - \ln(n)) = 0$. Der Grenzwert heißt *Eulersche Konstante* oder auch Euler-Mascheroni-Konstante. Mit Methoden analog zur Trapezregel kann man $\gamma = 0.5772\ldots$ berechnen. ◁

## 33 Gleichmäßig konvergente Funktionsfolgen

Wenn die bisher vorgestellten Integrationsmethoden nicht zum Ziel führen, so kann man versuchen, die zu integrierende Funktion zu approximieren durch Funktionen, deren Integral bekannt ist. Das kann z.B. eine Taylorreihe sein. Es stellt

sich dann die Frage, ob Approximation und Integral kommutieren. Die zentrale Aussage ist, daß Grenzwert und Integration für *gleichmäßig konvergente* Funktionsfolgen vertauschen. Punktweise Konvergenz genügt nicht. Wir formulieren gleichmäßge Konvergenz zunächst für allgemeine Definitionsbereiche $D \subseteq X$ eines metrischen Raumes $X$.

**Definition 33.1** Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ heißt *gleichmäßig konvergent* gegen die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ für alle $x \in D$ und alle $n \geq N$.

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von Funktionen $f_k : D \to \mathbb{C}$ heißt *gleichmäßig konvergent* auf $D$, wenn die Folge der Partialsummen $F_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$ gleichmäßig konvergiert.

Gleichmäßige Konvergenz kann mit dem Cauchy-Kriterium überprüft werden:

**Satz 33.2 (Cauchy-Kriterium)** *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ ist genau dann gleichmäßig konvergent auf $D$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ für alle $m, n \geq N$ und alle $x \in D$.*

*Beweis.* ($\Rightarrow$) durch Dreiecksungleichung für $f_n - f_m = (f_n - f) + (f - f_m)$, wenn $f$ die Grenzfunktion ist.

($\Leftarrow$) Grenzfunktion $f$ existiert punktweise nach Cauchy-Kriterium: Da $\mathbb{C}$ vollständig ist, folgt aus $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, daß $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert in $\mathbb{C}$ hat, den wir $f(x)$ nennen. Für $m \to \infty$ ergibt sich $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$. □

Entsprechend gilt für Reihen, daß $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ genau dann gleichmäßig konvergent ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| \leq \epsilon$ für alle $m, n \geq N$ und alle $x \in D$. Insbesondere ist jede Potenzreihe gleichmäßig konvergent im Inneren ihres Konvergenzkreises.

**Satz 33.3** *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen konvergiere gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{C}$. Dann ist $f$ stetig.*

*Beweis.* Wir zeigen, daß $f$ in jedem Punkt $\tilde{x} \in D$ stetig ist. Zu $\epsilon > 0$ gibt es wegen der gleichmäßigen Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$. Da $f_n$ in $\tilde{x}$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f_n(x) - f_n(\tilde{x})| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $x \in D$ mit $|x - \tilde{x}| < \delta$. Dann folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(\tilde{x})| + |f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| < \epsilon$$

für alle $x \in D$ mit $|x - \tilde{x}| < \delta$. □

**Satz 33.4** *Es sei $X$ ein metrischer Raum und*

$$\mathcal{C}_b(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ stetig}\,, \quad \|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty\}$$

*der Vektorraum der stetigen und beschränkten komplexwertigen Funktionen auf $X$. Dann ist $(\mathcal{C}_b(X), \| \|_\infty)$ vollständig (d.h. Banach-Raum) bezüglich der* Supremums-Norm $\| \|$. *Insbesondere ist $(\mathcal{C}(X), \| \|)$ Banach-Raum, falls $X$ kompakt ist.*

*Beweis.* Nach Folgerung 18.15 aus dem letzten Semester ist $(\mathcal{C}_b(X), \| \|_\infty$ ein normierter Vektorraum. Zu zeigen ist, daß jede Cauchy-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{C}_b(X)$ konvergent ist gegen eine Grenzfunktion aus $\mathcal{C}_b(X)$. Sei $\|f_n - f_m\| < \epsilon$ für alle $m, n \geq N$. Dann ist $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ für alle $x \in X$, d.h. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig konvergent gegen eine Grenzfunktion $f : X \to \mathbb{C}$ nach Satz 33.2. Nach Satz 33.3 ist $f$ stetig, wegen $\|f\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n\| < \epsilon + \|f_n\|$ ist $f$ beschränkt. Ist $X$ kompakt, so ist jede stetige Funktion beschränkt nach dem Extremwertsatz. □

Der Beweis von Satz 33.4 zeigt, daß wir den Bildraum durch einen beliebigen Banach-Raum ersetzen dürfen:

**Satz 33.5** *Es sei $X$ ein metrischer Raum, $(Y, \| \|_Y)$ ein Banach-Raum und*

$$\mathcal{C}_b(X, Y) := \{f : X \to Y \text{ stetig}\,, \quad \|f\| := \sup_{x\in X} \|f(x)\|_Y < \infty\}$$

*der Vektorraum der stetigen und beschränkten Abbildungen von $X$ nach $Y$. Dann ist $(\mathcal{C}_b(X, Y), \| \|)$ vollständig (d.h. Banach-Raum) bezüglich der* Supremums-Norm $\| \|$. *Insbesondere ist $(\mathcal{C}(X, Y), \| \|)$ Banach-Raum, falls $X$ kompakt ist.*

*Beweis.* Die Vollständigkeit von $Y$ garantiert die Rekonstruktion der Grenzfunktion $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in Y$ in jedem Punkt $x \in X$. Ansonsten wie für $Y = \mathbb{C}$. □

Wir geben nun ein weiteres nützliches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz von Funktionsreihen.

**Satz 33.6 (Dirichlet-Kriterium)** *Es seien $f_n : D \to \mathbb{R}$ und $a_n : D \to \mathbb{C}$ Funktionen, für die gilt*

i) *Für jedes $x \in D$ ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.*

ii) *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $D$ gegen 0.*

iii) *Es gibt eine Schranke $M \in \mathbb{R}_+$, so daß $\left|\sum_{k=0}^n a_k(x)\right| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in D$.*

*Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n$ *gleichmäßig auf* $D$*. Insbesondere ist unter den Voraussetzungen i) und ii) die alternierende Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_n$ *gleichmäßig konvergent auf* $D$*.*

*Beweis.* Man benutzt den Trick der Abelschen Summation. Mit $A_k := \sum_{j=0}^{k} a_k$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k f_k &= A_0 f_0 + (A_1 - A_0) f_1 + \cdots + (A_n - A_{n-1}) f_n \\ &= A_0(f_0 - f_1) + A_1(f_1 - f_2) + \cdots + A_{n-1}(f_{n-1} - f_n) + A_n f_n \ .\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k f_k = \sum_{k=0}^{m} a_k f_k - \sum_{k=0}^{n} a_k f_k = \sum_{k=n}^{m-1} A_k(f_k - f_{k+1}) + A_m f_m - A_n f_n \ .$$

Die Voraussetzungen liefern $|A_k(x)| \leq M$ für alle $x \in D$ und alle $k \in \mathbb{N}$, außerdem $f_k - f_{k+1} \geq 0$ und $f_k \geq 0$ auf $D$. Damit gilt

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{m} (a_k f_k)(x) \Big| \leq M \sum_{k=n}^{m-1} (f_k - f_{k+1})(x) + M f_m(x) + M f_n(x) = 2M f_n(x) \ .$$

Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert, gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $0 \leq f_m(x) \leq \frac{\epsilon}{2M}$ für alle $x \in D$. Aus dem Cauchy-Kriterium folgt die Behauptung. □

**Beispiel 33.7** *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}kx}}{k}$ *konvergiert gleichmäßig auf jedem Intervall* $[\delta, 2\pi - \delta]$ *mit* $0 < \delta < \pi$*.*

*Beweis.* Setze $a_k = e^{\mathrm{i}kx}$, $f_k := \frac{1}{k}$, dann ist das Dirichlet-Kriterium erfüllt wegen

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} e^{\mathrm{i}kx} \Big| = \Big| \frac{1 - e^{\mathrm{i}nx}}{1 - e^{\mathrm{i}x}} \Big| \leq \Big| \frac{2}{e^{\frac{\mathrm{i}x}{2}} - e^{-\frac{\mathrm{i}x}{2}}} \Big| = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} \ .$$

Insbesondere sind $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k}$ gleichmäßig konvergent auf jedem kompakten Teilinterall von $]0, 2\pi[$. □

Für spätere Zwecke berechnen wir konkret:

**Beispiel 33.8** *Es gilt* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$ *für alle* $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ *mit* $0 < \delta < \pi$.

*Beweis.* Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} e^{\mathrm{i}kt} = e^{\mathrm{i}t}\frac{1 - e^{\mathrm{i}nt}}{1 - e^{\mathrm{i}t}} = \frac{e^{\mathrm{i}\frac{(2n+1)t}{2}} - e^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}}{2\mathrm{i}\sin\frac{t}{2}}$$
$$= \Big(\frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\Big) + \mathrm{i}\Big(\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2} - \frac{\cos\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\Big)\,,$$

also $\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$ und $\sum_{k=1}^{n}\sin(kx) = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$. Wegen $\frac{\sin(kx)}{k} = \int_{\pi}^{x} dt\ \cos(kt)$ gilt für endliche Summen nach partieller Integration

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k} = \int_{\pi}^{x} dt\ \sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \int_{\pi}^{x} dt\ \Big(\frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\Big)$$
$$= \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2n+1}\frac{\cos\frac{(2n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\Big|_{\pi}^{x} + \int_{\pi}^{x} dt\ \frac{\cos\frac{(2n+1)t}{2}}{2n+1}\cdot\frac{(-\cos\frac{t}{2})}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,.$$

Punktweise für festes $x \in ]0, 2\pi[$ erhalten wir im Limes $n \to \infty$ die behauptete Grenzfunktion. □

Für $x = 0$ und $x = 2\pi$ ist offenbar $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k} = 0$. Somit gilt unter Beachtung der Periodizität des Sinus

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k} = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{(2n+1)\pi - x}{2} & \text{für } x \in ]2\pi n, 2\pi(n+1)[ \end{cases}$$

d.h. die Grenzfunktion ist nicht stetig.

## 34 Vertauschungssätze

**Satz 34.1** *Es sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge integrierbarer Funktionen* $f_n : [a, b] \to \mathbb{C}$, *die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *konvergiert. Dann ist auch* $f$ *integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b dx\ f(x) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b dx\ f_n(x)\,.$$

*Beweis.* Es genügt, reellwertige Funktionen zu betrachten. Nach Definition der gleichmäßigen Konvergenz gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|f(x) - f_n(x)| <$

$\frac{\epsilon}{3(b-a)}$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in [a,b]$. Aus der Integrierbarkeit von $f_n$ folgt, daß es Treppenfunktionen $\phi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ gibt mit $\phi \leq f_n \leq \psi$ und $\int_a^b dx\ (\psi - \phi)(x) \leq \frac{\epsilon}{3}$. Dann gilt auch $\phi - \frac{\epsilon}{3(b-a)} \leq f \leq \psi + \frac{\epsilon}{3(b-a)}$ sowie

$$\int_a^b dx\ \Big(\psi + \frac{\epsilon}{3(b-a)}\Big)(x) - \int_a^b dx\ \Big(\phi - \frac{\epsilon}{3(b-a)}\Big)(x) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3(b-a)} \int_a^b dx\ 1 = \epsilon\ .$$

Somit ist $f$ integrierbar. Damit gilt

$$\Big| \int_a^b dx\ f(x) - \int_a^b dx\ f_n(x) \Big| \leq \int_a^b dx\ |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}\ ,$$

d.h. Grenzwert und Integration vertauschen. □

Auf gleichmäßige Konvergenz der Funktionsfolge kann nicht verzichtet werden.

**Beispiel 34.2** Für $n \geq 2$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n := \max(n - n^2|x - \frac{1}{n}|, 0)$. Die punktweise gebildete Grenzfunktion ist $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Denn $f(0) = 0$ für alle $n \geq 2$, und für jedes $x_0 \in [0,1]$ gilt für $N \geq \frac{2}{x_0}$ mit $N \in \mathbb{N}$, daß $f_n(x_0) = 0$ für alle $n \geq N$. Allerdings ist $(f_n)_{n\geq 2}$ nicht gleichmäßig konvergent gegen 0, da es für $\epsilon = 1$ und für jedes $N \geq 2$ ein $x \in [0,1]$ und ein $n \geq N$ gibt, z.B. $x = \frac{1}{n}$, mit $|f_n(x) - 0| > 1$. Für die Integrale haben wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx\ f_n(x) &= \int_0^{\frac{1}{n}} dx\ \big(n + n^2(x - \tfrac{1}{n})\big) + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} dx\ \big(n - n^2(x - \tfrac{1}{n})\big) \\ &= \big(n^2 \tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_0^{\frac{1}{n}} + \big(2nx - n^2 \tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} = 1\ , \end{aligned}$$

aber für die Grenzfunktion $\int dx\ 0 = 0$. ◁

Entsprechend Satz 34.1 gilt:

**Satz 34.3** *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine Reihe integrierbarer Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist auch $f$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b dx\ \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b dx\ f_n(x)\ .$$

*Beweis.* Man wende Satz 34.1 auf die Folge der Partialsummen $F_k = \sum_{n=0}^{k} f_n$, welche wieder integrierbare Funktionen sind, an. □

**Beispiel 34.4 (Wahrscheinlichkeitsintegral)** Die Funktion $W(x) := \int_0^x dt\ e^{-\frac{t^2}{2}}$ heißt *Gaußsches Wahrscheinlichkeitsintegral*. Die Exponentialfunktion ist gleichmäßig konvergent in jedem kompakten Intervall $[0,x] \subseteq \mathbb{R}_+$, so daß Integration und Summe vertauschen:

$$W(x) = \int_0^x dt\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \int_0^x dt\ t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k (2k+1) k!}\ .$$

◁

**Beispiel 34.5 (Elliptisches Integral)** Die Berechnung der Schwingungsdauer $T$ des mathematischen Pendels als Lösung der Differentialgleichung $f''(x) + \omega^2 \sin(f(x)) = 0$ führt auf das *elliptische Integral* $\frac{T\omega}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$ mit Anfangsauslenkung $k = \sin \frac{x_0}{2}$. Unter Verwendung der Binomialreihen aus Beispiel 14.5 erhalten wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-k^2 \sin^2 x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} k^{2n} A_{2n}$$

mit den Integralen $A_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ \sin^{2n} x$ aus Beispiel 31.3. Damit gilt

$$\frac{T\omega}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \right)^2 k^{2n} \right)\ .$$

◁

Wir nutzen nun den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, um eine zu Satz 23.12 ähnliche Aussage über die Differenzierbarkeit von Funktionsreihen zu erhalten:

**Satz 34.6** *Es seien $f_n : I \to \mathbb{C}$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen, für die gilt:*

i) *Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise auf $I$.*

ii) *Die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $I$.*

*Dann ist die Grenzfunktion $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ stetig differenzierbar, und es gilt $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.*

*Beweis.* Die Grenzfunktion der Ableitungen $f^* := \lim_{n\to\infty} f_n'$ ist nach Satz 33.3 stetig auf $I$. Für festes $a \in I$ gilt $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x dt\ f_n'(t)$ für alle $x \in I$. Nach Satz 34.1 wird im Limes $n \to \infty$ daraus $f(x) = f(a) + \int_a^x dt\ f^*(t)$. Nach

dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $f$ differenzierbar mit $f' = f^*$, also sogar stetig differenzierbar. □

Auf gleichmäßige Konvergenz der Folge der Ableitungen kann nicht verzichtet werden. Z.B. konvergiert die Folge der Funktionen $f_n = \frac{1}{(n+1)} \sin((n+1)x)$ gleichmäßig gegen 0, aber die Folge der Ableitungen $f_n' = \cos((n+1)x)$ hat überhaupt keine Grenzfunktion.

**Beispiel 34.7** Wir berechnen erneut $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ für $|x| < 1$. Inerhalb des Konvergenzradius $R = 1$ konvergiert $f$ absolut, insbesondere auch punktweise. Die Reihe der Ableitungen $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ ist für $|x| < 1$ absolut, damit gleichmäßig, konvergent gegen $\frac{1}{1-x}$. Nach Satz 34.6 gilt $f'(x) = \frac{1}{1-x}$, also $f(x) = -\ln|1-x| + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Die Integrationskonstante ergibt sich für $x = 0$ zu $c = 0$, d.h. es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ für alle $x \in ]-1, 1[$. ◁

**Satz 34.8** *Für alle* $x \in [0, 2\pi]$ *gilt* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}$, *insbesondere* $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

*Beweis.* Die Reihe $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ ist absolut konvergent auf $\mathbb{R}$, damit auch gleichmäßig konvergent. Die Reihe der Ableitungen $f'(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ ist nach Beispiel 33.8 gleichmäßig konvergent auf $[\delta, 2\pi - \delta]$ gegen die Grenzfunktion $\frac{x-\pi}{2}$. Somit gilt für alle $x \in ]0, 2\pi[$ nach Satz 34.6 die Beziehung $f(x) = \frac{(x-\pi)^2}{4} + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Da $f$ als gleichmäßig konvergente Reihe stetig ist, gilt diese Beziehung sogar für $x \in [0, 2\pi]$. Integration liefert

$$\int_0^{2\pi} dx\, f(x) = \left(\frac{(x-\pi)^3}{12} + cx\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi^3}{6} + 2\pi c\,.$$

Andererseits gilt nach Satz 34.1

$$\int_0^{2\pi} dx\, f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} dx\, \cos(kx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sin(kx)\Big|_0^{2\pi} = 0\,.$$

Somit gilt $c = -\frac{\pi^2}{12}$. □

## 35 Die Γ-Funktion

**Satz 35.1** *Das uneigentliche Integral* $\Gamma(x) := \int_0^\infty dt\; t^{x-1}\, e^{-t}$ *ist konvergent für alle* $x \in \mathbb{R}_+^\times$. *Es gilt*

i) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}_+^\times$

ii) $\Gamma(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(n) = (n-1)!$ *für alle* $n \in \mathbb{N}^\times$

*Beweis.* Kritisch sind beide Integrationsgrenzen. Wegen $\lim_{t\to\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$ gibt es für jedes $x \in \mathbb{R}_+^\times$ ein $t_0 \in \mathbb{R}_+^\times$, so daß $t^{x-1}e^{-t} \le \frac{1}{t^2}$ für alle $t \ge t_0$. Zerschneiden des Integrals bei $t_0$ liefert für $0 < \epsilon < t_0$

$$0 \le \int_\epsilon^{t_0} dt\; t^{x-1}\, e^{-t} \le \int_\epsilon^{t_0} dt\; t^{x-1} = \frac{t_0^x - \epsilon^x}{x} \le \frac{t_0^x}{x}\;,$$

d.h. $\lim\limits_{\epsilon\searrow 0} \int_\epsilon^{t_0} dt\; t^{x-1}\, e^{-t}$ existiert für alle $x \in \mathbb{R}_+^\times$. Für $t_0 < R < \infty$ gilt

$$0 \le \int_{t_0}^R dt\; t^{x-1}\, e^{-t} \le \int_{t_0}^R dt\; \frac{1}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_{t_0}^R \le \frac{1}{t_0}\;.$$

Somit ist $\Gamma(x)$ konvergent.

i) partielle Integration liefert für $x > 0$

$$\int_\epsilon^R dt\; t^x\, e^{-t} = -t^x\, e^{-t}\Big|_\epsilon^R + \int_\epsilon^R dt\; \frac{d}{dt}(t^x)\, e^{-t} = -R^x\, e^{-R} + \epsilon^x\, e^{-\epsilon} + x\int_\epsilon^R dt\; t^{x-1}\, e^{-t}\;.$$

Die Behauptung folgt aus $\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^x = 0$ für $x > 0$.

ii) Es gilt

$$\Gamma(1) = \lim_{\epsilon\searrow 0} \int_\epsilon^1 dt\; e^{-t} + \lim_{R\to\infty} \int_1^R dt\; e^{-t} = -\lim_{\epsilon\searrow 0} e^{-t}\Big|_\epsilon^1 - \lim_{R\to\infty} e^{-t}\Big|_1^R = \lim_{\epsilon\searrow 0} e^{-\epsilon} = 1\;.$$

□

Die Funktion $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ interpoliert damit die Fakultät. Eine andere Interpolation wird wie folgt erhalten: Für $x \in \mathbb{N}^\times$ und beliebige $n \in \mathbb{N}^\times$ gilt

$$(x-1)! = \frac{(x+n)!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \Big(\frac{n+1}{n} \cdots \frac{n+x}{n}\Big)\;.$$

Das bleibt auch im Limes $n \to \infty$ richtig. Im Limes werden die Brüche $\frac{n+p}{n}$ zu 1. Läßt man sie weg, dann kann man die so entstehende rechte Seite sogar für komplexe Zahlen $x \in \mathbb{C}$ definieren (mit $n^x = e^{x \ln n}$). Zweckmäßigerweise betrachtet man das Inverse:

$$G_n(z) := \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!n^z}\;.$$

**Satz 35.2** *Die Folge $(G_n)_{n\geq 1}$ konvergiert an jeder Stelle $z \in \mathbb{C}$. Ihre Grenzfunktion $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $G(z) := \lim_{n\to\infty} G_n(z)$ ist stetig und hat Nullstellen genau in den Punkten $0, -1, -2, \ldots$. Es gilt*

i) $G(z+1) = \frac{1}{z}G(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}^\times$

ii) $G(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad G(n) = \frac{1}{(n-1)!}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}^\times$

*Beweis.* Für $z \in \{0, -1, -2, \ldots\}$ konvergiert $(G_n)$ gegen 0. Sei also $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, \ldots,\}$ fest. Wähle $R, N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2R > 2|z|$. Dann ist $G_n(z) \neq 0$ für alle $2R \leq n \leq N$, und es gilt $G_N(z) = G_{2R-1}(z) \cdot \prod_{n=2R}^{N} \frac{G_n(z)}{G_{n-1}(z)}$. Die Quotienten sind $\frac{G_n(z)}{G_{n-1}(z)} = \frac{z+n}{n} \cdot \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^z = \Big(1+\frac{z}{n}\Big)e^{z\ln(1-\frac{1}{n})}$. Nach Satz 21.2 gilt $(1+\frac{z}{n}) = e^{L(\frac{z}{n})}$ für $|z| < n$ und damit

$$G_N(z) = G_{2R-1}(z) \cdot \exp\Big(\sum_{n=2R}^{N}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^k}{n^k k} - z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^k k}\Big)\Big)\,.$$

Die Summanden mit $k = 1$ heben sich gegeneinander auf, und wir erhalten für $n \geq 2R > 2|z|$ die Abschätzung

$$\Big|\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^k}{n^k k} - z\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{n^k k}\Big| \leq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{R^k}{n^k} + R\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{n^k} \leq \Big(\frac{R^2}{n^2}+\frac{R}{n^2}\Big)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} \leq \frac{4R^2}{n^2}\,.$$

Somit ist die Reihe $\sum_{n=2R}^{\infty} \ln\frac{G_n(z)}{G_{n-1}(z)}$ gleichmäßig konvergent auf $K_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, so daß die Grenzfunktion $\lim_{N\to\infty} G_N(z)$ existiert und stetig in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist.

i) folgt aus $G_n(z+1) = \frac{z+n+1}{nz}G_n(z)$ und Grenzwertbildung.

ii) folgt aus $G_n(1) = \frac{n+1}{n}$ und Grenzwertbildung. □

Man definiert die Gamma-Funktion $\Gamma : \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\} \to \mathbb{C}$ als $\Gamma(z) := \frac{1}{G(z)}$. Nach Satz 35.2 ist $\Gamma$ stetig und nullstellenfrei auf dem Definitionsbereich, es gilt $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ sowie $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}^\times$. Zu zeigen ist allerdings, daß auf $\mathbb{R}_+^\times$ die Integraldefinition aus Satz 35.1 mit $\frac{1}{G(z)}$ übereinstimmt. Dazu benötigt man:

**Satz 35.3 (Bohr-Mollerup)** *Eine Funktion $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ stimmt mit der Einschänkung der $\Gamma$-Funktion auf $\mathbb{R}_+$ überein, falls gilt*

i) $F(1) = 1$

ii) $F(x+1) = xF(x)$

iii) $F(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq (F(x))^\lambda (F(y))^{1-\lambda}$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}_+$ *und alle* $\lambda \in ]0, 1[$.

*Beweis.* Wegen der Rekursionsformel ii) genügt der Beweis für $0 < x < 1$. Nach iii) gilt für $n \in \mathbb{N}^\times$

$$\begin{aligned} F(n+x) = F(x(n+1)+(1-x)n) &\le (F(n+1))^x (F(n))^{1-x} \\ &= (n!)^x ((n-1)!)^{1-x} = n! n^{x-1} \,. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} n! = F(n+1) = F(x(n+x)+(1-x)(n+x+1)) &\le (F(n+x))^x (F(n+x+1))^{1-x} \\ &= (n+x)^{1-x} F(n+x) \,, \end{aligned}$$

somit $n!(n+x)^{x-1} \le F(x+n) \le n! x^{n-1}$. Division durch $x(x+1)\cdots(x+n)$ und Multiplikation mit $(x+n)$ liefert

$$\begin{aligned} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \Big(\frac{n+x}{n}\Big)^x &\le \frac{F(n+x)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \\ &\le \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \frac{n+x}{n} \,. \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ entsteht $\Gamma(x) \le F(x) \le \Gamma(x)$. □

Wir überprüfen iii) für die Integraldarstellung $F(x) = \int_0^\infty dt\; t^{x-1} e^{-t}$. Nach der Hölderschen Ungleichung mit $p = \frac{1}{\lambda}$ und $q = \frac{1}{1-\lambda}$ sowie $f(t) = t^{\frac{x-1}{p}} e^{-\frac{t}{p}}$ und $g(t) = t^{\frac{y-1}{q}} e^{-\frac{t}{q}}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_\epsilon^R dt\; t^{\lambda x + (1-\lambda) y - 1} e^{-t} &= \int_\epsilon^R dt\; t^{\frac{x-1}{p} + \frac{y-1}{q}} e^{-\frac{t}{p} - \frac{t}{q}} \\ &\le \Big( \int_\epsilon^R dt\; t^{x-1} e^{-t} \Big)^{\frac{1}{p}} \Big( \int_\epsilon^R dt\; t^{y-1} e^{-t} \Big)^{\frac{1}{q}} \,. \end{aligned}$$

Im Limes $\epsilon \to 0$ und $R \to \infty$ folgt die Behauptung.

**Satz 35.4** *Es gilt* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ *sowie* $\displaystyle\int_0^\infty dx\; e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *und* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty dx\; e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

*Beweis.* Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(1-x) = (-x)\Gamma(x)\Gamma(-x) &= (-x) \Big( \lim_{n\to\infty} \frac{1}{G_n(x)} \Big) \Big( \lim_{n\to\infty} \frac{1}{G_n(-x)} \Big) \\ &= (-x) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{G_n(x) G_n(-x)} \\ &= (-x) \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(0+x)(0-x)(1+x)(1-x)\cdots(n+x)(n-x)} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2 - x^2} \,. \end{aligned}$$

Mit dem Wallisschen Produkt $\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1} = \frac{\pi}{2}$ aus Beispiel 31.3 gilt für $x = \frac{1}{2}$ die Gleichung $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi$, also $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Nach Substitution $t(x) = x^2$ mit $t' = 2x = 2\sqrt{t}$ erhält man

$$\int_\epsilon^R dx\ e^{-x^2} = \int_\epsilon^R dx\ e^{-t(x)} t'(x) \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_{\epsilon^2}^{R^2} dt\ t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t}\ .$$

Für $\epsilon \searrow 0$ und $R \to \infty$ folgt die Behauptung. □

Es läßt sich zeigen, daß $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2-x^2} = \frac{\pi x}{\sin(\pi x)}$ für $x \notin \mathbb{Z}^\times$. Somit gilt allgemein $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$ für $x \notin \mathbb{Z}$ bzw. nach Verschiebung $\Gamma(\frac{1}{2}+x)\Gamma(\frac{1}{2}-x) = \frac{\pi}{\cos(\pi x)}$. Eine weitere wichtige Beziehung ist der Verdopplungssatz

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x)\Gamma(x+\tfrac{1}{2})\ .$$

Mit der Γ-Funktion eng verwandt ist die durch

$$B(a,b) := \int_0^1 dx\ x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ , \qquad a,b > 0\ ,$$

definierte *Beta-Funktion*. Durch Substitution entstehen weitere Beziehungen wie z.B.

$$B(a,b) = \int_0^\infty dt\ \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\ , \qquad B(a,b) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi\ \sin^{2a-1}\phi\ \cos^{2b-1}\phi\ .$$

Es gilt $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. Diese Formeln werden in den Übungen behandelt. Einige der Beweise beruhen auf dem Satz von Bohr-Mollerup.

**Satz 35.5 (Stirlingsche Formel)** *Für $n \in \mathbb{N}^\times$ gilt $n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n e^{\mu(n)}$ mit $0 \le \mu(n) \le \frac{1}{12n}$. (Wir zeigen nur $0 \le \mu(n) \le \frac{1}{8n}$.)*

*Beweis.* Nach Trapezregel (Satz 31.6) für $f(x) = \ln x$ und $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}$ gilt

$$\int_k^{k+1} dx\ \ln x = \frac{1}{2}(\ln k + \ln(k+1)) + \frac{1}{2}\int_k^{k+1} dx\ \frac{(x-k)(k+1-x)}{x^2}$$

für $k > 0$. Summieren über $k$ von 1 bis $n-1$ ergibt

$$\int_1^n dx\ \ln x = \sum_{k=1}^{n} \ln k - \frac{1}{2}\ln n + \int_1^n dx\ \frac{\phi(x)}{x^2}$$

mit $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch $\phi(x) := \frac{1}{2}(x-[x])(1+[x]-x)$, wobei $[x] \in \mathbb{N}$ der ganze Teil von $x \in \mathbb{R}_+$ ist. Wegen

$$\int_1^n dx\ \ln x \cdot 1 = x\ln x\Big|_1^n - \int_1^n dx\ 1 = n\ln n - n + 1 = 1 + \ln\Big(\frac{n}{e}\Big)^n$$

sowie $\sum_{k=1}^n \ln k = \ln(n!)$ gilt $\ln(n!) = \ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\cdot c_n\right)$ mit

$$c_n := \exp\left(1 - \int_1^n dx\, \frac{\phi(x)}{x^2}\right) .$$

Da $0 \le \phi \le \frac{1}{8}$ eine beschränkte Funktion ist und das Integral $\int_1^\infty dx\, x^{-2}$ konvergent ist, existiert der Limes $c := \lim_{n\to\infty} c_n = \exp\left(1 - \int_1^\infty dx\, \frac{\phi(x)}{x^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n^2}{c_{2n}}$. Für den letzten Bruch ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{c_n^2}{c_{2n}} &= \frac{(n!)^2(2n/e)^{2n}\sqrt{2n}}{(2n)!(n/e)^{2n}n} = \sqrt{\frac{2}{n}}\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} = \sqrt{\frac{2}{n}}\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)} \\ &= \sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}}\sqrt{\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots(2n)\cdot(2n)}{(2-1)(2+1)\cdot(4-1)(4+1)\cdots(2n-1)(2n+1)}} .\end{aligned}$$

Im Limes $n \to \infty$ entsteht unter der letzten Wurzel das Wallissche Produkt (Beispiel 31.3) für $\frac{\pi}{2}$, d.h. es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n^2}{c_{2n}} = \sqrt{2\pi}$. Somit ist die Behauptung bewiesen mit

$$\mu(n) := \int_n^\infty dx\, \frac{\phi(x)}{x^2} .$$

Wegen $0 \le \phi \le \frac{1}{8}$ gilt $0 \le \mu(n) \le \frac{1}{8n}$, was sich unter Verwendung der Konvexität noch etwas verbessern läßt. □

Bemerkung: Man kann zeigen, daß die Stirlingsche Formel auch richtig bleibt für die Γ-Funktion, d.h. für $x > 0$ gilt $\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\mu(x)}$ mit $0 \le \mu(x) \le \frac{1}{12x}$.

# Teil VII
# Lineare Abbildungen

## 36 Definition und Beispiele

**Definition 36.1** Seien $V, W$ Vektorräume über $K$. Eine Abbildung $F : V \to W$ heißt *linear* (genauer: $K$-linear) oder *Homomorphismus* von Vektorräumen (über $K$), wenn

(L) $F(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2) = \lambda_1 \cdot F(v_1) + \lambda_2 \cdot F(v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in K$.

Eine lineare Abbildung $F : V \to W$ heißt

- *Isomorphismus*, wenn $F$ bijektiv ist,
- *Endomorphismus*, wenn $W = V$ ist,
- *Automorphismus*, wenn $F$ bijektiv und $W = V$ ist.

**Beispiel 36.2**

i) *Skalentransformationen (Dilatationen).* Sei $V$ ein reeller Vektorraum und $c > 0$, dann definiert $F_c : v \mapsto c \cdot v$ einen Automorphismus von $V$ (eine lineare Abbildung $F_c : V \to V$, die bijektiv ist mit $F_c^{-1} = F_{\frac{1}{c}} : v \mapsto \frac{1}{c} \cdot v$).

ii) *Drehungen in der Ebene.* Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $F_\alpha$ die Drehung um den Nullpunkt mit dem Winkel $\alpha$,

$$F_\alpha : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto F_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix} .$$

$F$ ist ebenfalls ein Automorphismus mit $F_\alpha^{-1} = F_{-\alpha}$.

iii) *Matrizen.* Sei $V = W = \mathbb{R}^2$ und

$$F_a : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} .$$

Dann ist $F_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, welche durch die Matrix $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ parametrisiert wird. Die beiden Beispiele i) und ii) sind Spezialfälle mit $a = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ (für $V = \mathbb{R}^2$) und $a = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Für allgemeines $a$ ist $F$ ein Endomorphismus. Es wird wichtig sein zu untersuchen, wann $F$ bijektiv ist, also ein Automorphismus ist.

iv) *Projektionen der Ebene auf eine Gerade durch den Nullpunkt.* Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $(v_1, v_2)$ eine Basis, z.B. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann definiert die eindeutige Zerlegung von $v$ nach der Basis $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2$ zwei Projektionen

$$F_1 : \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 \mapsto \lambda_1 \cdot v_1 \ ,$$
$$F_2 : \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 \mapsto \lambda_2 \cdot v_2 \ .$$

Diese Projektionen $F_1, F_2$ sind lineare Abbildungen.

v) In Analogie zu Beispiel iii) definieren wir $F_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ durch $F_a : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto a_{11}x_1 + a_{12}x_2$. Dann ist $F_a$ eine lineare Abbildung, die durch die Matrix $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \in M(1 \times 2, \mathbb{R})$ parametrisiert wird. Beispiel iv) für $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Spezialfall mit $F_1 \Leftrightarrow a = (1\ 0)$ und $F_2 \Leftrightarrow a = (0\ 1)$.

vi) *Projektionen auf einen Untervektorraum.* In Verallgemeinerung von Beispiel iv) sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum, $W \subseteq V$ ein Untervektorraum und $V = W \oplus W'$. Dann ist die Projektion $F_W : V \to W$ eine lineare Abbildung, die wie folgt erhalten wird. Man nehme eine Basis $(w_1, \ldots, w_r)$ von $W$ und eine Basis $(w'_{r+1}, \ldots, w'_n)$ von $W'$ (also $n - r$ Vektoren von $V$, so daß $(w_1, \ldots, w_r, w'_{r+1}, \ldots, w'_n)$ eine Basis von $V$ ist) und zerlege $v \in V$ nach dieser Basis, $v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot v_i + \sum_{j=r+1}^{n} \mu_j \cdot w'_j$. Dann ist $F_W : v \mapsto \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot v_i$. Diese Abbildung $F_W$ ist unabhängig vom direkten Summanden $W'$ (welcher nicht eindeutig war) und unabhängig von der Basis von $W$.

vii) *Differentiation.* Für ein offenes Intervall $I = ]a, b[ \subseteq \mathbb{R}$ seien $V = \mathcal{C}^1(I)$ und $W = \mathcal{C}(I)$ die (unendlich-dimensionalen) Vektorräume der einmal stetig differenzierbaren bzw. der stetigen reellwertigen Funktionen auf $I$, mit $(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2)(x) := \lambda_1 \cdot f_1(x) + \lambda_2 \cdot f_2(x)$ für $x \in ]a, b[$. Dann ist das Differential $D : V \to W$ mit $D : f \mapsto f'$ eine lineare Abbildung. Ist $V = \mathcal{C}^\infty(I)$ der Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen über $I$, dann ist das Differential $D : V \to V$ ein Endomorphismus.

viii) *Integration.* Für ein abgeschlossenes Intervall $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ definiert das Integral $\int : f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ eine lineare Abbildung $\int : \mathcal{C}(I) \to \mathbb{R}$.

Diese sehr unterschiedlichen Beispiele zeigen, daß lineare Abbildungen häufig auftreten. Kenntnisse der allgemeinen Eigenschaften von linearen Abbildungen und von Methoden zu ihrer Untersuchung sind deshalb sehr wichtig.

## 37 Bild und Kern einer linearen Abbildung

**Definition 37.1** Ist $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, so heißt

- $\mathrm{im}(F) := F(V) \subseteq W$ das *Bild* von $F$,
- $\ker(F) := F^{-1}(0) \subseteq V$ der *Kern* von $F$.

**Satz 37.2** *Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt*

i) $F(0) = 0$, $F(v - w) = F(v) - F(w)$, $F(\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n) = \lambda_1 \cdot F(v_1) + \cdots + \lambda_n \cdot F(v_n)$.

ii) *Ist die Familie $(v_i)_{i\in I}$ linear abhängig in $V$, so ist die Familie $(F(v_i))_{i\in I}$ linear abhängig in $W$.*

iii) *Sind $V' \subseteq V$ und $W' \subseteq W$ Untervektorräume, so ist das Bild $F(V') \subseteq W$ Untervektorraum von $W$ und das Urbild $F^{-1}(W') \subseteq V$ Untervektorraum von $V$.*

iv) $\dim(F(V)) \leq \dim(V)$.

v) *Ist $F$ ein Isomorphismus, so ist auch das Urbild $F^{-1} : W \to V$ eine lineare Abbildung (und damit ein Isomorphismus).*

*Beweis.* i) ist klar.

ii) Sei $0 = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i$, wobei mindestens einer und insgesamt endlich viele Skalare $\lambda_i$ ungleich 0 sind. Dann ist auch $0 = F(0) = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot F(v_i)$.

iii) $0 \in V'$ und $0 = F(0) \in F(V')$, also $F(V') \neq \varnothing$. Sind $w_1, w_2 \in F(V')$, dann gibt es $v_1, v_2$ mit $w_1 = F(v_1)$ und $w_2 = F(v_2)$. Also $\lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2 = \lambda_1 \cdot F(v_1) + \lambda_2 \cdot F(v_2) = F(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2) \in F(V')$, und $F(V')$ ist Untervektorraum.

Sind $v_1, v_2 \in F^{-1}(W')$, so ist $F(v_1), F(v_2) \in W'$ und auch $\lambda_1 \cdot F(v_1) + \lambda_2 \cdot F(v_2) \in W'$, da $W'$ Untervektorraum. Also ist $F(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2) = \lambda_1 \cdot F(v_1) + \lambda_2 \cdot F(v_2) \in W'$ und damit $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 \in F^{-1}(W')$, und $F^{-1}(W')$ ist Untervektorraum.

iv) Sind $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ linear unabhängig, so sind auch $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig, denn das Gegenteil führt wegen ii) zu einem Widerspruch.

v) Seien $w_1, w_2 \in W$ und $v_1, v_2 \in V$ mit $F(v_1) = w_1$ und $F(v_2) = w_2$. Dann ist $F(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2) = \lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2$. Anwenden von $F^{-1}$ liefert $F^{-1}(\lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2) = \lambda_1 \cdot F^{-1}(w_1) + \lambda_2 \cdot F^{-1}(w_2)$. □

**Satz 37.3** *Sei $F : V \to W$ linear. Dann gilt:*

i) $\mathrm{im}(F) \subseteq W$ *und* $\ker(F) \subseteq V$ *sind Untervektorräume.*

ii) *$F$ surjektiv* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{im}(F) = W$

iii) *$F$ injektiv* $\Leftrightarrow$ $\ker(F) = \{0\}$

iv) *Ist $F$ injektiv und sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig, so sind auch $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ linear unabhängig.*

*Beweis.* i) ist in Satz 37.2.iii) bewiesen und ii) ist die Definition der Surjektivität.

iii) $0 \in \ker(F)$. Ist $F$ injektiv, so folgt aus $F(v) = 0 = F(0)$, daß $v = 0$. Gibt es umgekehrt $v_1 \neq v_2 \in V$ mit $F(v_1) = F(v_2)$, so wäre $F(v_1 - v_2) = 0$, also $0 \neq v_1 - v_2 \in \ker(F)$. Widerspruch

iv) Sei $\lambda_1 \cdot F(v_1) + \cdots + \lambda_n \cdot F(v_n) = 0$, dann gilt $0 = F(\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n)$ nach Linearität und $\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n = 0$ nach iii). Also ist $\lambda_i = 0$. □

**Definition 37.4** Ist $F : V \to W$ linear, so heißt die Zahl $\operatorname{rang}(F) := \dim(\operatorname{im}(F))$ der *Rang* der Abbildung $F$.

Der Rang ist eine wichtige Charakterisierung einer linearen Abbildung.

**Satz 37.5** *Ist $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt*

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{im}(F)) + \dim(\ker(F)) \, .$$

*Beweis.* Wir wissen $\dim(\operatorname{im}(F)) \leq \dim(V)$ nach Satz 37.2.iv) und $\dim(\ker(F)) \leq \dim(V)$ nach Satz 37.3.i). Seien also $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von $\ker(F)$ und $(w_1, \ldots, w_r)$ eine Basis von $\operatorname{im}(F)$. Wir wählen $u_1, \ldots, u_r \in V$ mit $F(u_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq r$. Für $v \in V$ gibt es eine eindeutige Darstellung $F(v) = \lambda_1 \cdot w_1 + \cdots + \lambda_r \cdot w_r$. Für die so bestimmten $\lambda_i$ konstruieren wir $v' := \lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_r \cdot u_r$. Dann gilt $F(v - v') = 0$, also $v - v' \in \ker(F)$. Es existieren also eindeutig bestimmte $\mu_1, \ldots, \mu_k$ mit $v - v' = \mu_1 \cdot v_1 + \cdots + \mu_k \cdot v_k$. Also gilt

$$v = \lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_r \cdot u_r + \mu_1 \cdot v_1 + \cdots + \mu_k \cdot v_k \, .$$

Damit ist $V$ durch die Familie $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_k, )$ erzeugt. Zum Beweis der linearen Unabhängigkeit sei $\lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_r \cdot u_r + \mu_1 \cdot v_1 + \cdots + \mu_k \cdot v_k = 0$. Anwenden von $F$ ergibt $F(\lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_r \cdot u_r) = \lambda_1 \cdot w_1 + \cdots + \lambda_r \cdot w_r = 0$, und damit $\lambda_i = 0$. Das liefert $\mu_1 \cdot v_1 + \cdots + \mu_k \cdot v_k = 0$ und damit $\mu_j = 0$. Damit ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $V$ aus $\dim(\operatorname{im}(F)) + \dim(\ker(F))$ Vektoren. □

**Satz 37.6** *Zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen $V, W$ gibt es genau dann einen Isomorphismus, wenn $\dim(V) = \dim(W)$.*

*Beweis.* $F$ ist Isomorphismus, wenn linear, injektiv und surjektiv. $F$ injektiv heißt $\dim(\ker(F)) = 0$ und $F$ surjektiv heißt $\operatorname{im}(F) = W$. Aus dem vorigen Satz folgt dann die Behauptung. □

**Satz 37.7** *Ist $\dim(V) = \dim(W) < \infty$ und ist $F$ linear, dann sind für $F$ Injektivität, Surjektivität und Bijektivität äquivalent.*

*Beweis.* injektiv⇒ surjektiv: $F$ injektiv, dann $\ker(F) = \{0\}$ und $\dim(V) = \dim(\mathrm{im}(F))$. Also $\dim(\mathrm{im}(F)) = \dim(W)$ und dann $\mathrm{im}(F) = W$.

surjektiv⇒injektiv: $F$ surjektiv, dann $\dim(\mathrm{im}(F)) = \dim(W) = \dim(V)$. Also $\dim(\ker(F)) = 0$ und $\ker(F) = \{0\}$, somit $F$ injektiv. □

**Satz 37.8 (Faktorisierungssatz)** *Sei $F : V \to W$ linear und $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von $V$ mit $\ker(F) = \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_k)$. Mit $U := \mathrm{span}(u_1, \ldots, u_r)$ gilt:*

i) $V = U \oplus \ker(F)$

ii) *Die Einschränkung $F\big|_U : U \to \mathrm{im}(F)$ ist ein Isomorphismus.*

iii) *Sei $P_U : V = U \oplus \ker(F) \to U$ die Projektion auf den ersten Summanden, definiert für $v = u + v' \in V$ mit $u \in U$ und $v' \in \ker(F)$ durch $P_U(v) := u$, so gilt $F = F\big|_U \circ P_U$.*

*Beweis.* i) ist klar, denn $U$ und $\ker(F)$ sind linear unabhängig.

ii) $\ker(F\big|_U) = \ker(F) \cap U = \{0\}$, also ist $F\big|_U : U \to \mathrm{im}(F)$ injektiv, außerdem surjektiv und damit bijektiv.

iii) Für $v = u + v'$ mit $u \in U$ und $v' \in \ker F$ ist $F(v) = F(u) + F(v') = F(u) = F\big|_U(u) = F\big|_U(P(v))$. □

Zu beachten ist, daß $U$ in der direkten Summe $V = U \oplus \ker(F)$ nicht eindeutig definiert ist. Die $F\big|_U$ sind also, je nach Wahl von $U$, verschiedene Isomorphismen.

Seien $V, W$ Vektorräume über $K$, dann bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) := \{F : V \to W \ : \ F \text{ ist } K\text{-linear}\}$$

die Menge aller $K$-linearen Abbildungen (aller Homomorphismen) von $V$ nach $W$. Die Menge $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist ein Vektorraum mit Verknüpfungen

$$(\lambda_1 \cdot F_1 + \lambda_2 \cdot F_2)(v) := \lambda_1 \cdot F_1(v) + \lambda_2 \cdot F_2(v) \ .$$

Insbesondere ist der Nullvektor die lineare Abbildung $0 : v \mapsto 0$ für alle $v \in V$, und die negative Abbildung ist $-F : v \mapsto -F(v)$. Ist der Körper klar, dann schreiben wir $\mathrm{Hom}(V, W)$ statt $\mathrm{Hom}_K(V, W)$.

Ist $V = W$, so schreiben wir $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$, und $\mathrm{End}(V)$ ist wieder ein Vektorraum. Entsprechend bezeichnet

$$\mathrm{Aut}_K(V) := \{F : V \to V \ : \ F \text{ ist } K\text{-linear und bijektiv}\}$$

die Menge der bijektiven linearen Abbildungen von $V$ nach $V$. Jedoch ist $\mathrm{Aut}(V)$ kein Vektorraum, denn für $F \in \mathrm{Aut}(V)$ ist $0 \cdot F = 0 \notin \mathrm{Aut}(V)$.

Lineare Abbildungen lassen sich ganz analog wie allgemeine Abbildungen hintereinander ausführen.

**Satz 37.9** *Sind $U, V, W$ Vektorräume und $G : U \to V$ sowie $F : V \to W$ lineare Abbildung, dann ist auch die Komposition $F \circ G : U \to W$ eine lineare Abbildung.*

*Beweis.*

$$\begin{aligned}(F \circ G)(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2) &:= F(G(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2)) \\ &= F(\lambda_1 \cdot G(u_1) + \lambda_2 \cdot G(u_2)) \\ &= \lambda_1 \cdot F(G(u_1)) + \lambda_2 \cdot F(G(u_2)) \\ &= \lambda_1 \cdot (F \circ G)(u_1) + \lambda_2 \cdot (F \circ G)(u_2)\ . \qquad \square\end{aligned}$$

Es folgt:

**Satz 37.10** *Ist $V$ ein Vektorraum, so ist* $\mathrm{Aut}(V)$ *eine Gruppe mit der Komposition als Verknüpfung.*

## 38 Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung

Wir erinnern daran, daß wir nach Fixierung einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ in einem $n$-dimensionalen $K$-Vektorraum $V$ jeden Vektor $v \in V$ äquivalent durch seine Koordinaten $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ beschreiben können, die sich eindeutig aus $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ ergeben. Völlig analog wird jede lineare Abbildung $: V \to W$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen $V, W$ nach Fixierung von Basen in $V$ und $W$ durch eine Matrix beschrieben.

Wir betrachten zunächst eine etwas allgemeinere Situation:

**Satz 38.1** *Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum mit Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$. Sei $W$ ein (nicht notwendig endlich-dimensionaler) Vektorraum und $w_1, \ldots, w_n \in W$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $F : V \to W$ mit $F(v_i) = w_i$ für alle $1 \le i \le n$. Für diese gilt:*

- $\mathrm{im}(F) = \mathrm{span}(w_1, \ldots, w_n)$
- *$F$ injektiv* $\quad\Leftrightarrow\quad$ *$(w_1, \ldots, w_n)$ ist linear unabhängig.*

*Beweis.* Ist $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n \in V$, so definieren wir $F(v) := \lambda_1 \cdot w_1 + \cdots + \lambda_n \cdot w_n$. Da die $\lambda_i$ eindeutig bestimmt sind, ist auch $F(v)$ eindeutig. Zu zeigen ist aber, daß $F$ wirklich linear ist. Sei $v' = \mu_1 \cdot v_1 + \cdots + \mu_n \cdot v_n$ ein weiterer Vektor. Dann gilt

$$\lambda \cdot v + \mu \cdot v' = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\lambda_i + \mu\mu_i) \cdot v_i \qquad \text{und}$$

$$\begin{aligned}F(\lambda \cdot v + \mu \cdot v') = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\lambda_i + \mu\mu_i) \cdot w_i &= \lambda\Big(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot w_i\Big) + \mu\Big(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot w_i\Big) \\ &= \lambda \cdot F(v) + \mu \cdot F(v')\ .\end{aligned}$$

Klar ist, daß $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathrm{span}(w_1, \ldots, w_n)$. Andererseits ist $w = \lambda_1 \cdot w_1 + \cdots + \lambda_n w_n = F(\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n)$ und damit $\mathrm{span}(w_1, \ldots, w_n) \subseteq \mathrm{im}(F)$.

Sei $(w_1, \ldots, w_n)$ linear abhängig, so gibt es mindestens ein $\lambda_i \neq 0$, so daß $0 = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n = F(\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n)$. Da $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis ist, ist $\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n \neq 0$, und damit ist $F$ nicht injektiv. Das bedeutet $F$ injektiv $\Rightarrow$ $(w_1, \ldots, w_n)$ linear unabhängig. Ist umgekehrt $(w_1, \ldots, w_n)$ linear unabhängig, dann betrachten wir $F(v) = 0$ mit $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n$, also $F(\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n) = \lambda_1 \cdot w_1 + \cdots + \lambda_n \cdot w_n$, was zu $\lambda_i = 0$ und damit $v = 0$ führt. Also ist $\ker(F) = \{0\}$ und $F$ ist injektiv. □

**Folgerung 38.2** *Sei $V$ endlich-dimensionaler Vektorraum und $v_1, \ldots, v_r \in V$ linear unabhängig. Sei $W$ ein Vektorraum und $w_1, \ldots, w_r \in W$. Dann gibt es mindestens eine lineare Abbildung $F : V \to W$ mit $F(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq r$.*

*Beweis.* Ist $(v_1, \ldots, v_r)$ linear unabhängig, aber keine Basis, dann können wir eine Basis $(v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ von $V$ finden. Für diese geben wir beliebige Vektoren $w_{r+1}, \ldots, w_n \in W$ vor und finden für jede Wahl von $w_{r+1}, \ldots, w_n$ eine lineare Abbildung $F$ mit $F(v_i) = w_i$. □

**Satz 38.3** *Sei $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_n)$ Basis eines Vektorraums $W$. Dann gibt es genau einen Isomorphismus $\Phi_{\mathcal{B}} : K^n \to W$ mit $\Phi_{\mathcal{B}}(e_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$, wobei $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ die Standardbasis ist.*

*Beweis.* Nach Satz 38.1 gibt es genau eine lineare Abbildung $\Phi_{\mathcal{B}}$ mit dieser Eigenschaft, und diese ist injektiv und surjektiv. □

Wir kommen nun zur allgemeinen Beziehung zwischen linearen Abbildungen und Matrizen:

**Satz 38.4** *Gegeben seien $K$-Vektorräume $V$ mit Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $W$ mit Basis $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$.*

i) *Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $F : V \to W$ genau eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$, so daß $F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i$.*

ii) *Die so erhaltene Abbildung*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : \mathrm{Hom}(V, W) \to M(m \times n, K) \,, \qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : F \mapsto A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$$

*ist ein Isomorphismus von Vektorräumen über $K$, und insbesondere gilt*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\lambda \cdot F + \mu \cdot G) = \lambda \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) + \mu \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(G) \,.$$

**Definition 38.5** Mit den Bezeichnungen aus Satz 38.4 heißt $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ die *darstellende Matrix* von $F : V \to W$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ von $V$ und $\mathcal{B}$ von $W$.

*Beweis von Satz 38.4.* i) Durch Komposition von $F$ mit den Isomorphismen $\Phi_{\mathcal{A}}$ und $\Phi_{\mathcal{B}}$ aus Satz 38.3:

$$A := (\Phi_{\mathcal{B}})^{-1} \circ F \circ \Phi_{\mathcal{A}} : K^n \to K^m \,, \qquad A \cdot x := (\Phi_{\mathcal{B}})^{-1}(F(\Phi_{\mathcal{A}}(x))) \,.$$

Umgekehrt ergibt sich $F$ aus $A$ durch $F = \Phi_{\mathcal{B}} \circ A \circ (\Phi_{\mathcal{A}})^{-1} : V \to W$ mit $A \circ x := A \cdot x$. Zunächst ist $(\Phi_{\mathcal{A}})^{-1}(v_j) = e_j \in K^n$. Matrixmultiplikation liefert

$$A \cdot ((\Phi_{\mathcal{A}})^{-1}(v_j)) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot e_i \in K^m \,.$$

Anwenden von $\Phi_{\mathcal{B}}$ liefert $\Phi_{\mathcal{B}}(A \cdot ((\Phi_{\mathcal{A}})^{-1}(v_j))) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i \in W$.

ii) Als Komposition linearer Abbildungen ist $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : \mathrm{Hom}(V, W) \to M(m \times n, K)$ mit

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = (\Phi_{\mathcal{B}})^{-1} \circ F \circ \Phi_{\mathcal{A}} : K^n \to K^m \,.$$

linear. Da $\mathcal{A}$ eine Basis ist, gibt es nach Satz 38.1 genau eine lineare Abbildung $F$ mit $F(v_j) = \widetilde{w_j} := \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i$. Also ist $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ bijektiv. □

Speziell gilt:

**Folgerung 38.6** *Die darstellende Matrix $A$ einer linearen Abbildung $F : K^n \to K^m$ bezüglich der Standardbasen ist gegeben durch $A = (F(e_1), \ldots, F(e_n)) =: M_m^n(F)$, d.h. die $j$-te Spalte von $A$ ist der Vektor $F(e_j) \in K^m$, wobei $e_j \in K^n$ der $j$-te Standardbasisvektor ist. Es gilt $F(x) = A \cdot x$.* □

Die wichtigen Begriffe von Bild, Kern und Rang einer linearen Abbildung übertragen sich somit auf Matrizen.

**Definition 38.7** Für $A \in M(m \times n, K)$ heißt

i) $\ker(A) = \{x \in K^n \ : \ A \cdot x = 0 \in K^m\} \subseteq K^n$ der *Kern* von $A$,

ii) $\mathrm{im}(A) = \{b \in K^m \ : \$ es gibt ein $x \in K^n$ mit $A \cdot x = b\} \subseteq K^m$ das *Bild* von $A$,

iii) $\mathrm{rang}(A) = \dim(\mathrm{im}(A))$ der Rang von $A$.

Wir zeigen später, daß die hier gegebene Definition des Rangs einer Matrix mit Definition 6.9 übereinstimmt. Nach i) ist $\ker(A)$ die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot x = 0$. Eine Basis vom $\mathrm{im}(A)$ bestimmt sich wie folgt: Ist $(v_1, \ldots, v_{n-r})$ eine Basis von $\ker A \subseteq K^n$, so ergänze man sie zu einer Basis $(v_1, \ldots, v_{n-r}, u_1, \ldots, u_r)$ von $K^n$. Dann ist $(A \cdot u_1, \ldots, A \cdot u_r)$ eine Basis von $\mathrm{im}(A)$, denn nach Dimensionsformel ist $(A \cdot u_1, \ldots, A \cdot u_r)$ linear unabhängig.

**Beispiel 38.8** Durch $F((w,x,y,z)) = (w+x-y, x+y-z, w+2x-z)$ für $w,x,y,z \in \mathbb{R}$ werde eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definiert. Daraus lesen wir ab:

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad F(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Folglich wird $F$ durch die Matrix $A_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, \mathbb{R})$ dargestellt. Zur Berechnung des Kerns als Lösung von $A \cdot x = 0$ führen wir folgende elementare Zeilenumformungen durch:

$$A_F \overset{IV_{13}(-1), IV_{23}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{IV_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus lesen wir als Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ab mit $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ beliebig. Folglich ist $\dim(\ker A) = 2$, und eine Basis von $\ker A$ ist $(v_1, v_2)$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir können sie z.B. zur Basis $(v_1, v_2, e_1, e_2)$ von $\mathbb{R}^4$ ergänzen. Somit ist $(F(e_1), F(e_2))$ eine Basis von $\mathrm{im}(A)$. ◁

**Beispiel 38.9** Wir betrachten die durch $F((x,y,z)) = (x-y, 2x+y-z)$ definierte lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basen $(v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{R}^3$ und $(w_1, w_2)$ von $\mathbb{R}^2$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$F(v_1) = F((0,1,1)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; F(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; F(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren sind nun bezüglich der Basis $(w_1, w_2)$ darzustellen, $w_1 a_{1j} + w_2 a_{2j} = F(v_j)$. Es handelt sich also um drei lineare Gleichungssysteme aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Die darstellende Matrix ist folglich $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ◁

Sind also die Basen der Vektorräume $V$ und $W$ festgelegt, dann kann man die Vektorräume mit den Standardräumen $K^n, K^m$ der Koordinaten identifizieren und lineare Abbildungen $F : V \to W$ mit Matizen $A \in M(m \times n, K)$. Eine oftmals sinnvolle Wahl besteht aus Basen, in denen für die Koordinatenmatrix die Einheitsmatrix entsteht:

**Definition 38.10** Die Matrix

$$E_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M(r \times r, K) ,$$

in der sämtliche Einträge auf der *Diagonalen* gleich 1 und alle anderen Einträge gleich 0 sind, heißt $(r \times r)$-*Einheitsmatrix*. Ihre Komponenten sind also $E_r = (\delta_{ij})$, wobei

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

das *Kronecker-Symbol* ist.

**Satz 38.11** *Sei $F : V \to W$ linear und $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$, $\dim(\mathrm{im}(F)) = \mathrm{rang}(F) = r$. Dann gibt es Basen $\mathcal{A}$ von $V$ und $\mathcal{B}$ von $W$ mit*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix} .$$

*Dabei ist $0_{p\times q} \in M(p \times q, K)$ die Matrix, in der sämtliche Einträge gleich 0 sind.*

*Beweis.* Wir wählen eine Basis $(w_1, \dots, w_r)$ von $\mathrm{im}(F)$ und ergänzen sie zu einer Basis $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m)$ von $W$. Dann wählen wir wie im Beweis von Satz 37.5 Vektoren $u_1, \dots u_r \in V$ mit $F(u_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq r$ und ergänzen sie mit einer Basis $(v_1, \dots, v_k)$ von $\ker(F)$ zu einer Basis $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_k)$ von $V$. Dann hat $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ die angegebene Form. □

## 39 Multiplikation von Matrizen

Seien $G : K^r \to K^n$ und $F : K^n \to K^m$ lineare Abbildungen, dargestellt (bezüglich der Standardbasen) nach Satz 38.4 und Folgerung 38.6 durch Matrizen $B = M_n^r(G) \in M(n \times r, K)$ und $A = M_m^n(F) \in M(m \times n, K)$.

Nach Satz 37.9 ist die Komposition $F \circ G : K^r \to K^m$ wieder eine lineare Abbildung, welche durch eine Matrix $C = M_m^r(F \circ G) \in M(m \times r, K)$ dargestellt wird. Das bedeutet $C = M_m^r\big((M_m^n)^{-1}(A) \circ (M_n^r)^{-1}(B)\big)$, und auf diese Weise wird ein Produkt

$$\cdot : M(m \times n, K) \times M(n \times r, K) \to M(m \times r, K) \,, \qquad A \cdot B := M_m^r\big((M_m^n)^{-1}(A) \circ (M_n^r)^{-1}(B)\big)$$

von Matrizen *passender Größe* definiert. Im Produkt muß die Zahl der Spalten der linken Matrix gleich der Zahl der Zeilen der rechten Matrix sein.

**Satz 39.1** *Ist $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$, $B = (B_{jk}) \in M(n \times r, K)$ und $A \cdot B = C = (c_{ik}) \in M(r \times s, K)$, so gilt $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$.*

*Beweis.* Sei $F = (M_n^m)^{-1}(A) : K^n \to K^m$ und $G = (M_r^n)^{-1}(B) : K^r \to K^n$ sowie $F \circ G = (M_r^m)^{-1}(C) : K^r \to K^m$. Seien $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_r)$ die Standardbasis im $K^r$, $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ die Standardbasis im $K^n$ und $(e_1, \ldots, e_m)$ die Standardbasis im $K^m$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(F \circ G)(\mathcal{E}_k) &= \sum_{i=1}^{m} c_{ik} \cdot e_i && \text{(Satz 38.4 für } F \circ G) \\
&= F(G(\mathcal{E}_k)) && \text{(Definition von } F \circ G) \\
&= F\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{jk} \cdot \epsilon_j\Big) && \text{(Satz 38.4 für } G) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \cdot F(\epsilon_j) && \text{(Linearität von } F) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot e_i\Big) && \text{(Satz 38.4 für } F) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\Big) \cdot e_i && \text{(Umordnen der Summen)}
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus der Eindeutigkeit der Koeffizienten zur Basis $(e_i)_{i=1,\ldots,m}$ von $K^m$. □

Ein Spezialfall dieser Rechenregel ist das schon zuvor erklärte Matrixprodukt $A \cdot v \in K^m$ einer Matrix $A \in M(m \times n, K)$ mit einem Spaltenvektor $v \in K^n$. Mit

den Bezeichnungen aus Satz 39.1 gilt: Die $i$-te Zeile von $A$ ist $(a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in})$, und die $j$-te Spalte von $B$ ist $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$. Damit folgt: Das Matrixelement $c_{ij}$ von $C = A \cdot B$ ist das "Produkt" der $i$-ten Zeile von $A$ mit der $j$-ten Spalte von $B$.

**Beispiel 39.2** Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dann gilt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

Daraus ist ersichtlich, daß selbst wenn sowohl $A \cdot B$ als auch $B \cdot A$ erklärt sind, im allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$ gilt. ◁

**Beispiel 39.3** Eine Drehung in der Ebene um den Ursprung mit Winkel $\alpha$ wird durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ beschrieben. Entsprechend beschreibt $B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ eine Drehung mit Winkel $\beta$. Die Hintereinanderausführung beider Drehungen ist durch das Matrixprodukt gegeben:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Andererseits ist die Hintereinanderausführung beider Drehungen wieder eine Drehung mit Gesamtwinkel $\alpha + \beta$. Daraus folgen die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\ , \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

◁

**Satz 39.4** *Sind Matrizen $A, A' \in M(m \times n, K)$, $B, B' \in M(n \times s, K)$ und $C \in M(r \times s, K)$ gegeben sowie $\lambda \in K$, so gilt:*

i) $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$ *und* $(A + A') \cdot B = A \cdot B + A' \cdot B$ *(Distributivgesetze)*

ii) $A \cdot (\lambda \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B)$

iii) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ *(Assoziativgesetz)*

iv) $E_m \cdot A = A \cdot E_n = A$ *(Neutralität der Einheitsmatrix)*

*Beweis.* i) und ii) folgen aus der Summendarstellung des Matrixprodukts, iv) ist leicht nachzurechnen.

iii) Die Komposition beliebiger Abbildungen ist assoziativ. Die Isomorphismen $M_s^r$ übertragen die Assoziativität auf das Matrixprodukt. □

Im weiteren schreiben wir oft $AB$ statt $A \cdot B$ für das Produkt der Matrizen.

**Definition 39.5** Die Abbildung $t : M(m \times n, K) \to M(n \times m, K)$ definiert durch $t : A = (a_{ij}) \mapsto A^t := (a_{ji})$ heißt *Transposition von Matrizen*.

**Satz 39.6** *Wenn das Matrixprodukt $AB$ erklärt ist, dann gilt $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.*

*Beweis.* Sei $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$, $B = (b_{jk}) \in M(n \times r, K)$ und $C = AB = (c_{ik}) \in M(m \times r, K)$. Dann ist $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ und $C^t = (c'_{ki})$ mit $c'_{ki} = c_{ik}$. Weiter ist $B^t = (b'_{kj})$ mit $b'_{kj} = b_{jk}$ und $A^t = (a'_{ji})$ mit $a'_{ji} = a_{ij}$. Dann ist $B^t A^t = D = (d_{ki})$ mit $d_{ki} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj} a'_{ji} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = c_{ik} = c'_{ki}$ und somit $D = C^t$. □

Wir bezeichnen mit $M(n, K) := M(n \times n, K)$ die Menge der quadratischen Matrizen. Das Matrixprodukt ist dann eine Verknüpfung in $M(n, K)$, die kompatiblel mit Addition und Multiplikation mit Skalaren ist. Dadurch wird $M(n, K)$ zu einer sogenannten *Algebra*. Ein weiteres wichtiges Beispiel einer Algebra ist die Menge der stetigen Funktionen auf einem metrischen Raum.

**Definition 39.7** Eine quadratische Matrix $A \in M(n, K)$ heißt *invertierbar*, wenn es ein $A^{-1} \in M(n, K)$ gibt mit $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$.

**Satz 39.8** *Die Menge*

$$GL(n, K) = \{A \in M(n, K) \ : \ A \text{ ist invertierbar}\}$$

*der invertierbaren Matrizen ist eine Gruppe mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung und der Einheitsmatrix $E_n$ als neutralem Element.*

Diese Gruppe $GL(n, K)$ heißt die *allgemeine lineare Gruppe*.

*Beweis.* Da $E_n$ ein neutrales Element ist, ist nur zu zeigen, daß aus $A, B \in GL(n, K)$ auch $AB \in GL(n, K)$ folgt. Die Matrix $B^{-1}A^{-1}$ erfüllt $(B^{-1}A^{-1})AB = E_n$ unter Verwendung des Assoziativgesetzes. Aus den allgemeinen Gruppeneigenschaften folgt, daß das neutrale Element und das zu $A$ inverse Element eindeutig sind. □

**Satz 39.9**

i) *$A \in M(n, K)$ ist genau dann invertierbar, wenn* $\operatorname{rang}(A) = n$.

ii) *Für $A \in GL(n, K)$ gilt $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

*Beweis.* i) Ist $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(F) = n$, dann ist $F$ surjektiv nach Satz 37.3.ii) und dann bijektiv nach Satz 37.7.

ii) Wir haben $(A^{-1})^t A^t = (AA^{-1})^t = E_n^t = E_n$, so daß $(A^{-1})^t$ das Inverse zu $A^t$ ist. □

# 40 Zur Theorie linearer Gleichungssysteme

**Definition 40.1** Eine Teilmenge $X \subseteq V$ eines $K$-Vektorraums $V$ heißt *affiner Unterraum*, falls es ein $v \in V$ und einen Untervektorraum $W \subseteq V$ gibt, so daß

$$X = v + W := \{x \in V \ : \ \text{es gibt ein } w \in W \text{ mit } x = v + w\} \ .$$

**Beispiel 40.2** Ist $V = \mathbb{R}^2$ die reelle Zahlenebene, dann sind die eindimensionalen Untervektorräume $W \subseteq V$ die Geraden durch den Nullpunkt. Ein aus der Geraden $W$ durch 0 hervorgehender affiner Unterraum $X = v + W$ ist dann die Parallele zu $W$ durch $v$. ◁

**Satz 40.3** *Ist $X = v + W$ ein affiner Unterraum von $V$, dann gilt*

i) *Für beliebiges $v' \in X$ ist $X = v' + W$.*

ii) *Ist $v' \in V$ und $W' \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $v' + W' = v + W$, so folgt $W = W'$ und $v' - v \in W$.*

*Beweis.* i) Wegen $v' \in X$ gibt es ein $w' \in W$ mit $v' = v + w'$. Sei $x = v + w \in X$ ein beliebiges Element, so schreibt sich $x = v' + w - w'$. Also ist $X \subseteq v' + W$. Durch Vertauschen von $v, v'$ folgt $v' + W = X$.

ii) Seien $x, x' \in X = v + W$, dann ist $x - x' \in W$. Gäbe es eine zweite Darstellung $X = v' + W'$, dann ist $x - x' \in W'$ für alle $x, x'$, also $W = W'$. Dann folgt $v' - v \in W$. □

Da also in einem affinen Unterraum $X = v + W$ der Untervektorraum eindeutig ist, definieren wir die Dimension $\dim(X) := \dim(W)$ wenn $X = v + W$.

Wir untersuchen den *Lösungsraum*

$$\operatorname{Lös}(A, b) := \{x \in K^n \ : \ Ax = b\}$$

eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ zu gegebener Matrix $A \in M(m \times n, K)$ und gegebenem Vektor $b \in K^m$. Ist $F : K^n \to K^m$ die durch $A \in M(m \times n, K)$ definierte lineare Abbildung, $F(x) = A \cdot x$, so ist $\operatorname{Lös}(A, b) = F^{-1}(b)$ und insbesondere $\operatorname{Lös}(A, 0) = F^{-1}(0) = \ker(F)$. Damit gilt stets $0 \in \operatorname{Lös}(A, 0)$, und diese Lösung heißt die *triviale Lösung* des homogenen Systems. Geht die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ durch elementare Zeilenumformungen in eine erweiterte Koeffizientenmatrix $(\tilde{A}|\tilde{b})$ über, dann gilt $\operatorname{Lös}(A, b) = \operatorname{Lös}(\tilde{A}, \tilde{b})$ nach Satz 6.2.

**Satz 40.4** *Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ aus $m$ Gleichungen mit $n$ Unbekannten. Ist $\operatorname{rang}(A) = r$, dann gilt für die Lösungsräume:*

i) $\mathrm{Lös}(A,0) \subseteq K^n$ *ist ein Untervektorraum der Dimension* $n-r$.

ii) $\mathrm{Lös}(A,b) \subseteq K^n$ *ist entweder leer oder ein affiner Raum der Dimension* $n-r$. *Ist* $v \in \mathrm{Lös}(A,b)$ *eine beliebige Lösung, dann gilt* $\mathrm{Lös}(A,b) = v + \mathrm{Lös}(A,0)$.

*Beweis.* i) Sei $F : K^n \to K^m$ die durch $F(x) = A \cdot x$ definierte lineare Abbildung. Nach Satz 37.3 ist $\mathrm{Lös}(A,0) = \ker(F)$ ein Untervektorraum. Nach Satz 37.5 ist seine Dimension $\dim(\ker(F)) = \dim(K^n) - \dim(\mathrm{im}(F)) = n-r$ wegen $\mathrm{rang}(A) := \dim(\mathrm{im}(F))$.

ii) Seien $v, v' \in \mathrm{Lös}(A,b)$ zwei Lösungen des linearen Gleichungssystems, also $Av = b$ und $Av' = b$. Dann ist $A(v-v') = 0$, also $v - v' \in \mathrm{Lös}(A,0)$. □

Der Satz besagt, daß man eine allgemeine Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems erhält, indem man zu einer *speziellen* Lösung des inhomogonen Systems die *allgemeine* Lösung des homogenen Systems addiert. Sei also $(w_{r+1}, \ldots, w_n)$ eine Basis von $\mathrm{Lös}(A,0)$ (wenn $r < n$) und $v \in \mathrm{Lös}(A,b)$ eine beliebige spezielle Lösung des inhomogenen Systems, so ist

$$\mathrm{Lös}(A,b) = v + Kw_{r+1} + \cdots + Kw_n \qquad \text{mit } Kw := \mathrm{span}_K(w)\ .$$

**Satz 40.5** *Der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems* $Ax = b$ *ist genau dann nicht leer, wenn* $\mathrm{rang}(A,b) = \mathrm{rang}(A)$.

*Beweis.* Die Matrizen $A \in M(m \times n, K)$ und $(A,b) \in M(m \times (n+1), K)$ beschreiben lineare Abbildungen $A : K^n \to K^m$ bzw. $A' : K^{n+1} \to K^m$ mit $A(e_j) = A'(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i$ für $1 \le j \le n$ und $A'(e_{n+1}) = b$. Damit ist $\mathrm{im}(A) \subseteq \mathrm{im}(A')$, also $\mathrm{rang}(A) \le \mathrm{rang}(A')$, sowie $b \in \mathrm{im}(A')$. Ist nun $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A')$, dann ist $\mathrm{im}(A) = \mathrm{im}(A')$ und damit $b \in \mathrm{im}(A)$, das Gleichungssystem ist also lösbar.

Ist $\mathrm{rang}(A) < \mathrm{rang}(A')$, dann muß es Vektoren $v \in \mathrm{im}(A')$ geben, die nicht in $\mathrm{im}(A)$ liegen. Da $\mathrm{span}(A'(e_j))_{j=1,\ldots,n} \subseteq \mathrm{im}(A)$, bleiben nur die $b$ enthaltenden Linearkombinationen, welche nicht in $\mathrm{im}(A)$ liegen. Das bedeutet $b \notin \mathrm{im}(A)$. □

Insbesondere ist der Lösungsraum $\mathrm{Lös}(A,b)$ für $A \in M(m \times n, K)$ nichtleer, wenn $\mathrm{rang}(A) = m$, da dann die durch $A$ beschriebene lineare Abbildung surjektiv ist. Das bedeutet, daß $Ax = b$ für jedes $b \in K^m$ lösbar ist. In diesem Fall heißt das lineare Gleichungssystem *universell lösbar*. Ist $\mathrm{rang}(A) < m$, so gibt es nicht für alle $b \in K^m$ eine Lösung. Es ist nur für jene $b \in K^m$ lösbar, für die die $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A,b)$ gilt.

Wir sagen, das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist *eindeutig lösbar*, wenn $\mathrm{Lös}(A,b)$ nur aus einem Element besteht.

**Satz 40.6** *Das lineare Gleichungssystem* $Ax = b$ *für* $A \in M(m \times n, K)$ *und* $b \in K^m$ *ist genau dann eindeutig lösbar, wenn* $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A,b) = n$.

*Beweis.* Nach Satz 40.5 gibt es eine Lösung, und nach Satz 40.4 ist diese eindeutig. □

**Satz 40.7** *Die Definitionen 38.7 und 6.9 für den Rang einer Matrix $A \in M(m \times n, K)$ stimmen überein.*

*Beweis.* Es sei $\tilde{A} \in M(m \times n, K)$ eine aus $A$ durch elementare Zeilenumformungen hervorgehende Matrix. Der Lösungsraum eines LGS bleibt unverändert bei elementaren Zeilenumformungen, d.h. es gilt $\text{Lös}(A, 0) = \text{Lös}(\tilde{A}, 0)$ und damit $r := \dim(\text{im}(A)) = \dim(\text{im}(\tilde{A}))$ nach der Dimensionsformel aus Satz 37.5. Sei $\tilde{r}$ die Anzahl der Nicht-Null-Zeilen von $\tilde{A}$ und $V_{\tilde{r}} = \text{span}(e_1, \ldots, e_{\tilde{r}}) \subseteq K^m$ der durch die ersten $\tilde{r}$ Basisvektoren $e_1, \ldots, e_{\tilde{r}} \in K^m$ aufgespannte Untervektorraum. Dann gilt $\tilde{A} \cdot x \in V_{\tilde{r}}$ für beliebige $x \in K^n$. Andererseits ist nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren die Gleichung $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ für beliebige $\tilde{b} \in V_{\tilde{r}}$ lösbar, d.h. $\text{im}(\tilde{A}) = V_{\tilde{r}}$ und somit $\tilde{r} = r$. □

Ist $A \in M(n, K)$ invertierbar, dann ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ wegen $\text{rang}(A) = n$ eindeutig lösbar mit Lösung $x = A^{-1}b$ für beliebiges $b \in K^n$. Im nächsten Abschnitt werden wir eine Methode zur Bestimmung der inversen Matrix gewinnen.

## 41 Elementarmatrizen

Die elementaren Zeilenumformungen, die eine Matrix $B \in M(m \times n, K)$ (z.B. die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A, b)$, welche ein ein lineares Gleichungssystem beschreibt) in Zeilenstufenform bringen, lassen sich durch Linksmultiplikation von $B$ mit geeigneten $(m \times m)$-Matrizen beschreiben. Diese *Elementarmatrizen* sind, ausgedrückt durch Einheitsmatrix und Standardmatrixbasis nach Beispiel 8.2:

Typ I: $B \xrightarrow{\text{I}_{ik}} \tilde{B}$ ist Matrixmultiplikation $\tilde{B} = P_{ik} \cdot B$ mit

$$P_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & | & & & & | & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & | & & & & | & & & \\ - & - & - & 0 & - & - & - & 1 & - & - & - \\ & & & | & 1 & & & | & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & | & & & 1 & | & & & \\ - & - & - & 1 & - & - & - & 0 & - & - & - \\ & & & | & & & & | & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & | & & & & | & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_m - E_{ii} - E_{kk} + E_{ik} + E_{ki}$$

(Angedeutet sind die $i$-te und $k$-te Zeile und Spalte. Alle nicht bezeichneten Einträge sind 0.)

Typ II: ist Spezialfall $\lambda = 1$ von Typ IV

Typ III: $B \xrightarrow{\mathrm{III}_i} \tilde{B}$ ist Matrixmultiplikation $\tilde{B} = S_i(\lambda) \cdot B$ mit

$$S_i(\lambda) = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & | & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & | & & & \\ - & - & - & \lambda & - & - & - \\ & & & | & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & | & & & 1 \end{array}\right) = E_m + (\lambda - 1)E_{ii}$$

Typ IV: $B \xrightarrow{\mathrm{IV}_{ik}(\lambda)} \tilde{B}$ ist Matrixmultiplikation $\tilde{B} = Q_{ik}(\lambda) \cdot B$ mit

$$Q_{ik}(\lambda) = \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & & | & & & & | & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & | & & & & | & & & \\ - & - & - & 1 & - & - & - & 0 & - & - & - \\ & & & | & 1 & & & | & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & | & & & 1 & | & & & \\ - & - & - & \lambda & - & - & - & 1 & - & - & - \\ & & & | & & & & | & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & | & & & & | & & & 1 \end{array}\right) = E_m + \lambda E_{ki}$$

(Angedeutet sind die $i$-te und $k$-te Zeile und Spalte.)

Analog sind *elementare Spaltenumformungen* einer Matrix $A \in M(m \times n, K)$ gegeben durch die entsprechenden *Rechtsmultiplikationen* von $A$ mit Elementarmatrizen $P, Q, S \in M(n \times n, K)$.

Tatsächlich genügen die Matrizen $\{S_i(\lambda)\}$ und $\{Q_{ik}(1)\}$ für Typ III und II, denn Typ I eine Kombination aus mehreren Umformungen vom Typ II und III (ersteres als Spezialfall von IV):

$$P_{ik} = Q_{ik}(1)\ S_k(-1)Q_{ki}(-1)S_i(-1)Q_{ik}(1)S_i(-1)\ ,$$

denn

$$(i,k) \xrightarrow{\mathrm{III}_i(-1)} (-i,k) \xrightarrow{\mathrm{II}_{ik}} (-i,k-i) \xrightarrow{\mathrm{III}_i(-1)} (i,k-i) \xrightarrow{\mathrm{II}_{ki}} (k,k-i) \xrightarrow{\mathrm{III}_k(-1)} (k,i-k) \xrightarrow{\mathrm{II}_{ik}} (k,i)\ .$$

Für Typ IV gilt

$$Q_{ij}(\lambda) = S_i(\tfrac{1}{\lambda}) Q_{ik}(1) S_i(\lambda) \ ,$$

denn

$$(i,k) \overset{\mathrm{III}_i(\lambda)}{\longrightarrow} (\lambda i, k) \overset{\mathrm{II}_{ik}}{\longrightarrow} (\lambda i, k+\lambda i) \overset{\mathrm{III}_i(\frac{1}{\lambda})}{\longrightarrow} (i, k+\lambda i)$$

Die Elementarmatrizen sind invertierbar mit

$$P_{ik}^{-1} = P_{ik} \ , \qquad (Q_{ik}(\lambda))^{-1} = Q_{ik}(-\lambda) \ , \qquad (S_i(\lambda))^{-1} = S_i(\tfrac{1}{\lambda}) \ .$$

Eine wichtige Anwendung der Elementarmatrizen ist der folgende Satz:

**Satz 41.1** *Jede invertierbare Matrix $A \in GL(n,K)$ ist ein endliches Produkt von Elementarmatrizen.*

*Beweis.* Da $\mathrm{rang}(A) = n$, führen elementare Zeilenumformungen mit Typ I und IV erst zu einer Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen $d_{ii} \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq n$, nach weiterer Umformung mit Typ IV dann zu einer Diagonalmatrix mit gleichen Diagonalelementen $d_{ii} \neq 0$, und schließlich mit Typ III zur Einheitsmatrix. Damit gilt $B_r \cdots B_2 \cdot B_1 \cdot A = E_n$, wobei jedes $B_s$ eine Elementarmatrix $Q_{ik}(\lambda)$ oder $S_i(\lambda)$ ist. Folglich gilt $A = B_1^{-1} \cdot B_2^{-1} \cdots B_r^{-1}$ und $A^{-1} = B_r \cdots B_2 \cdot B_1$. □

Eine nützliche Anwendung dieses Beweises besteht in einer effizienten Berechnungsmethode für die *inverse Matrix*. Durch Vergleich von $B_r \cdots B_2 \cdot B_1 \cdot A = E_n$ mit $A^{-1} = B_r \cdots B_2 \cdot B_1 \cdot E_n$ lesen wir ab:

**Satz 41.2** *Dieselben Zeilenumformungen, welche eine invertierbare Matrix $A \in GL(n,K)$ in $E_n$ überführen, überführen $E_n$ in $A^{-1}$.* □

**Beispiel 41.3**

$$\left(\begin{array}{cc||cc} 9 & 4 & 1 & 0 \\ 11 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{Q_{12}(-\frac{11}{9})}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc||cc} 9 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{11}{9} & 1 \end{array}\right) \overset{Q_{21}(-36)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc||cc} 9 & 0 & 45 & -36 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{11}{9} & 1 \end{array}\right)$$
$$\overset{S_1(\frac{1}{9})S_2(9)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc||cc} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -11 & 9 \end{array}\right)$$

Folglich ist $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -11 & 9 \end{pmatrix}$, was durch Ausmultiplizieren leicht zu überprüfen ist. ◁

Ein anderer Weg, diese Rechnung zu verstehen, interpretiert $A \cdot A^{-1} = E_n$ als $n$ lineare Gleichungssysteme $A \cdot x^{(p)} = b^{(p)}$. Dabei sind die $x^{(p)}$ bzw. $b^{(p)}$ mit $1 \leq p \leq n$ gerade die $n$ Spalten von $A^{-1}$ bzw. $E_n$. Anstatt nun die Berechnung von $x^{(p)}$ durch Zeilenumformung jeder dieser erweiterten Koeffizientenmatrizen $(A, b^{(p)})$ separat durchzuführen, schreiben wir alle Spalten $b^{(p)}$ nebeneinander und

formen die entstehende Matrix $(A, E_n)$ gleichzeitig um. (Es ist stets dieselbe Rechnung, die $A$ in $E_n$ überführt, unabhängig von $b$).

Man muß zunächst nicht wissen, ob $A$ invertierbar ist, um dieses Verfahren durchzuführen. Wir können sogar nichtquadratische Matrizen $A \in M(m \times n, K)$ zulassen. Sei also $\operatorname{rang}(A) = r$, dann führen die Zeilenumformungen zu $(m-r)$ Zeilen, in denen sämtliche Einträge gleich 0 sind. Wir erreichen dann bestenfalls die Blockdarstellung

$$(A, E_m) \mapsto \left( \begin{array}{c||c} D_{r\times n} & L_{r\times m} \\ 0_{(m-r)\times n} & M_{(m-r)\times m} \end{array} \right) ,$$

wobei die Größe der Matrizen entsprechend $D_{r\times n} \in M(r \times n, K)$ usw. gekennszeichnet ist. Nach Konstruktion als Matrix in spezieller Zeilenstufenform sind $r$ der $n \geq r$ *Spalten* von $D_{r\times n}$ die paarweise verschiedenen Standardbasisvektoren $e_1, \ldots, e_r \in K^r$.

Es gibt also Elementarmatrizen $B_1, \ldots, B_p \in GL(m, K)$ mit $B_p \cdots B_1 \cdot A = \begin{pmatrix} D_{r\times n} \\ 0_{(m-r)\times n} \end{pmatrix}$ und $B_p \cdots B_1 \cdot E_m = \begin{pmatrix} L_{r\times m} \\ M_{(m-r)\times m} \end{pmatrix} =: L^{-1}$. Durch Transposition entsteht die Matrix $\begin{pmatrix} D_{r\times n} \\ 0_{(m-r)\times n} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} D_{r\times n}^t & 0_{n\times(m-r)} \end{pmatrix} \in M(n \times m, K)$, wobei nun $r$ der $n \geq r$ *Zeilen* von $D_{r\times n}^t =: \tilde{D}_{n\times r}$ die transponierten Standardbasisvektoren $e_1^t, \ldots, e_r^t \in K^r$ sind. Elementare Zeilenumformungen überführen diese Matrix in $\begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)} \end{pmatrix} \in M(n \times m, K)$. Es gibt also Elementarmatrizen $C_1, \ldots, C_q \in GL(n, K)$ mit

$$C_q \cdots C_2 \cdot C_1 \cdot \begin{pmatrix} D_{r\times n} \\ 0_{(m-r)\times n} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit nach Rücktransposition

$$\begin{pmatrix} D_{r\times n} \\ 0_{(m-r)\times n} \end{pmatrix} \cdot (C_q \cdots C_2 \cdot C_1)^t = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Das Produkt dieser Elementarmatrizen $\tilde{R} = C_q \cdots C_2 \cdot C_1$ erhalten wir wieder durch die korrespondierende Zeilenumformung der Einheitsmatrix:

$$\left( \begin{array}{cc||c} \tilde{D}_{n\times r} & 0_{n\times(m-r)} & E_n \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{cc||c} E_r & 0 & \tilde{R} \\ 0 & 0 & \end{array} \right) .$$

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

**Satz 41.4** *Zu jeder Matrix $A \in M(m \times n, K)$ mit $\operatorname{rang}(A) = r$ gibt es invertierbare Matrizen $L \in GL(m, K)$ und $R \in GL(n, K)$, so daß $A = L \cdot \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot R^{-1}$. (Dabei ist $R = \tilde{R}^t$.)*

**Beispiel 41.5**

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{Q_{12}(-4)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 \end{array}\right)$$
$$\overset{Q_{21}(\frac{2}{3})}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 \end{array}\right) \overset{S_2(-\frac{1}{3})}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) .$$

Damit ist $L^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Die übliche Rechnung für das Inverse liefert $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Nach Transposition berechnen wir

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{Q_{13}(1)\,Q_{23}(-2)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) ,$$

also $\tilde{R}^t = R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Diese Matrix ist nun leicht zu invertieren: $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Folglich gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \qquad \triangleleft$$

Man kann Satz 41.4 auch abstrakt verstehen: Die Matrix $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$ entspricht einer linearen Abbildung $F : K^n \to K^m$ mit $F(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot e_i$. Ist $\operatorname{rang}(F) = \operatorname{rang}(A) = r$, dann existieren nach Satz 38.11 Basen $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ von $K^n$ und $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ von $K^m$, so daß $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A} = (\tilde{a}_{kl})$. Die mit $L$ und $R$ bewirkte Umrechnung von $A$ in $\tilde{A}$ ist ein Beispiel für eine *Koordinatentransformation*.

**Satz 41.6** *Für $A \in M(m \times n, K)$ ist* $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^t)$.

*Beweis.* Sei $\operatorname{rang}(A) = r$. Nach Satz 38.11 gibt es angepaßte Basen $\mathcal{A}$ in $K^n$ und $\mathcal{B}$ in $K^m$, so daß $A = L \cdot \begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix} \cdot R^{-1}$ für invertierbare Matrizen $L \in GL(m, K)$ und $R \in GL(n, K)$. Dann ist $A^t = (R^{-1})^t \cdot B_r \cdot L^t$ mit $B_r := \begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)} \end{pmatrix}$. Mit $R$ ist auch $R^t$ invertierbar, also ist $(R^{-1})^t : K^n \to K^n$ ein Isomorphismus. Somit gilt $\dim(\operatorname{im}(A^t)) = \dim(\operatorname{im}(B_r \cdot L^t) \leq r$. Durch Umkehrung von $A \mapsto A^t$ (oder Verwendung der Surjektivität von $L^t$) folgt die Behauptung. $\square$

## 42 Kommutative Diagramme und Basiswechsel

Koordinatentransformationen werden hervorgerufen durch einen Basiswechsel in einem Vektorraum. Sind in einem Vektorraum $V$ zwei Basen $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\tilde{\mathcal{A}} = (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)$ gegeben, so existieren nach Satz 38.3 Isomorphismen $\Phi_{\mathcal{A}} : K^n \to V$ und $\Phi_{\tilde{\mathcal{A}}} : K^n \to V$ mit $\Phi_{\mathcal{A}}(e_i) = v_i$ und $\Phi_{\tilde{\mathcal{A}}}(e_i) = \tilde{v}_i$. Die identitische Abbildung auf $V$ induziert dann einen Isomorphismus $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}^{\tilde{\mathcal{A}}} := \Phi_{\tilde{\mathcal{A}}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}} : K^n \to K^n$, den man am besten als *kommutatives Diagramm* schreibt:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{A}}} & V \\ {\scriptstyle T_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\mathcal{A}} = \Phi_{\tilde{\mathcal{A}}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle id_V} \\ K^n & \xrightarrow[\Phi_{\tilde{\mathcal{A}}}]{} & V \end{array} \qquad bzw. \qquad \begin{array}{ccc} & K^n & \\ & \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow^{\Phi_{\mathcal{A}}} & \\ {\scriptstyle T_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\mathcal{A}} = \Phi_{\tilde{\mathcal{A}}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}}} & & V \\ & \searrow \quad \downarrow \quad \nearrow_{\Phi_{\tilde{\mathcal{A}}}} & \\ & K^n & \end{array}$$

Dabei bedeutet Kommutativität, daß die Komposition der Abbildungen unabhängig vom Weg ist.

Die darstellende Matrix der identischen Abbildung ist somit $T_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\mathcal{A}} = (T_{ij}) = \mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\mathcal{A}}(id_V)$ mit $id_V(v_j) = v_j = \sum_{i=1}^n T_{ij}\tilde{v}_i$. Sei $v = \sum_{j=1}^n x_j v_j = \sum_{i=1}^n y_i \tilde{v}_i \in V$, dann gilt

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j = \sum_{i,j=1}^{n} T_{ij} x_j \tilde{v}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \tilde{v}_i \qquad \Rightarrow \quad y = T_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\mathcal{A}} \cdot x \ .$$

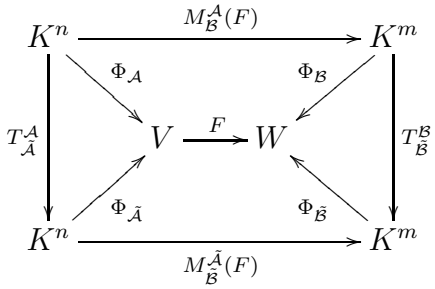
Kennt man also die *Transformationsmatrix* $T_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\mathcal{A}}$, so kann man die neuen Koordinaten $y$ von $v \in V$ bezüglich der Basis $\tilde{\mathcal{A}}$ aus den alten Koordinaten $x$ bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ berechnen. Besonders wichtig ist der Fall $V = K^n$. Dann sind $\Phi_{\mathcal{A}} =: A \in M(n \times n, K)$ und $\Phi_{\tilde{\mathcal{A}}} = \tilde{A} \in M(n \times n, K)$ selbst Matrizen, gegeben durch die jeweiligen Basisvektoren als Spalten. In diesem Fall ist nach Definition des Matrixprodukts $T_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\mathcal{A}} = \tilde{A}^{-1} \cdot A$. An Stelle der Lösung eines linearen Gleichungssystems tritt nun die einfachere Aufgabe der Berechnung einer inversen Matrix.

Allgemein läßt sich die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $F : V \to W$ bezüglich Basen $\mathcal{A}$ von $V$ und $\mathcal{B}$ von $W$ als kommutatives Diagramm auffassen:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{A}}} & V \\ {\scriptstyle M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ F \circ \Phi_{\mathcal{A}}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle F} \\ K^m & \xrightarrow[\Phi_{\mathcal{B}}]{} & W \end{array}$$

Durch Kombination mit dem Basiswechsel erhalten wir:

**Satz 42.1 (Transformationsformel)** *Es sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung sowie $\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{A}}$ Basen von $V$ und $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ Basen von $W$, mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ:*




*Insbesondere gilt $M_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\tilde{\mathcal{A}}}(F) = T_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) \cdot (T_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\mathcal{A}})^{-1}$.*

*Beweis.* Alle Dreiecke und Teilvierecke sind kommuativ, also auch das gesamte Diagramm. □

Insbesondere läßt sich die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $F : K^n \to K^m$ bezüglich anderer als der Standardbasen sehr leicht berechnen. Wir betrachten erneut Beispiel 38.9:

**Beispiel 42.2** Wir betrachten die durch $F((x, y, z)) = (x - y, 2x + y - z)$ definierte lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basen $\tilde{\mathcal{A}} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{R}^3$ und $\tilde{\mathcal{B}} = (w_1, w_2)$ von $\mathbb{R}^2$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich der Standardbasen ist $M_n^m(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (Bilder der Basisvektoren als Spalten). Die Transformationsmatrizen sind nach Satz 38.3 und wegen $\Phi_{\mathcal{A}} = id$ und $\Phi_{\mathcal{B}} = id$ gegeben als

$$\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\mathcal{A}} = \Phi_{\tilde{\mathcal{A}}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

und

$$\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}} = \Phi_{\tilde{\mathcal{B}}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Somit gilt

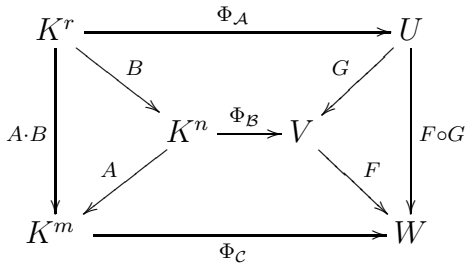
$$M_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\tilde{\mathcal{A}}}(F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

in Übereinstimmung mit der ersten Rechnung. ◁

Schließlich können wir den Zusammenhang zwischen Matrixprodukt und Komposition linearer Abbildungen für beliebige endlich-dimensionale Vektorräume formulieren:

**Satz 42.3** *Gegeben seien Vektorräume $U, V, W$ mit Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sowie lineare Abbildungen $G : U \to V$ und $F : V \to W$. Dann gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(F \circ G) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(G)$.*

*Beweis.* Wir betrachten das folgende Diagramm:




mit $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \Phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ F \circ \Phi_{\mathcal{B}} : K^n \to K^m$ und $B = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(G) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ G \circ \Phi_{\mathcal{A}} : K^r \to K^n$. Alle Teildiagramme sind kommutativ, damit auch das äußere Viereck. □

# 43 Orthonormalsysteme

**Definition 43.1** Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum.

i) Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen *orthogonal (bezüglich des Skalarprodukts)*, geschrieben $v \perp w$, wenn $\langle v, w \rangle = 0$.

ii) Ist $A \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge, dann heißt

$$A^{\perp} := \{v \in V \ :\ v \perp a \ \forall a \in A\}$$

das *orthogonale Komplement* von $A$ in $V$.

**Lemma 43.2** *$A^{\perp}$ ist (topologisch) abgeschlossener Untervektorraum von $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Ist $U \subseteq V$ Untervektorraum, so gilt $U \cap U^{\perp} = \{0\}$.*

*Beweis.* Linearkombinationen von $v, w \in A^{\perp}$ liegen wieder in $A^{\perp}$. Für festes $a \in A$ ist die Abbildung $f_a : V \to \mathbb{K}$ definiert durch $f_a(v) := \langle a, v \rangle$ stetig: Nach Cauchy-Schwarz gilt $|f_a(v) - f_a(w)| = |\langle a, v - w \rangle| \leq \|a\| \|v - w\|$, d.h. $f_a$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten $\|a\|$. Als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung ist $a^{\perp} = f_a^{-1}(0)$ abgeschlossen, und der Durchschnitt $A^{\perp} = \bigcap_{a \in A} f_a^{-1}(0)$ beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Für $u \in U \cap U^{\perp}$ gilt $\langle u, u \rangle = 0$ und damit $u = 0$. □

**Definition 43.3** Sei $(V, \langle\ ,\rangle)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Eine Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt

i) *orthogonal* oder *Orthogonalsystem*, wenn $v_i \perp v_j$ für alle $i \neq j$,

ii) *orthonormal* oder *Orthonormalsystem* (ONS), falls zusätzlich $\|v_i\| = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$,

iii) *Orthonormalbasis* (ONB), falls $(v_1, \ldots, v_n)$ außerdem eine Basis von $V$ ist[1].

Für Orthogonalsysteme gilt:

i) Ist in einer orthogonalen Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ der Nullvektor nicht enthalten, $v_i \neq 0$, so ist $(\frac{1}{\|v_1\|}v_1, \ldots, \frac{1}{\|v_n\|}v_n)$ eine orthonormale Familie.

ii) Ist in einer orthogonalen Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ der Nullvektor nicht enthalten, $v_i \neq 0$, dann ist $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig: Sei $0 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, dann ergibt das Skalarprodukt mit sich selbst

$$0 = |\lambda_1|^2\|v_1\|^2 + \ldots |\lambda_n|^2\|v_n\|^2 \qquad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0\ .$$

**Satz 43.4 (Pythagoras)** *Für ein ONS $(v_1, \ldots, v_n)$ gilt* $\Big\| \sum_{i=1}^{n} v_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$.

*Beweis.* $\Big\| \sum_{i=1}^{n} v_i \Big\|^2 = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{n} v_j \Big\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, v_i\rangle.$ □

**Satz 43.5** *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $v \in V$. Dann gibt es höchstens einen Vektor $P_U(v) \in U$ mit $v - P_U(v) \in U^\perp$. Falls existent, so heißt $P_U(v)$ die orthogonale Projektion von $v$ auf $U$.*

*Beweis.* Seien $u_1, u_2 \in U$ mit $v - u_1 \in U^\perp$ und $v - u_2 \in U^\perp$. Dann ist

$$\underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{(v - u_2) - (v - u_1)}_{\in U^\perp} \in U \cap U^\perp \quad \Rightarrow \quad u_1 - u_2 = 0\ . \qquad \square$$

**Satz 43.6** *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum und $(v_1, \ldots, v_n)$ ein Orthonormalsystem. Sei $U := \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) \subseteq V$. Dann gilt:*

i) $P_U(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, v\rangle v_i$ *für alle $v \in V$.*

ii) $\|P_U(v)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle v_i, v\rangle|^2 \leq \|v\|^2$ *für alle $v \in V$*
*(Besselsche Ungleichung)*

[1] Orthonormalbasen gibt es auch in unendlich-dimensionalen euklidischen/unitären Vektorräumen. Die allgemeine Definition erfordert weitere Hilfsmittel aus der Analysis. Wir werden im nächsten Abschnitt mit den Fourierreihen einen wichtigen Fall behandeln.

iii) *Ist* $v \in V$*, so gilt* $\|v - P_U(v)\| < \|v - u\|$ *für alle* $u \in U$ *mit* $u \neq P_U(v)$.

iv) $0 \leq \|v - P_U(v)\|^2 = \|v\|^2 - \|P_U(v)\|^2 \leq \|v\|^2$.

*Beweis.* i) Wir zeigen: $v - P_U(v) \in U^\perp$. Nach Satz 43.5 ist $P_U(v)$ dann eindeutig. Auf Grund der Linearität genügt es zu zeigen: $\langle v - P_U(v), v_j \rangle = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}\langle v_j, v - P_U(v)\rangle = \Big\langle v_j, v - \sum_{i=1}^n \langle v_i, v\rangle v_i \Big\rangle &= \langle v_j, v\rangle - \sum_{i=1}^n \langle v_i, v\rangle \langle v_j, v_i\rangle \\ &= \langle v_j, v\rangle - \langle v_j, v\rangle = 0\,.\end{aligned}$$

ii) und iv) Es gilt $v - P_U(v) \perp P_U(v)$ und damit nach Pythagoras

$$\|v\|^2 = \|(v - P_U(v)) + P_U(v)\|^2 = \|v - P_U(v)\|^2 + \|P_U(v)\|^2 \geq \|P_U(v)\|^2\,.$$

Andererseits folgt $\|v - P_U(v)\|^2 = \|v\|^2 - \|P_U(v)\|^2 \leq \|v\|^2$.

iii) Wegen $u \neq P_U(v)$ ist $\|P_U(v) - u\|^2 > 0$ und deshalb nach Pythagoras

$$\begin{aligned}\|v - u\|^2 = \|\underbrace{v - P_U(v)}_{\in U^\perp} + \underbrace{P_U(v) - u}_{\in U}\|^2 &= \|v - P_U(v)\|^2 + \|P_U(v) - u\|^2 \\ &> \|v - P_U(v)\|^2\,.\end{aligned}$$

□

Eigenschaft iii) aus Satz 43.6 hat folgende interessante Folgerung: Es sei $\varnothing \neq W \subseteq V$ eine Teilmenge. Definieren wir durch $d(v, W) := \inf_{w \in W} \|v - w\|$ den *Abstand* von $v$ zu $W$, so gilt mit obigen Bezeichnungen $d(v, U) = \|v - P_U(v)\|$. Unter Verwendung der Parallelogrammgleichung und der Vollständigkeit läßt sich in *Hilbert-Räumen* $V$ allgemein beweisen, daß für *abgeschlossene* Untervektorräume $U \subseteq V$ der Vektor $P_U(v)$ stets existiert und $d(v, U) = \|v - P_U(v)\|$ erfüllt.

Der folgende Satz hebt die Bedeutung der Orthonormalbasen hervor:

**Satz 43.7 (Fourier-Entwicklung)** *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *euklidischer oder unitärer Vektorraum und* $(v_1, \ldots, v_n)$ *ein Orthonormalsystem von* $V$*. Dann sind äquivalent:*

i) $(v_1, \ldots, v_n)$ *ist Orthonormalbasis.*

ii) *Für alle* $v \in V$ *gilt* $v = \sum_{i=1}^n \langle v_i, v\rangle v_i$ *(Fourier-Entwicklung)*

iii) *Für alle* $v, w \in V$ *gilt* $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i\rangle \langle v_i, w\rangle$ *(Parsevalsche Gleichung)*

iv) *Für alle* $v \in V$ *gilt* $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v_i, v\rangle|^2$

v) *Ist* $v \in V$ *mit* $\langle v_i, v\rangle = 0$ *für alle* $i = 1, \ldots, n$*, so gilt* $v = 0$.

*Beweis.* i)⇒ii) Insbesondere ist $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis, also gilt $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ mit eindeutig bestimmten $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Dann ist $\langle v_j, v\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_j, v_i\rangle = \lambda_j$.

ii)⇒iii)

$$\langle v, w\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^n \langle v_i, v\rangle v_i, \sum_{j=1}^n \langle v_i, w\rangle v_i \Big\rangle = \sum_{i,j=1}^n \overline{\langle v_i, v\rangle}\langle v_i, w\rangle\langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i\rangle\langle v_i, w\rangle.$$

iii)⇒iv) Setze $w = v$.

iv)⇒v) Sei $\langle v_i, v\rangle = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$, so folgt $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v_i, v\rangle| = 0$, also $v = 0$.

v)⇒i) Sei $U := \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$. Zu zeigen ist $V = U$. Angenommen, es gäbe ein $w \in V$ mit $w \notin U$. Also ist $w - P_U(w) \neq 0$. Wegen $w - P_U(w) \in U^\perp$ gilt $\langle w - P_U(w), v_j\rangle = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und somit $w - P_U(w) = 0$ nach v), Widerspruch. □

In sogenannten *separablen unendlich-dimensionalen Hilbert-Räumen* gibt es Folgen $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die ein ONS bilden und die Eigenschaften ii)–v) haben, wenn die endlichen Summen durch Reihen ersetzt werden. Dementsprechend nennt man solche Folgen $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine ONB (jetzt im unendlich-dimensionalen Hilbert-Raum). Im nächsten Abschnitt betrachten wir ein wichtiges Beispiel.

**Satz 43.8 (Orthonormalisierungssatz)** *Sei $V$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum mit Orthonormalbasis $(w_1, \ldots, w_m)$. Dann gibt es eine Ergänzung zu einer Orthonormalbasis $(w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}, \ldots, w_n)$ von $V$.*

*Insbesondere besitzt jeder endlich-dimensionale euklidische oder unitäre Vektorraum eine Orthonormalbasis.*

*Beweis (Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren).* Für $W = V$ ist alles klar. Andernfalls gibt es einen Vektor $v \in V$ mit $v \notin W$. Seine Projektion auf $W$ ist

$$P_W(v) = \langle w_1, v\rangle w_1 + \cdots + \langle w_m, v\rangle w_m \,.$$

Damit ist $v - P_W(v) \in W^\perp$ und $v - P_W(v) \neq 0$ (sonst wäre $v \in W$). Setze $w_{m+1} := \frac{1}{\|v - P_W(v)\|}(v - P_W(v))$, dann ist die Familie $(w_1, \ldots, w_m, w_{m+1})$ orthonormal, und $W' := \operatorname{span}(w_1, \ldots, w_m, w_{m+1})$ ist $(m+1)$-dimensionaler Untervektorraum von $V$ mit Orthonormalbasis $(w_1, \ldots, w_{m+1})$. Durch Wiederholung des Verfahrens erhält man eine Orthonormalbasis von $V$. □

**Beispiel 43.9** Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U \subseteq V$ die von den Vektoren $u_1 = (2, 1, 2)$ und $u_2 = (1, 1, 3)$ aufgespannte Ebene. Gesucht ist die Projektion des Vektors $v = (1, 4, 9)$ auf $U$ und der Abstand von $v$ zu $U$.

Zunächst wird durch das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren das System $(u_1, u_2)$ in ein Orthonormalsystem überführt. Dazu ist $w_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|} =$

$\frac{1}{3}(2,1,2)$ und dann $P_{\mathbb{R}w_1}(u_2) = \langle w_1, u_2\rangle w_1 = \frac{1}{9}(2+1+6)\cdot(2,1,2) = (2,1,2)$. Es folgt $u_2 - P_{\mathbb{R}w_1}(u_2) = (-1,0,1)$ und damit $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$. Somit gilt

$$\begin{aligned} P_U(v) &= \langle w_1, v\rangle w_1 + \langle w_2, v\rangle w_2 \\ &= \tfrac{1}{9}(2+4+18)\cdot(2,1,2) + \tfrac{1}{2}(-1+0+9)\cdot(-1,0,1) \\ &= \big(\tfrac{16}{3}, \tfrac{8}{3}, \tfrac{16}{3}\big) + (-4,0,4) = \big(\tfrac{4}{3}, \tfrac{8}{3}, \tfrac{28}{3}\big)\ . \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$v - P_U(v) = (1,4,9) - \big(\tfrac{4}{3}, \tfrac{8}{3}, \tfrac{28}{3}\big) = \big(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{4}{3}, -\tfrac{1}{3}\big)$$

und damit $d(v,U) = \|v - P_U(v)\| = \frac{1}{3}\sqrt{18} = \sqrt{2}$. ◁

In *euklidischen Vektorräumen* läßt sich der *Winkel* zwischen Vektoren $v, w \in V$ erklären als

$$\cos \measuredangle(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}\ .$$

Wegen Cauchy-Schwarz ist die rechte Seite eine reelle Zahl aus $[-1,1]$. Im $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt ist das die geometrische Winkelformel. Sie überträgt sich auf allgemeine euklidischen Vektorräume, ist aber nicht sinnvoll in unitären Vektorräumen.

**Beispiel 43.10** Der Winkel zwischen den Vektoren $v = (1,4,9)$ und $P_U(v) = (\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{28}{3}) = \frac{4}{3}(1,2,7)$ aus Beispiel 43.9 berechnet sich zu

$$\cos \measuredangle\big(v, P_U(v)\big) = \frac{1+8+63}{\sqrt{(1+16+81)(1+4+49)}} = \frac{72}{\sqrt{98\cdot 54}} = \frac{12}{7\sqrt{3}}\ .$$ ◁

Schließlich können wir für endlich-dimensionale Untervektorräume das orthogonale Komplement genauer charakterisieren.

**Satz 43.11** *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein endlich-dimensionaler Untervektorraum. Dann gilt:*

i) *$V = U \oplus U^\perp$. In diesem Fall heißt $U \oplus U^\perp$ die orthogonale direkte Summe.*

ii) *Ist $P_U : V \to U$ die orthogonale Projektion auf $U$, so ist $P_{U^\perp} = \mathrm{id}_V - P_U : V \to U^\perp$ die orthogonale Projektion auf $U^\perp$.*

*Beweis.* i) Nach Satz 43.8 besitzt $U$ eine Orthonormalbasis $(w_1, \ldots, w_n)$. Nach Satz 43.6 ist dann die orthogonale Projektion eines beliebigen Vektors $v \in V$ auf $U$ gegeben durch $P_U(v) = \sum_{i=1}^n \langle w_i, v\rangle w_i$. Damit ist $v = \underbrace{v - P_U(v)}_{\in U^\perp} + \underbrace{P_U(v)}_{\in U} \in U^\perp + U$, also $V = U + U^\perp$ und $U \cap U^\perp = \{0\}$ nach Satz 43.11.

ii) folgt aus $(\mathrm{id}_V - P_U)(v) = v - P_U(V)$ und i). □

## 44 Fourier-Reihen

**Definition 44.1** Eine Funktion $f : [0,T] \to \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig* auf $[0,T]$, wenn $f$ auf $[0,T]$ beschränkt ist und es eine endliche Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$ gibt, so daß $f$ auf jedem offenen Teilintervall $]t_{i-1}, t_i[$ stetig ist.

Die Summe zweier auf $[0,T]$ stückweise stetiger Funktionen $f, g$ wird bezüglich der Vereinigung der Unterteilungen von $f$ und von $g$ definiert. Gleichheit von stückweise stetigen Funktionen $f, g \in \mathcal{C}_{sw}([0,T])$ wird erklärt als $f = g$ genau dann, wenn $(f-g)(x) \neq 0$ für höchstens endlich viele Punkte $x \in \{t_0, \ldots, t_m\}$. Insbesondere wird auf diese Weise $f = 0$ erklärt. Mit diesen Konventionen wird die Menge $\mathcal{C}_{sw}([0,T])$ der stückweise stetigen Funktionen zu einem Vektorraum. Für $f, g \in \mathcal{C}_{sw}([0,T])$ mit gemeinsamer Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$ definieren wir

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_{[0,T]} dt\ \overline{f(t)}g(t) := \lim_{\epsilon \searrow 0} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{T}\int_{t_{i-1}+\epsilon}^{t_i-\epsilon} dt\ \overline{f(t)}g(t)\ . \qquad (*)$$

Dabei ist $2\epsilon < \min_i(t_i - t_{i-1})$ zu wählen. Wegen der Stetigkeit der Funktionen auf beliebigen $[t_{i-1}+\epsilon, t_i-\epsilon]$ existiert das mehrfach uneigentliche Integral $\int_{[0,T]}$. Linearität von $\langle\ ,\ \rangle$ in der 2. Komponente und $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$ sowie $\langle f, f\rangle \geq 0$ sind klar. Gleichheit $\langle f, f\rangle = 0$ genau für $f = 0 \in \mathcal{C}_{sw}([0,T])$ folgt aus der Stetigkeit in jedem Teilintervall $[t_{i-1}+\epsilon, t_i-\epsilon]$. (Die Nullfunktion $f = 0 \in \mathcal{C}_{sw}([0,T])$ darf in $t_i$ beliebige Werte annehmen.) Somit ist $(\mathcal{C}_{sw}([0,T]), \langle\ ,\ \rangle)$ ein unendlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Er enthält insbesondere alle stetigen Funktionen und alle Treppenfunktionen. Für stetige Funktionen ist $\int_{[0,T]} = \int_0^T$, und für Treppenfunktionen ist $\int_{[0,T]} = \int_0^T$ das Integral aus Definition 28.3.

Unser Ziel ist die Charakterisierung einer (unendlichen) Orthonormalbasis in $(\mathcal{C}_{sw}([0,T]), \langle\ ,\ \rangle)$.

**Satz 44.2** *Für $n \in \mathbb{Z}$ werden durch $e_n(t) := e^{\mathrm{i}n\omega_T t}$ mit $\omega_T := \frac{2\pi}{T}$ stetige Funktionen $e_n \in \mathcal{C}([0,T]) \subseteq \mathcal{C}_{sw}([0,T])$ definiert. Dann ist $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ein unendliches Orthonormalsystem für $(\mathcal{C}_{sw}([0,T]), \langle\ ,\ \rangle)$.*

*Beweis.* Wegen der Stetigkeit der $e_k$ ist das Skalarprodukt $(*)$ durch das Riemann-Integral über $[0,T]$ gegeben:

$$\begin{aligned}\langle e_k, e_l\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T dt\ e^{\mathrm{i}(l-k)\omega_T t} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T dt\ 1 = 1 & \text{für } k = l \\ \dfrac{1}{\mathrm{i}T(l-k)\omega_T} e^{\mathrm{i}(l-k)\omega_T t}\Big|_0^T = \dfrac{\left(e^{\mathrm{i}(l-k)\cdot 2\pi} - 1\right)}{\mathrm{i}T(l-k)\omega_T} = 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}\end{aligned}$$

□

Die Verallgemeinerung der Orthonormalbasen aus Satz 43.7 auf unendlichdimensionale Vektorräume erfordert einen geeigneten Konvergenzbegriff. Für die stetigen Funktionen fassen wir zusammen:

**Definition 44.3** Eine Folge $(f_n)$ stetiger Funktionen $f_n \in \mathcal{C}([a,b])$ heißt

i) *punktweise konvergent* gegen $f$, wenn für jedes $x \in [a,b]$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$ ,

ii) *gleichmäßig konvergent* gegen $f$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$ ,

iii) *im quadratischen Mittel* konvergent, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b dx\, |f_n(x) - f(x)|^2 = 0$ .

Aus ii) folgt i) und iii), aber es gilt keine der Umkehrungen, und zwischen i) und iii) gibt es keine allgemeine Beziehung.

**Definition 44.4** Es sei $f \in \mathcal{C}_{sw}([0,T])$. Für $N \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,T]$ heißt

$$(S_N f)(x) := \sum_{k=-N}^{N} \langle e_k, f\rangle e_k(x) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{T}\Big( \int_{[0,T]} dt\; e^{-\mathrm{i}k\omega_T t} f(t)\Big) e^{\mathrm{i}k\omega_T x}$$

das $N$-*te Fourier-Polynom* von $f$. Wir sagen, die Reihe $S_N f = \sum_{k=-N}^{N} \langle e_k, f\rangle e_k$ konvergiert

i) *punktweise* gegen $f$, falls $\lim_{N\to\infty} (S_N f)(x) = f(x)$ für alle $x \in [0,T]$,

ii) *gleichmäßig* gegen $f$, falls $\lim_{N\to\infty} \|S_N f - f\|_\infty = 0$,

iii) *im quadratischen Mittel* gegen $f$, falls $\lim_{N\to\infty} \|S_N f - f\|_2 = 0$.

Jedes Fourier-Polynom $S_N f$ ist stetig, und wegen $\overline{e_k} = e_{-k}$ gilt

$$\overline{S_N f} = \overline{\sum_{k=-N}^{N} \langle e_k, f\rangle e_k} = \sum_{k=-N}^{N} \langle f, e_k\rangle e_{-k} = \sum_{k=-N}^{N} \langle e_{-k}, \overline{f}\rangle e_{-k} = S_N \bar{f}\ .$$

Insbesondere ist für reellwertige Funktionen $f$ auch $S_N f$ reellwertig.

**Satz 44.5 (Fourier-Entwicklung)** *Es seien $f, g \in \mathcal{C}_{sw}([0,T])$. Dann gilt:*

i) *Die Fourier-Reihe $Sf := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle e_n, f\rangle e_n$ von $f$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen $f$.*

ii) $\langle f, g\rangle = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n\rangle\langle e_n, g\rangle$ *(Parsevalsche Gleichung).*

iii) $\frac{1}{T}\int_{[0,T]} dt\, \|f(t)\|^2 = \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle e_n, f\rangle|^2$ .

iv) *Ist* $\langle e_k, f\rangle = 0$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$*, so folgt* $f = 0 \in \mathcal{C}_{sw}([0,T])$.

Da es sich um analoge Aussagen zu Satz 43.7 handelt, sagt man, $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ist Orthonormalbasis von $\mathcal{C}_{sw}([0,T])$.

*Beweis.* Der Hauptschritt ist der Beweis von i), den wir später führen.

i)⇒ii) Nach der Parsevalschen Gleichung Satz 43.7.iii) für den endlichdimensionalen Vektorraum $U = \mathrm{span}\{e_i \ : \ -N \le i \le N\}$ ist $\langle S_N f, S_N g\rangle = \sum_{n=-N}^{N} |\langle e_n, f\rangle|^2$. Andererseits erhalten wir mit Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}|\langle f, g\rangle - \langle S_N f, S_N g\rangle| &= |\langle f - S_N f, g\rangle + \langle S_N f, g - S_N g\rangle| \\ &\le |\langle f - S_N f, g\rangle| + |\langle S_N f, g - S_N g\rangle| \\ &\le \|f - S_N f\|_2 \, \|g\|_2 + \|S_N f\|_2 \, \|g - S_N g\|_2 \ .\end{aligned}$$

Das Quadrat stückweise stetiger Funktionen ist stückweise stetig und damit uneigentlich Riemann-integrierbar, also sind $\|g\|_2$ und $\|S_N f\|_2$ beschränkt, und nach i) gilt $\lim_{N\to\infty} \|f - S_N f\|_2 = 0$ und $\lim_{N\to\infty} \|g - S_N g\|_2 = 0$. Damit konvergiert die Summe in ii) gegen $\langle f, g\rangle$. Setzt man $g = f$, so folgt iii). Ist $\langle e_k, f\rangle = 0$, so folgt $\|f\|_2 = 0$ und damit $f = 0 \in \mathcal{C}_{sw}([0,T])$, also iv).

Verbleibt der Beweis von i). Es genügt, reellwertige stückweise stetige Funktionen $f$ (die nach Definition auch beschränkt sind) zu betrachten, für die das $N$-te Fourier-Polynom $S_N f$ ebenfalls reell ist. Da für $f = 0 \in \mathcal{C}_{sw}([0,T])$ die Aussage klar ist, können wir annehmen, daß $f \neq 0$ auf einer offenen Teilmenge von $[0,T]$ gilt. Dann ist auch $0 < \|f\|_\infty$, und durch Skalieren mit $\frac{1}{\|f\|_\infty}$ können wir uns dann auf reellwertige stückweise stetige Funktionen mit $\|f\|_\infty \le 1$ beschränken. Diese sind Riemann-integrierbar. Folglich gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen $\phi, \psi$ auf $[0,T]$ mit $-1 \le \phi \le f \le \psi \le 1$ und $\int_{[0,T]} dt(\psi - \phi)(t) < \frac{T}{2}\epsilon^2$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\|f - S_N f\|_2 &= \|(f - \phi) - S_N(f - \phi) + (\phi - S_N\phi)\|_2 \\ &\le \|(f - \phi) - S_N(f - \phi)\|_2 + \|\phi - S_N\phi\|_2 \ .\end{aligned}$$

Nach Satz 43.6.iv) und wegen $-1 \le \phi \le f \le \psi \le 1$ gilt

$$\begin{aligned}\|(f - \phi) - S_N(f - \phi)\|_2^2 &= \|f - \phi\|_2^2 - \|S_N(f - \phi)\|_2^2 \le \|f - \phi\|_2^2 \\ &= \frac{1}{T}\int_{[0,T]} dt\, |(f - \phi)(t)|^2 \le \frac{1}{T}\int_{[0,T]} dt\, |(\psi - \phi)(t)|^2 \\ &= \frac{1}{T}\int_{[0,T]} dt\, \underbrace{|(\psi + \phi)(t)|}_{\le 2}(\psi - \phi)(t) < \epsilon^2 \ ,\end{aligned}$$

also $\|(f - \phi) - S_N(f - \phi)\|_2 < \epsilon$. Das nächste Lemma liefert die Abschätzung $\|\phi - S_N\phi\|_2 < \epsilon$ für genügend großes $N$, womit die Behauptung bewiesen ist. □

**Lemma 44.6** *Es sei $\phi$ eine Treppenfunktion auf $[0,T]$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\|\phi - S_N\phi\|_2 < \epsilon$ für alle $N \geq N_0$.*

*Beweis.* Wir führen zunächst den Beweis für die Treppenfunktion $\phi = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{für } a < x \leq T \end{cases}$ mit $0 < a < T$. Dann gilt

$$\langle e_k, \phi\rangle = \frac{1}{T}\int_0^a dt\; e^{-\mathrm{i}k\omega_T t} = \begin{cases} \frac{a}{T} & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{-\mathrm{i}2\pi k}(e^{-\mathrm{i}k\omega_T a} - 1) & \text{für } k \neq 0 \end{cases}$$

und folglich

$$|\langle e_k, \phi\rangle|^2 = \begin{cases} \frac{a^2}{T^2} & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1 - \cos(k\omega_T a)) & \text{für } k \neq 0 \end{cases}$$

(Verwende $(\cos x - \mathrm{i}\sin x - 1)(\cos x + \mathrm{i}\sin x - 1) = 2 - 2\cos x$). Nach Satz 43.6.iv) gilt

$$\begin{aligned}\|\phi - S_N\phi\|_2^2 = \|\phi\|_2^2 - \|S_N\phi\|_2^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T dt\; (\phi(t))^2 - \sum_{k=-N}^{N} |\langle e_k, \phi\rangle|^2 \\ &= \frac{a}{T} - \frac{a^2}{T^2} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{\cos(k\omega_T a)}{k^2}\,.\end{aligned}$$

Nach Satz 34.8 gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2} = \Big(\frac{\pi - x}{2}\Big)^2 - \frac{\pi^2}{12} \quad \text{für alle } x \in [0, 2\pi]\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Für $x = \frac{2\pi a}{T} \in [0, 2\pi]$ ergibt sich

$$\lim_{N\to\infty}\Big(\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{\cos(k\omega_T a)}{k^2} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}\Big) = \frac{a^2}{T^2} - \frac{a}{T}\,.$$

Folglich gibt es zu jedem $\epsilon' > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|\phi - S_N\phi\|_2^2 < (\epsilon')^2$ für alle $N \geq N_0$ und beliebiges $a \in [0, T]$.

Eine beliebige Treppenfunktion läßt sich, bis auf die beim Integral unwesentlichen Werte an den Sprungstellen $0 = x_0 < x_1 \cdots < x_m = T$, darstellen als Linearkombination $\phi = \sum_{i=1}^m c_i\phi_i$, wobei $\phi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq x_i \\ 0 & \text{für } x_i < x \leq T \end{cases}$ Treppenfunktion von der obigen Form ist. Dann ist nach Dreiecksungleichung $\|\phi - S_N\phi\|_2 \leq \sum_{i=1}^m |c_i|\|\phi_i - (S_N\phi_i)\|_2 < \epsilon' \sum_{i=1}^m |c_i|$ für alle $N \geq N_0$. Dann folgt die Behauptung für die Wahl $\epsilon' = \frac{\epsilon}{1+\sum_{i=1}^m |c_i|}$. □

**Definition 44.7** Die Abbildung

$$\hat{}: \mathcal{C}_{sw}([0,T]) \to \ell^2(\mathbb{Z}) , \quad f \mapsto \hat{f} = (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \text{ mit } \hat{f}(k) := \langle e_k, f\rangle$$

heißt *Fourier-Transformation*. Dabei ist $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \ : \ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a(k)|^2 < \infty\}$ der Hilbertsche Folgenraum mit dem zugehörigen Skalarprodukt $\langle a, b\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{a(k)}b(k)$,

Nach Satz 44.5.ii) ist die Fourier-Transformation eine *Isometrie*, d.h. $\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}$.

*Bemerkungen.*

i) In Satz 44.5 wird nicht behauptet, daß stets $Sf \in \mathcal{C}_{sw}([0,T])$ gilt. Der Grund ist, daß $\mathcal{C}_{sw}([0,T])$ nicht vollständig ist. Es gibt also Folgen $(f_n)$ stückweise stetiger Funktionen, die zwar im quadratischen Mittel konvergent sind, für deren Grenzwert aber $\lim_{n\to\infty} f_n \notin \mathcal{C}_{sw}([0,T])$ gilt. Tatsächlich stellt sich heraus, daß Satz 44.5 sogar für eine deutlich größere Klasse von Funktionen gilt, nämlich für die quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktion $L^2([0,T])$, die wir im 3. Semester einführen.

ii) Da $\mathcal{C}([0,T])$ in gewisser Weise die "falsche" Klasse von Funktionen für die Fourier-Reihe ist, gibt es einige Überraschungen: Es gibt Beispiele stetiger Funktionen $f \in \mathcal{C}([0,T])$, für die die Fourierreihe $Sf := \sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle e_k, f\rangle e_k$ *nicht in jedem Punkt* $x \in [0,T]$ *konvergent ist*, und selbst wenn sie konvergiert, muß der Grenzwert nicht mit $f(x)$ übereinstimmen. Das folgt schon aus der Tatsache, daß wegen $e_k(0) = e_k(T)$ im Fall der Konvergenz stets $(Sf)(0) = (Sf)(T)$ gilt, während $f(0) \neq f(T)$ sein kann.

iii) Wir zeigen im nächsten Satz 44.9, daß für *stückweise stetig differenzierbare Funktionen* die Fourier-Reihe sogar gleichmäßig konvergiert. Man kann etwas allgemeiner folgendes zeigen: Existiert für eine Funktion $f \in \mathcal{C}([0,T])$ in $x \in [0,T]$ sowohl die linksseitige als auch die rechtsseitige Ableitung, dann konvergiert $(Sf)(x)$ gegen den arithmetischen Mittelwert $\frac{1}{2}(f(x_+)+f(x_-)) := \lim_{\epsilon\searrow 0}\frac{1}{2}(f(x+\epsilon)+f(x-\epsilon))$, mit $T_+ \mapsto 0_+$ und $0_- \mapsto T_-$.

iv) Oft definiert man die Fourier-Reihe für $T$*-periodische (stetige) Funktionen*, also (stetige) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(x+T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann kann man statt $\int_0^T$ über ein beliebiges anderes Intervall der Länge $T$ integrieren, $\int_a^{a+T}$. Insbesondere ist $f(0) = f(T)$.

v) Statt $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ kann auch das reelle Orthogonalsystem $((c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}})$ benutzt werden, mit $c_n(x) = \cos(n\omega_T x)$ und $s_n(x) = \sin(n\omega_T x)$. Zu beachten ist dann eine um einen Faktor 2 unterschiedliche Normierung von $c_0$ zu $c_n, s_n$ mit $n > 0$!

**Definition 44.8** Eine Funktion $f \in \mathcal{C}([0,T])$ heißt stückweise stetig differenzierbar, wenn es eine Unterteilung $0{=}t_0{<}\ldots{<}t_m{=}T$ gibt, so daß $f$ auf der offenen Teilmenge $[0,2\pi] \setminus \{t_0,\ldots,t_m\} = ]t_0,t_1[ \cup ]t_1,t_2[ \cup \cdots \cup ]t_{m-1},t_m[$ stetig differenzierbar ist.

**Satz 44.9** *Es sei $f$ eine auf $[0,T]$ stückweise stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = f(T)$ (d.h $f$ sei $T$-periodisch). Dann gilt*

i) $\widehat{f'}(k) = (\mathrm{i}k\omega_T)\hat{f}(k)$ *für alle $k \in \mathbb{Z}$.*

ii) $\lim\limits_{N\to\infty} \|S_N f - f\|_\infty = 0$, *d.h. $(S_N f)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f$.*

*Beweis.* i) Es gilt $f' \in \mathcal{C}_{sw}([0,T])$ und damit nach partieller Integration

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(k) &= \frac{1}{T}\int_{[0,T]} dx\; f'(x)e^{-ik\omega_T x} = \lim_{\epsilon\searrow 0}\frac{1}{T}\sum_{l=1}^{m}\int_{t_{l-1}+\epsilon}^{t_l-\epsilon} dx\; f'(x)e^{-ik\omega_T x} \\
&= \lim_{\epsilon\searrow 0}\Big(\frac{1}{T}\sum_{l=1}^{m}\Big(f(t_l-\epsilon)e^{-ik\omega_T(t_l-\epsilon)} - f(t_{l-1}+\epsilon)e^{-ik\omega_T(t_{l-1}+\epsilon)} \\
&\qquad\qquad - \int_{t_{l-1}+\epsilon}^{t_l-\epsilon} dx\; f(x)(e^{-ik\omega_T x})'\Big)\Big) \\
&= \mathrm{i}k\omega_T \lim_{\epsilon\searrow 0}\Big(\frac{1}{T}\sum_{l=1}^{m}\int_{t_{l-1}+\epsilon}^{t_l-\epsilon} dx\; f(x)\, e^{-ik\omega_T x}\Big) = ik\omega_T\hat{f}(k)\;,
\end{aligned}$$

wegen der Stetigkeit von $f$ und der $T$-Periodizität $f(t_0) = f(0) = f(T) = f(t_m)$.

ii) Nach Cauchy-Schwarz im unitären Vektorraum $\ell^2(\mathbb{N})$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\hat{f}(k)| = \sum_{k=1}^{\infty}\Big|\frac{1}{ik\omega_T}\widehat{f'}(k)\Big| \le \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\frac{1}{ik\omega_T}\Big|^2}_{=\frac{\pi^2}{6\omega_T^2}}\underbrace{\sum_{l=1}^{\infty}\big|\widehat{f'}(l)\big|^2}_{\hat{f}\in\ell^2(\mathbb{Z})} < \infty\;.$$

Analog für $\hat{f}(-k)$. Also folgt $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(k)| < \infty$, d.h. zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $N(\epsilon)$, so daß für alle $N \ge N' \ge N(\epsilon)$ gilt

$$\begin{aligned}
\big\|S_N f - S_{N'} f\big\|_\infty &:= \sup_{x\in[0,T]}\Big|\sum_{k=-N}^{N}\hat{f}(k)e^{ik\omega_T x} - \sum_{k=-N'}^{N'}\hat{f}(k)e^{ik\omega_T x}\Big| \\
&= \sup_{x\in[0,T]}\Big|\sum_{N'\le|k|\le N}\hat{f}(k)e^{ik\omega_T x}\Big| \le \sum_{N'\le|k|\le N}\big|\hat{f}(k)\big| < \epsilon\;.
\end{aligned}$$

Damit ist in jedem Punkt $x \in [0,T]$ die Folge $((S_N f)(x))_{N\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen eine Cauchy-Folge, welche *punktweise* gegen eine Grenzfunktion $(S_\infty f)(x) = \lim_{N\to\infty}(S_N f)(x))$ konvergiert. Damit kann in obiger Abschätzung $N' \to \infty$ genommen werden, so daß

$$\sup_{x\in[0,T]}\big\|S_N f - S_\infty f\big\|_\infty < \epsilon \qquad \text{für alle } N \ge N(\epsilon)\;.$$

Somit ist $(S_N f)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen, die *gleichmäßig* gegen die Grenzfunktion $S_\infty f$ konvergiert. Nach Satz 33.3 ist $S_\infty f$ dann stetig. Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt Konvergenz im quadratischen Mittel, damit konvergiert $(S_N f)_{N\in\mathbb{N}}$ auch im quadratischen Mittel gegen $S_\infty f$. Andererseits konvergiert $(S_N f)_{N\in\mathbb{N}}$ nach Satz 44.5 im quadratischen Mittel gegen $f$. Nach Dreiecksungleichung gilt dann $\|f - S_\infty f\|_2 = 0$, und da $f$ und $S_\infty f$ stetig sind, folgt $f = S_\infty f = \lim_{N\to\infty} S_N f$. □

Durch Induktion folgt $\widehat{f^{(n)}}(k) = (\mathrm{i}k\omega_T)^n \hat{f}(k)$ für eine $n$-mal stückweise stetig differenzierbare Funktion $f$, die $(n-1)$-mal stetig differenzierbar ist mit $f^{(p)}(0) = f^{(p)}(T)$ für alle $p = 0, \ldots, n-1$.

Die Fourier-Entwicklung stückweise stetig differenzierbarer Funktionen erlaubt oft die Bestimmung des Grenzwertes von Reihen.

**Beispiel 44.10** Gesucht ist die Fourier-Entwicklung der Funktion $f(x) = \cos(ax)$, für $a \notin \mathbb{Z}$, im Intervall $[-\pi, \pi]$. Wir setzen sie $(2\pi)$-periodisch auf $\mathbb{R}$ fort. Dann kann im Fourier-Integral über ein beliebiges Intervall der Länge $T = 2\pi$ integriert werden, z.B. über $[-\pi, \pi]$. Also haben wir für $a \notin \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\; e^{-\mathrm{i}kt}\cos(at) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\; (e^{-\mathrm{i}(k-a)t} + e^{-\mathrm{i}(k+a)t}) \\ &= \frac{1}{-4\pi\mathrm{i}(k-a)}(e^{-\mathrm{i}(k-a)\pi} - e^{\mathrm{i}(k-a)\pi}) + \frac{1}{-4\pi\mathrm{i}(k+a)}(e^{-\mathrm{i}(k+a)\pi} - e^{\mathrm{i}(k+a)\pi}) \\ &= \frac{1}{2\pi}(-1)^k \sin(a\pi)\Big(\frac{1}{(a-k)} + \frac{1}{a+k}\Big)\,.\end{aligned}$$

Somit gilt wegen $f(k) = f(-k)$

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} = \hat{f}(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)\cos(kx) \\ &= \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin(a\pi)}{\pi}\frac{2a}{a^2-k^2}\cos(kx)\end{aligned}$$

also

$$\cos(ax) = \frac{2a\sin(a\pi)}{\pi}\Big(\frac{1}{2a^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a^2-k^2}\cos(kx)\Big)\,.$$

Setzt man $x = \pi$, so folgt die Partialbruchzerlegung des Cotangens

$$\cot(a\pi) = \frac{1}{a\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{a-k} + \frac{1}{a+k}\Big)\,.$$

oder die Summenformel $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-a^2} = \frac{\pi}{2a}\Big(\frac{1}{a\pi} - \cot(a\pi)\Big)$ für $a \notin \mathbb{Z}$. ◁

# 45 Determinanten

Bei der Determinante handelt es sich um eine wichtige Charakterisierung quadratischer Matrizen. Die Determinante ist ein Kriterium für die Invertierbarkeit einer Matrix. Sie tritt außerdem auf beim Eigenwertproblem für Matrizen.

**Definition 45.1** Eine Abbildung

$$\det : M(n, K) \to K \ , \qquad \det : A \mapsto \det A$$

heißt *Determinante*, wenn folgendes gilt:

(D1) $\det$ ist linear in jeder Zeile, d.h. ist die $i$-te Zeile $a_i = \lambda' a_i' + \lambda'' a_i'' \in K^n$, so gilt

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda' \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i' \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda'' \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i'' \\ \vdots \end{pmatrix} \ .$$

(Die mit $\vdots$ symbolisierten Zeilen $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ sind in jeder der drei Matrizen identisch.)

Insbesondere gilt: Entsteht $B$ aus $A$ durch Multiplikation der $i$-ten Zeile mit $\lambda \neq 0$, ist also eine Zeilenumformung vom Typ III mit $B = S_i(\lambda) \cdot A$, so ist $\det B = \lambda \cdot \det A$.

(D2) $\det$ ist alternierend, d.h. hat $A$ zwei gleiche Zeilen, so gilt $\det A = 0$.

(D3) $\det$ ist normiert auf $\det E_n = 1$.

Wir zeigen später, daß solche Determinanten existieren. An dieser Stelle beschränken wir uns auf den Beweis der Eindeutigkeit der Determinante. Dazu leiten wir aus der Definition weitere Eigenschaften her, die insbesondere eine Berechnungsmethode beinhalten:

**Satz 45.2** *Die Determinante hat folgende weitere Eigenschaften:*

*(D4)* $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det A \quad \forall \lambda \in K$.

*(D5) Ist eine Zeile von $A$ identisch Null, so folgt* $\det A = 0$.

*(D6) Die Determinante ändert das Vorzeichen bei Zeilenumformungen von Typ I: Entsteht $B$ aus $A$ durch Zeilenvertauschung, also $B = P_{ik} \cdot A$, so gilt* $\det B = -\det A$.

*(D7) Zeilenumformungen von Typ IV lassen die Determinante unverändert: Entsteht $B$ aus $A$ durch Addition der $\lambda$-fachen $i$-ten Zeile zur $k$-ten Zeile, also $B = Q_{ik}(\lambda) \cdot A$, so gilt* $\det B = \det A$.

*(D8) Ist* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & . & \dots & . \\ 0 & a_{22} & \dots & . \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ *eine obere Dreiecksmatrix, so gilt* $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

*(D9) Sei* $n \geq 2$*, und* $A \in M(n,K)$ *habe die folgende Blockdarstellung:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \qquad A_1 \in M(n_1,K)\ ,\ A_2 \in M(n_2,K)\ ,\ n_1+n_2 = n\ .$$

*Dann gilt* $\det A = \det A_1 \cdot \det A_2$.

*(D10)* $\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rang}(A) < n$.

*(D11) Es gilt der Determinantenmultiplikationssatz* $\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$ *für alle* $A, B \in M(n,K)$*. Insbesondere ist* $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ *für* $A \in GL(n,K)$*. Anders formuliert:* $\det : GL(n,K) \to K^*$ *ist ein Gruppenhomomorphismus.*

*Beweis.* D4) Nach (D1) gilt

$$\det \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} = \lambda^2 \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \lambda a_3 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} = \cdots = \lambda^n \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

D5) folgt aus (D1) mit $\lambda = 0$

D6) Ist $B = P_{ik}A$, so berechnen wir

$$\det A + \det B = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\overset{(D2)}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\overset{(D1)}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i + a_k \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_i + a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + a_k \\ \vdots \\ a_i + a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=} 0$$

(D7) Ist $B = Q_{ik}(\lambda)A$, so gilt

$$\det B = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_k + \lambda a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=} \det A$$

(D8) Für Diagonalmatrizen folgt durch wiederholte Anwendung von (D1)

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} a_{11} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} \dots$$
$$\overset{(D1)}{=} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \det E_n \overset{(D3)}{=} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Sind für eine allgemeine obere Dreiecksmatrix alle $a_{ii} \neq 0$, so bringen wir sie durch Zeilenumformung vom Typ IV in Diagonalform *mit den gleichen Diagonalelementen*. Ist $a_{ii} = 0$ und $a_{kk} \neq 0$ für alle $k > i$, so führt Zeilenumformung vom Typ IV auf die Zeile $a_i = 0$.

(D9) Wir können Zeilenumformungen verwenden, die die beiden Blöcke nicht mischen. Durch Umformungen nur der ersten $n_1$ Zeilen und dann nur der letzten $n_2$ Zeilen erreicht man

$$\det A = (-1)^{s_1+s_2} \det \begin{pmatrix} D_1 & C' \\ 0 & D_2 \end{pmatrix},$$

wobei $D_1, D_2$ obere Dreiecksmatrizen sind und $s_1, s_2$ die Anzahl der Zeilenumformungen vom Typ I im oberen bzw unteren Block sind. Die Behauptung folgt nun aus (D8).

(D10) Durch elementare Zeilenumformung überführen wir $A$ in eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen $a_{11}, \dots, a_{nn}$. Dann ist $\det A = \pm a_{11} \cdots a_{nn}$. Aus $\det A = 0$ und der Zeilenstufenform folgt $a_{nn} = 0$ and damit $\det A = 0$ nach (D5), also $\operatorname{rang}(A) < n$. Ist umgekehrt $\operatorname{rang}(A) < n$, so führt elementare Zeilenumformung auf eine obere Dreiecksmatrix mit $a_{nn} = 0$, so daß $\det A = 0$.

(D11) Ist $\operatorname{rang}(A) < n$, so ist auch $\operatorname{rang}(AB) < n$ als Dimension des Bildes der Hintereinanderausführung linearer Abbildungen. Dann ist $\det(A) = \det(AB) = 0$. Ist $\operatorname{rang}(A) = n$, so ist $A$ invertierbar und nach Satz 41.1 ein endliches Produkt von Elementarmatrizen. Also ist $\det(AB) = \det(C_1 \cdots C_r \cdot B)$, wobei $C_p = Q_{ik}(\lambda)$ oder $C_p = S_i(\lambda)$ für $1 \leq p \leq r$. Es gilt $\det(Q_{ik}(\lambda)B) = \det B$ nach (D7) und $\det(S_i(\lambda)B) = \lambda \det B$ nach (D1). Also ist $\det(AB) = \lambda_1 \cdots \lambda_s \det B$, wobei $\lambda_p$ die Koeffizienten in den Umformungen vom Typ III sind. Andererseits ist $\det(A) = \det(AE_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_s$, was die Behauptung liefert. □

Zusammengefaßt haben wir damit aus den Axiomen ein Berechnungsverfahren für die Determinante einer Matrix abgeleitet: Wir überführen mit elementaren Zeilenumformungen vom Typ I und IV die Matrix $A \in M(n, K)$ in Zeilenstufenform $\tilde{A} = (a_{ij})$: Sind dabei $s$ Vertauschungen von Zeilen (Typ I) notwendig, dann ist $\det A = (-1)^s a_{11} \cdots a_{nn}$. Das Verfahren beweist die *Eindeutigkeit* der Determinante: Gäbe es zwei Abbildungen det und $\widetilde{\det}$, die (D1), (D2) und (D3) erfüllen, so folgt aus beiden die Berechnungsvorschrift für die durch Zeilenumformung erhaltene Dreiecksmatrix $\tilde{A} = (a_{ij})$ mit $\det A = \widetilde{\det} A = (-1)^s a_{11} \cdots a_{nn}$.

**Beispiel 45.3**

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{I_{12}}{=} -\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{IV_{13}(-2)}{=} -\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\overset{IV_{23}(1)}{=} -\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -3\,. \qquad \triangleleft$$

**Satz 45.4** *Es gilt* $\det(A^t) = \det(A)$ *für alle* $A \in M(n, K)$.

*Beweis.* Ist $\det A = 0$, so ist $\operatorname{rang}(A^t) = \operatorname{rang}(A) < n$ und damit $\det(A^t) = 0$. Ist $\det A \neq 0$, so ist $A$ invertierbar und damit darstellbar als endliches Produkt von Elementarmatrizen $A = C_1 \cdots C_r$ mit $C_p = Q_{ik}(\lambda)$ oder $C_p = S_i(\lambda)$. Nach dem Determinatenmultiplikationssatz ist $\det A = \det C_1 \cdots \det C_r$ und $\det A^t = \det C_1^t \cdots \det C_r^t$. Es gilt $(Q_{ik}(\lambda))^t = Q_{ki}(\lambda)$ und $(S_i(\lambda))^t = S_i(\lambda)$. Die Behauptung folgt nun aus $\det(Q_{ik}(\lambda)) = 1$ für alle $i, k, \lambda$ und $\det(S_i(\lambda)) = \lambda$. □

Daraus ergeben sich mehrere Folgerungen:

**Satz 45.5** *(D2') Die Determinate ist linear in jeder Spalte.*
*(D3') besitzt* $A \in M(n, K)$ *zwei gleiche Spalten, so gilt* $\det A = 0$. □

**Satz 45.6** *Für* $A \in M(n, K)$ *sind äquivalent:*

i) $\det A \neq 0$

ii) $\operatorname{rang}(A) = n$

iii) *A ist invertierbar*

iv) *Die Zeilen von A sind linear unabhängig.*

v) *Die Spalten von A sind linear unabhängig.* □

**Satz 45.7** *Die Gruppe*

$$SL(n,K) := \{A \in GL(n,K) \ : \ \det A = 1\}$$

*ist eine Untergruppe von* $GL(n,K)$*. Sie heißt die die* spezielle lineare Gruppe*.*

*Beweis.* Für $A, B \in SL(n,K)$ folgt aus den Eigenschaften der Determinante $\det(AB) = 1$ und $\det A^{-1} = 1$. □

Die Determinantenbildung für Matrizen läßt sich sofort auf die Determinate für Endomorphismen endlich-dimensionaler Vektorräume verallgemeinern. Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum über $K$ und $F : V \to V$ eine lineare Abbildung (ein Endomorphismus). Wir wählen eine beliebige Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von $V$ und stellen $F$ in dieser Basis dar:

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot v_i \ , \qquad a_{ij} \in K \ .$$

Dann ist $A = (a_{ij}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ die darstellende Matrix von $F$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Wir definieren $\det F := \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F))$. Diese Definition ist sinnvoll, denn sie hängt nicht von der Wahl der Basis ab: Sei $\mathcal{A}$ eine andere Basis von $V$, dann gilt nach Satz 42.1 $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) \cdot (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1}$ und deshalb $\det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)) = \det(M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F))$.

In direkter Verallgemeinerung der Determinanteneigenschaften gilt:

**Satz 45.8** *Sind* $F, G \in \mathrm{End}(V)$*, so gilt*

i) $\det F \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad F \in \mathrm{Aut}(V)$

ii) $F \in \mathrm{Aut}(V) \quad \Rightarrow \quad \det F^{-1} = \frac{1}{\det F}$

iii) $\det(F \circ G) = \det F \cdot \det G$

Eine weitere nützliche Anwendung ist die Definition der *Orientierung* von Automorphismen und von Basen.

**Definition 45.9** Sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem *angeordneten* Körper $K$. Ein Automorphismus $F \in \mathrm{Aut}(V)$ heißt *orientierungstreu*, falls $\det F > 0$, ansonsten *orientierungsuntreu*.

Zwei Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von $V$ heißen *gleich orientiert*, wenn für die darstellende Matrix der Identität gilt $\det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)) > 0$, ansonsten *ungleich orientiert*.

Offenbar gilt:

**Satz 45.10** *Die Menge*

$$\mathrm{Aut}^+(V) := \{F \in \mathrm{Aut}(V) \ : \quad \det F > 0\}$$

*der orientierungstreuen Automorphismen von $V$ ist eine Untergruppe von* $\mathrm{Aut}(V)$*. Insbesondere ist*

$$GL^+(m,K) := \{A \in GL(n,K) \ : \quad \det A > 0\}$$

*eine Untergruppe von $GL(n,K)$.* □

# 46 Laplacescher Entwicklungssatz und komplementäre Matrix

In Beweisen und für speziell gewählte Matrizen sind auch rekursive und abstrakte Berechnungsformeln nützlich:

**Satz 46.1 (Entwicklungssatz von Laplace)** *Ist $A = (a_{ij}) \in M(n,K)$ und seien die Matrizen $A_{ij} \in M(n-1,K)$ aus $A$ durch Streichen der $i$-ten Zeile und der $j$-ten Spalte erhalten. Dann gilt für beliebiges $1 \le i \le n$*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \qquad \textit{Entwicklung nach der } i\textit{-ten Zeile}$$

*und für beliebiges $1 \le j \le n$*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \qquad \textit{Entwicklung nach der } j\textit{-ten Spalte.}$$

*Beweis.* (für die Zeilenentwicklung). Wir schreiben die $i$-te Zeile $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ von $A = (a_{ij})$ als Linearkombination der kanonischen Basen

$$a_i = a_{i1}(1,0,0,\ldots,0) + a_{i2}(0,1,0,\ldots,0) + \cdots + a_{in}(0,0,\ldots,0,1)$$

Anwenden von (D1) ergibt

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det A'_{ij} \ ,$$

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

In jeder der Matrizen $A'_{ij}$ bringen wir mit Zeilenumformungen vom Typ IV (welche die Determinante nicht ändern) alle anderen Einträge der $j$-ten Spalte auf 0:

$$\det A'_{ij} = \det A''_{ij}\ , \quad A''_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Durch Vertauschen mit jeweils benachbarten Zeilen bringen wir die $i$-te Zeile von $A''_{ij}$ an die $j$-te Stelle, wobei sich die Reihenfolge aller anderen Zeilen nicht ändert. Dazu sind $|i-j|$ Zeilenvertauschungen erforderlich. Die 1 steht nun auf der Diagonale: Für $i < j$ erhalten wir:

$$\det A''_{ij} = (-1)^{|i-j|} \det A'''_{ij}\ , \quad A'''_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,j-1} & 0 & a_{j,j+1} & \dots & a_{j,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,j-1} & 0 & a_{j+1,j+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Zeilenumformung vom Typ I und IV überführen wir $A'''_{ij}$ in eine obere Dreiecksmatrix und lesen die Determinante ab. Bei diesen Umformungen wird an der $j$-ten Zeile und Spalte von $A'''_{ij}$ nichts geändert. Deshalb stimmt $\det A'''_{ij}$ mit der Determinante jener Matrix $A_{ij} \in M(n-1, K)$ überein, die aus $A'''_{ij}$ durch Weglassen des Kreuzes aus $j$-ter Zeile und $j$-ter Spalte erhalten wird. Dieselbe Matrix $A_{ij}$ entsteht aber auch aus $A'_{ij}$ und damit auch aus $A$ selbst durch Weglassen der $i$-ten Zeile und der $j$-ten Spalte. Unter Verwendung von $(-1)^{|i-j|} = (-1)^{i+j}$ folgt die Behauptung. Analog für die Spaltenentwicklung. □

Wir können nun über den Laplaceschen Entwicklungssatz die Existenz der Determinante beweisen:

**Satz 46.2** *Für alle $n \in \mathbb{N}^\times$ gibt es eine Abbildung* $\det : M(n, K) \to K$ *mit den Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) aus Definition 45.1.*

*Beweis.* Durch Induktion nach $n$. Für $n = 1$ setzen wir $\det(a) := a$. Dann ist (D2) eine leere Aussage, (D1) und (D3) sind klar. Sei die Existenz bis $M(n-1, K)$ bewiesen. Wir definieren $\det : M(n, K) \to K$ über den Laplaceschen Entwicklungssatz und Entwicklung nach der $j$-ten *Spalte*. Zu zeigen sind $(D1) - (D3)$.

(D1) Betrachtet werde die $k$-te Zeile von $A \in M(n, K)$. Es gilt $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = (-1)^{k+j} a_{kj} A_{kj} + \sum_{i \neq k} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$. Im ersten Term ist $A_{kj}$ unabhängig von der $k$-ten Zeile, und $a_{kj}$ ist linear. In jedem anderen Term $i \neq k$ ist $\det A_{ij}$ linear in der $k$-ten Zeile nach Induktionsvoraussetzung, und $a_{ij}$ ist unabhängig von der $k$-ten Zeile.

(D2) Seien die $k$-te und $l$-te Zeile von $A \in M(n, K)$ gleich, und $k < l$. Ist $i \neq k$ und $i \neq l$, so sind die entsprechenden Zeilen auch in $A_{ij} \in M(n-1, K)$ gleich, damit $\det A_{ij} = 0$. Im Entwicklungssatz verbleibt $\det A = (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj} + (-1)^{l+j} a_{lj} \det A_{lj}$. Die Annahme (Gleichheit der $k$-ten und $l$-ten Zeile von $A$) ergibt zunächst $a_{kj} = a_{lj}$. Ist $n = 2$, so ist $k = 1$ und $l = 2$, damit $(-1)^{k+j} = -(-1)^{l+j}$ und $\det A_{1j} = \det A_{2j}$ wegen Gleichheit beider Zeilen von $A \in M(n, K)$. Sei also $n \geq 3$ und $a_i \in K^n$ die $i$-te Zeile von $A$ mit $a_k = a_l =: b \in K^n$. Seien $a'_i, b' \in K^{n-1}$ die aus $a_i, b$ durch Weglassen des $j$-ten Eintrags entstehenden Zeilenvektoren. Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ b \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_{l-1} \\ b \\ a_{l+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad A_{kj} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_{k-1} \\ a'_{k+1} \\ \vdots \\ a'_{l-1} \\ b' \\ a'_{l+1} \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}, \qquad A_{lj} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_{k-1} \\ b' \\ a'_{k+1} \\ \vdots \\ a'_{l-1} \\ a'_{l+1} \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}.$$

Durch $l-1-k$ Vertauschungen benachbarter Zeilen bringen wir die $(l-1)$-te Zeile $b'$ von $A_{kj}$ in die $k$-te Zeile, alle Zeilen $a'_{k+1}, \ldots, a_{l-1'}$ verschieben sich um eine Zeile nach unten. Das Ergebnis dieser $l-1-k$ Zeilenvertauschungen ist $A_{lj}$, d.h. es gilt $\det A_{kj} = (-1)^{l-1-k} \det A_{lj}$ und damit $(-1)^{k+j} \det A_{kj} - (-1)^{l+k} \det A_{lj}$. Das liefert (D2).

(D3) Es gilt $\det E_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \delta_{ij} \det(E_n)_{ij} = (-1)^{2j} \det(E_n)_{jj} = \det(E_{n-1}) = 1$. □

Die Berechnung der Determinante von $A \in M(n, K)$ wird durch Satz 46.1 auf die Berechnung der Determinanten kleinerer Matrizen zurückgeführt. Als Beispiel

berechnen wir

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \det(a_{22}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(a_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ .$$

Einfache Rechenregel: Für $2 \times 2$-Matrizen ist die Determinante gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente minus dem Produkt der Nebendiagonalelemente. Eine ähnliche graphische Rechenregel gibt es auch für $3 \times 3$-Matrizen (Regel von Sarrus). Ein Analogon für $M(n, K)$ mit $n \geq 4$ wäre falsch!

**Beispiel 46.3** Wir berechnen erneut Beispiel 45.3 durch Entwicklung nach der 1. Zeile:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix} = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$
$$= -1 \cdot 3 \cdot 9 + 1 \cdot 6 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 7 - 2 \cdot 6 \cdot 4 = -27 + 30 + 42 - 48 = -3 \ ,$$

in Übereinstimmung mit der ersten Rechnung. ◁

Allgemein wird durch den Entwicklungssatz die Determinante von $A = (a_{ij})$ rekursiv durch Summen und Differenzen von Produkten $a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n}$ der Einträge $a_{ij}$ berechnet. Durch Entwicklung nach der jeweils obersten Zeile sieht man, daß in jedem dieser Produkte jeder Zeilenindex genau einmal vorkommt. Andererseits kommt auch jeder Spaltenindex genau einmal vor: Damit $a_{ij}$ in einem Produkt vorkommen kann, darf zuvor kein $a_{kj}$ aufgetreten sein, da sonst die $j$-te Spalte gestrichen wäre. Nach dem Auftreten von $a_{ij}$ wird die $j$-te Spalte weggelassen und weitere $a_{kj}$ können im Produkt nicht vorkommen. Eine solche injektive/surjektive/bijektive Zuordnung eines Spaltenindex $j = \sigma(i) \in \{1, \ldots, n\}$ zu jedem Zeilenindex $i \in \{1, \ldots, n\}$ heißt *Permutation*. Ein Beispiel ist durch folgende Tabelle gegeben:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma(i)$ | 2 | 5 | 3 | 1 | 4 |

Sei $S_n$ die Menge (und Gruppe) aller Permutationen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$, dann gilt

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda(\sigma) \ a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \ .$$

Dabei ist $\lambda(\sigma) \in \pm 1$, denn jede Permutation kommt vor und zwar mit Vorfaktor $+1$ oder $-1$ entsprechend dem Entwicklungssatz. Man kann zeigen, daß $\lambda(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma)$ das *Vorzeichen der Permutation* ist, das wie folgt berechnet werden kann: Eine Permutation $\tau$ heißt *Transposition*, wenn sie zwei Elemente aus $\{1, \ldots, n\}$ austauscht und alle anderen an ihrer Stelle beläßt. Jede Permutation kann als (nicht eindeutige) Hintereinanderausführung von Transpositionen erhalten werden. Dann ist

$$\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{\text{Zahl der Transpositionen in } \sigma} \ .$$

Das Vorzeichen ist eindeutig, auch wenn die Zahl der Transpositionen selbst nicht eindeutig ist.

Alternativ kann man das Vorzeichen aus der Zahl der *Fehlstellen* der Permutation ablesen. Eine Fehlstelle ist ein Paar $(i,j)$ mit $i<j$ und $\sigma(i)>\sigma(j)$. Dann ist

$$\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{\text{Zahl der Fehlstellen in } \sigma} .$$

Damit gilt (insgesamt hier ohne Beweis)

**Satz 46.4 (*Formel von Leibniz*)**

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\; a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} .$$

Es gibt $n!$ Permutationen $\sigma\in S_n$, so daß die Zahl der Produkte in der Formel von Leibniz mit wachsendem $n$ sehr groß wird. Deshalb ist die Formel von Leibniz vor allem aus theoretischer Sicht bedeutsam. Sind z.B. die Einträge der Matrix stetige/differenzierbare Funktionen, so ist auch die Determinante eine stetige/differenzierbare Funktion. Für praktische Berechnungen sind Zeilenumformungen geeigneter.

**Definition 46.5** Sei $A=(a_{ij})\in M(n,K)$. Dann heißt die Matrix

$$A^\sharp = (a^\sharp_{ij}) \in M(n,K) , \qquad a^\sharp_{ij} := (-1)^{i+j}\det A_{ji} .$$

die zu $A$ *komplementäre Matrix*, wobei $A_{ji}\in M(n-1,K)$ durch Streichen der $j$-ten Zeile und der $i$-ten Spalte entsteht.

Man beachte die Vertauschung der Reihenfolge von $i,j$: Im Matrixelement $a^\sharp_{ij}$ steht $A_{ji}$, nicht $A_{ij}$!

**Satz 46.6** *Ist $A\in M(n,K)$ und sei $A^\sharp$ die zu $A$ komplementäre Matrix, dann gilt $A\cdot A^\sharp = A^\sharp\cdot A = (\det A)E_n$. Insbesondere gilt $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^\sharp$ für invertierbare Matrizen $A\in GL(n,K)$.*

*Beweis.* Wir berechnen die Komponenten von $A^\sharp\cdot A$:

$$(A^\sharp\cdot A)_{kj} = \sum_{i=1}^n a^\sharp_{ki}a_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k}a_{ij}\det A_{ik} .$$

Ist $j=k$ beliebig, so entsteht gerade der Spaltenentwicklungssatz von Laplace: $\det A=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}$. Für $j\neq k$ betrachten wir die Matrix $B=(b_{il})\in M(n,K)$, die aus $A$ entsteht, wenn man die $k$-te Spalte von $A$ durch die $j$-te Spalte von $A$ ersetzt. Es ist also $b_{il}=a_{il}$ für $l\neq k$ und $b_{ik}=a_{ij}$. Da $B$ zwei gleiche Spalten besitzt, ist $\det B=0$. Wir entwickeln $\det B$ nach der $k$-ten Spalte:

$$0=\det B=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+k}b_{ik}\det B_{ik}=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+k}a_{ij}\det A_{ik}$$

wegen $A_{ik} = B_{ik}$. Folglich ist $(A^\sharp \cdot A)_{kj} = (\det A)\delta_{kj}$. $\square$

Mit $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\sharp$ für $A \in GL(n, K)$ haben wir eine weitere Methode zur Berechnung der inversen Matrix kennengelernt. Für $n > 3$ ist diese Methode jedoch sehr aufwendig. Allerdings ist diese abstrakte Darstellung in der Analysis sehr nützlich, denn die Determinantenbildung hängt als Produkt der $a_{ij}$ stetig und sogar differenzierbar von den Einträgen $a_{ij}$ ab. Daraus folgt, daß für $A \in GL(n, K)$ die Abbildung $A \mapsto A^{-1}$ differenzierbar ist.

Eine weitere Anwendung der Determinanten besteht in einem Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit invertierbaren Matrizen:

**Satz 46.7 (Cramersche Regel)** *Seien $A = (a_{ij}) \in GL(n, K)$ und $b \in K^n$ gegeben und sei $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in K^n$ die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$. Bezeichnen wir mit $a_1, \ldots, a_n$ die Spalten von $A$, also $a_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})^t$, dann gilt*

$$x_j = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{j-1}, b_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)}{\det A} \, .$$

*Beweis.* Die endeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems ist durch $x = A^{-1} \cdot b$ gegeben. In Komponenten gilt damit

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} (A^{-1})_{ji} b_i = \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} b_i (\det A_{ij}) \, .$$

Nach dem Spaltenentwicklungssatz von Laplace ist $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} b_i (\det A_{ij})$ gerade die Determinante einer Matrix $B = (b_{il})$, deren Einträge auf der $j$-ten Spalte durch $b_{ij} = b_i$ gegeben sind und deren andere Spalten identisch sind mit den Spalten von $A$. $\square$

Wieder liegt die Bedeutung der Cramerschen Regel in theoretischen Betrachtungen wie der Schlußfolgerung, daß die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für $A \in GL(n, K)$ differenzierbar von der rechten Seite $b \in K^n$ sowie den Einträgen der Matrix $A \in GL(n, K)$ abhängt.

Zum Abschluß geben wir ohne Beweis noch die Verallgemeinerung von $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, hier mit $A, B \in M(n, K)$, auf Produkte nichtquadratischer Matrizen an:

**Satz 46.8 (Binet-Cauchy)** *Es seien $A = (a_1, \ldots, a_{n+k}) \in M(n \times (n+k), K)$ und $B = (b_1, \ldots, b_{n+k}) \in M(n \times (n+k), K)$ zwei rechteckige Matrizen, gebildet aus den Spaltenvektoren $a_i, b_i \in K^n$, und $k \in \mathbb{N}$. Für $1 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_n \leq$*

*$n+k$ seien quadratische Matrizen $A^{m_1 m_2 \ldots m_n} := (a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_n}) \in M(n, K)$ und $B^{m_1 m_2 \ldots m_n} := (b_{m_1}, b_{m_2}, \ldots, b_{m_n}) \in M(n, K)$ definiert. Dann gilt*

$$\det(A \cdot B^t) = \sum_{1 \le m_1 < m_2 < \cdots < m_n \le n+k} (\det A^{m_1 m_2 \ldots m_n})(\det B^{m_1 m_2 \ldots m_n}) \; .$$

*Die Summe läuft über die $\binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!k!}$ verschiedenen Möglichkeiten, $n$ der $n+k$ Spalten der Matrizen auszuwählen.*

Ein Beweis findet sich z.B. in G. Fischer: Lineare Algebra, Kapitel 3.3. Man kann sich auf Matrizen $A, B \in M(n \times l, K)$ mit $l \ge n$ beschränken, da sich zeigen läßt, daß für $A, B \in M(n \times l, K)$ mit $l < n$ stets $\det(A \cdot B^t) = 0$ gilt. Aus Satz 46.8 folgt insbesondere $\det(A \cdot A^t) = \sum_{1 \le m_1 < m_2 < \cdots < m_n \le n+k} (\det A^{m_1 m_2 \ldots m_n})^2$ (Gramsche Determinante), d.h. für reellwertige Matrizen ist $\det(A \cdot A^t) \ge 0$.

# 47 Eigenwerte, Eigenräume und charakteristisches Polynom

Nach Satz 38.11 gibt es zu jeder linearen Abbildung $F : V \to W$ angepaßte Basen $\mathcal{A}$ von $V$ und $\mathcal{B}$ von $W$, so daß die darstellende Matrix die Form $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat. Natürlich können wir $W = V$ wählen und dann entsprechende Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ von $V$ finden. Die Frage ist: Gibt es zu einem Endomorphismus $F : V \to V$ auch *eine* Basis $\mathcal{B}$ von $V$, so daß für die darstellende Matrix gilt: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? Die Antwort ist: Nein!

Es geht nun darum, zu gegebenem Endomorphismus die Basis so sinnvoll wie möglich zu wählen.

**Definition 47.1** Sei $F : V \to V$ Endomorphismus eines Vektorraums $V$ über $K$. Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt *Eigenwert* von $F$, wenn es einen Vektor $v \neq 0$ von $V$ gibt, so daß $F(v) = \lambda \cdot v$. Jeder Vektor $v \neq 0$ von $V$ mit $F(v) = \lambda \cdot v$ heißt *Eigenvektor* von $F$ zum Eigenwert $\lambda$.

Zu beachten ist, daß es zu einem Eigenwert $\lambda$ mehrere Eigenvektoren geben kann.

**Definition 47.2** Ein Endomorphismus $F \in \mathrm{End}(V)$ heißt *diagonalisierbar*, wenn es eine Basis von $V$ aus Eigenvektoren von $F$ gibt.

In diesem Fall gilt:

**Satz 47.3** *Ist* $\dim(V) = n$*, so ist* $F \in \mathrm{End}(V)$ *genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis* $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ *von* $V$ *gibt, so daß* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

*Beweis.* Für die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = (a_{ij})$ gilt $F(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot v_i$. Damit sind die $v_i$ die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_i$. □

Das ist die optimalste Situation für eine Basis zu gegebenem Endomorphismus. Jedoch ist nicht klar, daß jeder Endomorphismus auch diagonalisierbar ist. Zunächst untersuchen wir, ob die Eigenvektoren linear unabhängig sind:

**Satz 47.4** *Sei* $F \in \mathrm{End}(V)$ *ein Endomorphismus und seien* $v_1, \ldots, v_m$ *Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *von* $V$*. Dann sind die* $(v_1, \ldots, v_m)$ *linear unabhängig.*

*Beweis.* Wir beweisen den Satz durch Induktion nach der Anzahl $m$ linear unabhängiger Eigenvektoren. Für $m = 1$ ist nichts zu zeigen. Angenommen, $v_2, \ldots, v_m$ seien linear unabhängig. Wir betrachten

$$\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_m = 0$$

Anwenden von $F$ einerseits und Subtraktion des $\lambda_1$-fachen dieser Gleichung ergibt

$$0 = \mu_1(\lambda_1 - \lambda_1)v_1 + \mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \cdots + \mu_m(\lambda_m - \lambda_1)v_2 \; .$$

Da $\lambda_1 \neq \lambda_i$ für $2 \leq i \leq m$ und $(v_2, \ldots, v_m)$ linear unabhängig, folgt $\mu_j = 0$ für alle $1 \leq j \leq m$. Damit ist $(v_1, \ldots, v_m)$ linear unabhängig. □

Als direkte Konsequenz ergibt sich:

**Satz 47.5** *Seien* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *paarweise verschiedene Eigenwerte eines Endomorphismus* $F \in \mathrm{End}(V)$ *und sei* $\dim(V) = n$*. Dann gilt:*

i) $m \leq n$

ii) *Ist* $m = n$*, dann ist* $F$ *diagonalisierbar.*

*Beweis.* i) Für $m > n$ wären nach dem vorigen Satz mehr als $n$ Vektoren aus $V$, nämlich Eigenvektoren zu $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, linear unabhängig. Das ist durch die Dimension ausgeschlossen.

ii) Ist $\dim(V) = n$, dann bilden $n$ linear unabhängige Vektoren eine Basis. Damit ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis aus Eigenvektoren, und $F$ ist diagonalisierbar. □

Es gibt natürlich Endomorphismen mit weniger als $\dim(V)$ paarweise verschiedenen Eigenwerten, die trotzdem diagonalisierbar sind. Ein Beispiel ist

$\mathrm{id}_V \in \mathrm{End}(V)$. Es gibt nur einen Eigenwert $\lambda = 1$, aber jede Basis von $V$ diagonalisiert $\mathrm{id}_V$.

**Definition 47.6** Für $F \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda \in K$ heißt

$$\mathrm{Eig}(F;\lambda) := \{v \in V \ : \ F(v) = \lambda \cdot v\}$$

der *Eigenraum* von $F$ zum Skalar $\lambda$.

Es gilt stets $0 \in \mathrm{Eig}(F;\lambda)$. Ist $\lambda$ Eigenwert von $F$, so enthält $\mathrm{Eig}(F;\lambda)$ weitere Vektoren. Genauer gilt:

**Satz 47.7** *Für $F \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda \in K$ sei $\mathrm{Eig}(F;\lambda)$ der zugehörige Eigenraum. Dann gilt:*

i) $\mathrm{Eig}(F;\lambda) \subseteq V$ *ist Untervektorraum*

ii) $\lambda$ *ist Eigenwert von* $F \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Eig}(F;\lambda) \neq \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \dim(\mathrm{Eig}(F;\lambda)) > 0$

iii) $\mathrm{Eig}(F;\lambda) \setminus \{0\}$ *ist die Menge der Eigenvektoren von $F$ zum Eigenwert $\lambda$*

iv) $\mathrm{Eig}(F;\lambda) = \ker(F - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$

v) *Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so folgt* $\mathrm{Eig}(F;\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(F;\lambda_2) = \{0\}$

*Beweis.* i) Sind $v_1, v_2 \in \mathrm{Eig}(F;\lambda)$ und $\mu_1, \mu_2 \in K$, so folgt

$$F(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \mu_1 F(v_1) + \mu_2 F(v_2) = \mu_1(\lambda v_1) + \mu_2(\lambda v_2) = \lambda(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2)$$

und damit $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 \in \mathrm{Eig}(F;\lambda)$.

ii) Es gibt ein $v \neq 0$ mit $F(v) = \lambda v$. Dann ist $v \in \mathrm{Eig}(F;\lambda) \neq \{0\}$.

iii) ist klar

iv) Sei $v \in \mathrm{Eig}(F;\lambda)$. Dann gilt:

$$(F - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(v) = \lambda v - \lambda v = 0 \ ,$$

also $v \in \ker(F - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$. Ebenso folgt die Umkehrung.

v) Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $v \in \mathrm{Eig}(F;\lambda_1)$, so ist

$$(F - \lambda_2 \cdot \mathrm{id}_V)(v) = (\lambda_1 - \lambda_2)v \ .$$

Damit ist $v \in \ker(F - \lambda_2 \cdot \mathrm{id}_V)$ genau dann, wenn $v = 0$. □

Es geht nun um ein Verfahren zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren eines Endomorphismus, wobei die Determinante eine entscheidende Rolle spielt.

**Satz 47.8** *Sei $F \in \mathrm{End}(F)$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums $V$. Ein Skalar $\lambda \in K$ ist genau dann Eigenwert von $F$, wenn*

$$\det(F - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) = 0 \ .$$

*Beweis.* Nach Satz 47.7.ii) und Satz 47.7.iv) ist $\lambda$ genau dann Eigenwert von $F$, wenn $\dim(\ker(F - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)) > 0$. Das ist gleichbedeutend mit

$$\dim(\mathrm{im}(F - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)) = \mathrm{rang}(F - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) < \dim(V) \ .$$

Nach der Determinanteneigenschaft (D10) ist diese Eigenschaft äquivalent zu $\det(F - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) = 0$. □

Die Determinante eines Endomorphismus $F \in \mathrm{End}(V)$ berechnet sich als die Determinante der darstellenden Matrix $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) = A = (a_{ij}) \in M(n, K)$ bezüglich einer beliebigen Basis $\mathcal{A} = (w_1, \ldots, w_n)$ von $V$. Wegen $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V) = E_n$ gilt

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F - t \cdot \mathrm{id}_V) = A - t \cdot E_n \ .$$

Damit ist die Suche nach Eigenwerten von $F \in \mathrm{End}(V)$ zurückgeführt auf die Bestimmung der *Nullstellen* der Abbildung

$$P_A : K \to K \ : \qquad P_A : t \mapsto \det(A - t \cdot E_n) \ .$$

Nach der Formel von Leibniz ist $P_A[t]$ ein Polynom $n$-ten Grades in $t$ mit Koeffizienten aus $K$:

$$\det(A - t \cdot E_n) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k \ ,$$
$$\alpha_n = (-1)^n \ , \ \alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + \cdots + a_{nn}) \ , \ \ldots, \ \alpha_0 = \det A \ .$$

Dabei heißt im zweithöchsten Term $\mathrm{tr}(A) := a_{11} + \cdots + a_{nn}$ die *Spur* der Matrix $A \in M(n, K)$. Der niedrigste Term ist unabhängig von $t$ und stimmt damit mit der Rechnung für $t = 0$ überein, was gerade die Determinante von $A$ ergibt. Die anderen Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}$ sind schwieriger zu charakterisieren.

Sei nun $K[t]$ der Vektorraum der Polynome in $t$ mit Koeffizienten aus $K$. Wir bezeichnen:

**Definition 47.9** Das Polynom $P_A(t) = \det(A - t \cdot E_n) \in K[t]$ heißt das *charakteristische Polynom* der Matrix $A \in M(n, K)$.

Sinnvollerweise heißt ein $\lambda \in K$ *Nullstelle* eines Polynoms $f \in K[t]$, wenn $f(\lambda) = 0$. In Verbindung mit Satz 47.8 gilt:

**Satz 47.10** *Sei $F \in \mathrm{End}(V)$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums. Dann sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(F - t \cdot \mathrm{id}_V) \in K[t]$ die Eigenwerte von $F$.* □

Im 1. Semester hatten wir gesehen, daß aus $f(\lambda) = 0$ folgt, daß $(t - \lambda)$ ein *Teiler* des Polynoms $f \in K[t]$ ist. Durch wiederholtes Abdividieren der Nullstellen läßt sich jedes Polynom $f \in K[t]$ eindeutig darstellen als

$$f = (t-\lambda_1)^{r_1}(t-\lambda_2)^{r_2} \cdots (t-\lambda_k)^{r_k} \cdot g \ , \qquad \deg(g) = \deg(f) - r_1 - r_2 - \cdots - r_k \geq 0 \ ,$$

wobei $g$ ein Polynom *ohne Nullstellen* ist. Der Exponent $\mu(f, \lambda_i) := r_i$ heißt die *Vielfachheit* der Nullstelle $\lambda_i$ von $f$. Damit besitzt jedes Polynom $n$-ten Grades höchstens $n$ mit Vielfachheit gezählte Nullstellen (somit auch höchstens $n$ paarweise verschiedene Nullstellen). Ist $\deg(g) = 0$, dann sagen wir, daß $f$ *in Linearfaktoren zerfällt*. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (bewiesen in Satz 22.10) ist das in $\mathbb{C}$ immer der Fall.

Im reellen Fall $K = \mathbb{R}$ zerfällt ein Polynom im allgemeinen *nicht* in Linearfaktoren. Das einfachste Beispiel ist $f(t) = t^2 + 1$, welches keine reelle Nullstelle besitzt. Man kann aber $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ausnutzen, die komplexen Nullstellen suchen und dann Paare komplex konjugierter Nullstellen wieder zu einem rellen Polynom zusammenfassen. Damit läßt sich zeigen, daß für jedes reelle Polynom $f \in \mathbb{R}[t]$ gilt:

$$\begin{aligned} &f = a(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_{n-2r})\cdot g_1 \cdots g_r \ , \qquad g_j = (t-\alpha_j)^2 + \beta_j^2 > 0 \ , \\ &a, \lambda_i, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R} \ , \quad \beta_j \neq 0 \ , \qquad r, n-2r \geq 0 \ . \end{aligned}$$

Die analytische Berechnung (zunächst komplexer Nullstellen) ist im allgemeinen nur für Polynome vom Grad $\leq 4$ möglich. Für Polynome mit höherem Grad ist man auf numerische Näherungsverfahren angewiesen. Der Fundamentalsatz der Algebra und für reelle Polynome zusätzlich die Gleichheit der Vielfachheit komplexer Nullstellen ist dann eine wichtige Kontrolle, ob man wirklich alle Nullstellen numerisch gefunden hat!

Wir fassen zusammen:

**Satz 47.11** *Sei $F \in \mathrm{End}(V)$ und $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$ die darstellende Matrix bezüglich einer beliebigen Basis $\mathcal{A} = (w_1, \ldots, w_n)$ von $V$ und*

$$\Phi_{\mathcal{A}} : K^n \to V \ , \qquad \Phi_{\mathcal{A}}(e_i) = w_i \ ,$$

*der Isomorphismus, der die Standardbasis des $K^n$ in die Basis $\mathcal{A}$ überführt. Dann gilt*

$$\mathrm{Eig}(F; \lambda) = \Phi_{\mathcal{A}}(\ker(A - \lambda \cdot E_n)) \ ,$$

*wobei $\ker(A - \lambda \cdot E_n) = \mathrm{Lös}(A - \lambda \cdot E_n, 0)$ der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $(A - \lambda \cdot E_n)x = 0$ ist.*

*Beweis.* Sei $v \in \mathrm{Eig}(F; \lambda)$, dann ist

$$F(v) = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ F \circ \Phi_{\mathcal{A}} \circ \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(v) = \lambda \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(v) \ .$$

Wir setzen $x = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(v) \in K^n$. Mit $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) := \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ F \circ \Phi_{\mathcal{A}} \in M(n, K)$ folgt

$$v \in \mathrm{Eig}(F; \lambda) \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot x = \lambda \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda \cdot E_n)x = 0 \qquad \square$$

Damit haben wir ein Verfahren zur Bestimmung von Eigenwerten und zugehörigen Eigenräumen von $F \in \mathrm{End}(V)$ gefunden:

1. Wähle eine beliebige Basis $\mathcal{A} = (w_1, \ldots, w_n)$ von $V$. Bestimme die darstellende Matrix $A = (a_{ij})$ durch Zerlegen der $n$ Vektoren $F(w_j)$ nach der Basis $\mathcal{A}$,
$$F(w_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot w_i \ .$$

2. Berechne das charakteristische Polynom $P_A(t) = \det(A - t \cdot E_n) \in K[t]$ und bestimme seine Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ (paarweise verschieden) und ihre Vielfachheit $r_i := \mu(P_A; \lambda_i)$ aus der Darstellung
$$P_A(t) = (t - \lambda_1)^{r_1} \cdots (t - \lambda_m)^{r_m} \cdot g(t) \ ,$$
wobei $g \in K[t]$ keine Nullstelle in $K$ besitzt. Die $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sind dann genau die Eigenwerte von $F$. Für $K = \mathbb{C}$ gilt $n = r_1 + \cdots + r_m$.

3. Löse zu jeder Nullstelle $\lambda_i$ des charakteristischen Polynoms das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda_i \cdot E_n)x^{(i)} = 0$. Der Lösungsraum ist ein $s_i$-dimensionaler Untervektorraum von $K^n$. Ist $x^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} x_j^{(i)} e_j \in \text{Lös}(A - \lambda_i \cdot E_n, 0)$, dann ist $v^{(i)} = \Phi_{\mathcal{A}}(x^{(i)}) = \sum_{j=1}^{n} x_j^{(i)} w_j \in \text{Eig}(F; \lambda_i)$ mit $\dim(\text{Eig}(F; \lambda_i)) = s_i$.

**Beispiel 47.12** Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in der Standardbasis gegeben durch $F(x) = A \cdot x$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Schritt 1 entfällt.

Schritt 2. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\det(A - tE_n) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 2 & 3 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 2 & -2 & 1-t \end{pmatrix} \\
&= (2-t) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ -2 & 1-t \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1-t \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2-t \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= (2-t) \cdot (t^2 - 3t + 4) + 2(t+1) + 3(2t-6) = -t^3 + 5t^2 - 2t - 8 \\
&= -(t+1)(t^2 - 6t + 8) = -(t+1)(t-4)(t-2) \ .
\end{aligned}$$

Damit hat $F$ die Eigenwerte $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$. Insbesondere ist $F$ diagonalisierbar.

Schritt 3. Die Eigenräume bestimmen sich (dank der Standardbasis) zu $\text{Eig}(F; \lambda_i) = \ker(A - \lambda_i \cdot E_3)$, sie werden also als Lösung eines homogenen LGS erhalten. Wir bestimmen $\text{Eig}(F; -1) = \{v_1 \in \mathbb{R}^3 \ : \ (A - (-1)E_3)v_1 = 0\}$ durch Zeilenumformungen zu

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{IV_{12}(-\frac{1}{3}),\, IV_{13}(-\frac{2}{3})}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} & 0 \end{pmatrix} \overset{IV_{23}(\frac{10}{7}),\, III_2(\frac{3}{7})}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{IV_{21}(-2),\, III_1(\frac{1}{3})}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} t_1 \,, \qquad t_1 \in \mathbb{R} \,.$$

Analog findet man $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} t_2$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} t_3$. Sämtliche Eigenräume sind eindimensional.

Für $t_i \neq 0$ bildet $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Aufgefaßt als Matrix vermittelt $S = (v_1, v_2, v_3) \in GL(3, \mathbb{R})$ die Transformation von der Standardbasis $\mathcal{A} = \mathcal{E}$ in die Eigenbasis $\mathcal{B}$ von $F$, d.h. es gilt $\Phi_{\mathcal{B}}(x) = S \cdot x$ in den Bezeichnungen von Satz 38.3. Nach Satz 42.1 (bzw. dem kommuativen Diagramm davor) gilt $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ F \circ \Phi_{\mathcal{B}} = S^{-1} \cdot A \cdot S$. Für $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ ist

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 16 & -20 & -14 \\ -5 & 10 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \triangleleft$$

## 48 Diagonalisierbarkeit bei Vielfachheit

Sei $F \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$ und $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) \in M(n, K)$ die darstellende Matrix bezüglich einer beliebigen Basis $\mathcal{A}$ von $V$. Wir wissen:

i) Ist $F$ diagonalisierbar, dann ist $P_A(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{r_1} \cdots (t - \lambda_m)^{r_m}$, d.h. das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren (wähle eine Basis aus Eigenvektoren).

ii) Ist $P_A(t) = (-1)^n (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$ und alle $\lambda_i$ sind paarweise verschieden, dann ist $F$ diagonalisierbar.

Es verbleibt also zu untersuchen, wann $F$ diagonalisierbar ist im Falle von Vielfachheiten $\mu(P_A; \lambda) > 1$ der Eigenwerte.

**Satz 48.1** *Sei $F \in \mathrm{End}(V)$ und $A$ seine darstellende Matrix bezüglich einer beliebigen Basis von $V$. Ist $\lambda$ ein Eigenwert von $F$, dann gilt*

$$1 \leq \dim(\mathrm{Eig}(F; \lambda)) \leq \mu(P_A; \lambda) \,.$$

*Beweis.* Sei $(v_1, \ldots, v_s)$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(F; \lambda)$. Dann ist $s \geq 1$, da $\lambda$ Eigenwert. Wir ergänzen $(v_1, \ldots, v_s)$ zu einer Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n)$ von $V$. Für

die darstellende Matrix $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) = (a_{ij})$ gilt

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & B \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & C \\ & & & \end{array}\right) ,$$

wobei oben links der Block $\lambda E_s$ steht. Dann gilt für das charakteristische Polynom

$$P_A(t) := \det(A - tE_n) = (-1)^s (t-\lambda)^s \det(C - tE_{n-s}) .$$

Folglich ist $s \leq \mu(P_A; \lambda)$. □

Der Fall $\dim(\mathrm{Eig}(F; \lambda)) = \mu(P_A; \lambda)$ ist von besonderem Interesse:

**Satz 48.2** *Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum, $F \in \mathrm{End}(V)$ und $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) \in M(n, K)$ die darstellende Matrix bezüglich einer beliebigen Basis $\mathcal{A}$ von $V$. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

i) *$F$ ist diagonalisierbar.*

ii) *Das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren und es gilt $\dim(\mathrm{Eig}(F; \lambda)) = \mu(P_A; \lambda)$ für jeden Eigenwert $\lambda$ von $F$.*

iii) *Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von $F$, dann gilt $V = \mathrm{Eig}(F; \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Eig}(F; \lambda_k)$.*

*Bemerkung:* ii) liefert damit das entscheidende Kriterium für Diagonalisierbarkeit: Das charakteristische Polynom muß in Linearfaktoren zerfallen und die Dimensionen der Eigenräume müssen gleich den Vielfachheiten der Nullstellen sein.

*Beweis.* i)⇒ii) Ist $F$ diagonalisierbar, so ordnen wir die zugehörige Basis aus Eigenvektoren wie folgt:

$$\mathcal{B} = (v_1^{(1)}, \ldots, v_{s_1}^{(1)}, v_1^{(2)}, \ldots, v_{s_2}^{(2)}, \ldots, v_1^{(k)}, \ldots, v_{s_k}^{(k)}) .$$

Dabei ist $(v_1^{(i)}, \ldots, v_{s_i}^{(i)})$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(F; \lambda_i)$, und insbesondere gilt $F(v_j^{(i)}) = \lambda_i v_j^{(i)}$ für $1 \leq j \leq s_i$. In dieser Basis gilt für das charakteristische Polynom

$$P_F(t) = (\lambda_1 - t)^{s_1} (\lambda_2 - t)^{s_2} \cdots (\lambda_k - t)^{s_k} ,$$

welches somit die Eigenschaften ii) besitzt.

ii)⇒iii) Durch $W = \mathrm{Eig}(F; \lambda_i) + \cdots + \mathrm{Eig}(F; \lambda_k)$ werde ein Untervektorraum von $V$ definiert. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear

unabhängig sind, gilt $W = \mathrm{Eig}(F;\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Eig}(F;\lambda_k)$. Dann folgt $\dim(W) = s_1 + \cdots + s_k = n$ und somit $W = V$.

iii)⇒i) Sei $\mathcal{B}_i = (v_1^{(i)}, \ldots, v_{s_i}^{(i)})$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(F;\lambda_i)$. Dann ist

$$\mathcal{B} = (v_1^{(1)}, \ldots, v_{s_1}^{(1)}, v_1^{(2)}, \ldots, v_{s_2}^{(2)}, \ldots, v_1^{(k)}, \ldots, v_{s_k}^{(k)})$$

eine Basis von $V$. Wegen $F(v_j^{(i)}) = \lambda_i v_j^{(i)}$ für $1 \le j \le s_i$ ist $\mathcal{B}$ eine Basis aus Eigenvektoren von $F$, d.h. $F$ ist diagonalisierbar. □

Wir sehen uns ein Beispiel zur Diagonalisierung an:

**Beispiel 48.3** Es sei $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch

$$F(x,y,z) := (y - z,\ 3x + 2y - 3z,\ 2x + 2y - 3z)\ .$$

*1. Schritt: Bestimmung der darstellenden Matrix bezüglich einer Basis.* Die Vektoren $v = (x,y,z)$ und $w = (y - z,\ 3x + 2y - 3z,\ 2x + 2y - 3z)$ sind bereits in der Standardbasis $\mathcal{A} = (e_1, e_2, e_3)$ des $\mathbb{R}^3$ dargestellt. Daraus lesen wir

$$F(e_1) = 3e_2 + 2e_3\ , \qquad F(e_2) = e_1 + 2e_2 + 2e_3\ , \qquad F(e_3) = -e_1 - 3e_2 - 3e_3$$

ab. Dann ist die darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis $A = (a_{ij}) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$ gegeben durch $F(e_j) = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \cdot e_i$. Wir lesen ab:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\ .$$

(Die Bilder der Basisvektoren ergeben die Spalten von $A$.)

*2. Schritt: Berechnung des charakteristischen Polynoms.* Zu berechnen ist $\det(A - t \cdot E_3)$, z.B. durch elementare Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix:

$$\det(A - t\cdot E_3) = \det\begin{pmatrix} -t & 1 & -1 \\ 3 & 2-t & -3 \\ 2 & 2 & -3-t \end{pmatrix} \overset{P_{13}}{=} -\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3-t \\ 3 & 2-t & -3 \\ -t & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{Q_{12}(-\frac{3}{2})\cdot Q_{13}(\frac{t}{2})}{=} -\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3-t \\ 0 & -1-t & \frac{3}{2}+\frac{3}{2}t \\ 0 & 1+t & -1-\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{Q_{23}(1)}{=} -\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3-t \\ 0 & -1-t & \frac{3}{2}+\frac{3}{2}t \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} = -2(-1-t)(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}t^2) = (1+t)(1-t^2)$$

$$= -(t-1)(t-(-1))^2\ .$$

Damit zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren. Seine Nullstellen sind $\lambda_1 = 1$ mit Vielfachheit $\mu(P_A, 1) = 1$ und $\lambda_2 = -1$ mit Vielfachheit

$\mu(P_A, -1) = 2$.

*3. Schritt: Bestimmen der Eigenräume.* Zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ lösen wir das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda_1 \cdot E_3)x = 0$ durch elementare Zeilenumformungen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \overset{Q_{12}(3)\,Q_{13}(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix} \overset{Q_{23}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{Q_{12}(-\frac{1}{4})}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -6 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{S_1(-1)\,S_2(\frac{1}{4})}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Damit gilt $\dim(\mathrm{Eig}(F; 1)) = 1$, genauer

$$\mathrm{Eig}(F; 1) = \mathbb{R}v_1^{(1)} , \quad v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Zur Bestimmung des Eigenraums $\mathrm{Eig}(F; -1)$ ist das LGS $(A + E_3)x = 0$ zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{Q_{12}(-3)\,Q_{13}(-2)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Damit gilt $\dim(\mathrm{Eig}(F; 1)) = 2$, und die Lösungsvektoren sind

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_1 + w_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} .$$

Damit finden wir die beiden Basisvektoren

$$v_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad v_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Also sind die Dimensionen der Eigenräume gleich der Vielfachheit der Nullstellen, und $F$ ist diagonalisierbar. Eine Basis von $V$, welche $F$ diagonalisiert, ist also

$$\mathcal{B} = \Big( \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big) , \quad \Rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

In dieser Basis gilt

$$\Lambda := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \qquad \triangleleft$$

Über die Diagonalisierung lassen sich Polynome und sogar geeignete Potenzreihen von Matrizen bequem ausrechnen. Es sei $A = S \cdot \Lambda \cdot S^{-1} \in M(n, K)$ diagonalisierbar, wobei $\Lambda = (\lambda_{ij})$ mit $\lambda_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i \in M(n, K)$ die aus den Eigenwerten gebildete Diagonalmatrix ist und $S \in GL(n, K)$ die Transformation in die Eigenbasis vermittelt, d.h. die $i$-te Spalte von $S$ ist Eigenvektor zu $\lambda_i$. Dann gilt $A^k = S \cdot \Lambda^k \cdot S^{-1}$ mit $\Lambda^k = (\lambda_i^k \delta_{ij})$. Insbesondere ist $A^0 = E_n$ zu setzen. In der Lösungstheorie für Differentialgleichungen besonders wichtig ist $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$. Diese Matrix-Exponentialreihe konvergiert für beliebige $A \in M(n, K)$. Für diagonalisierbare Matrizen läßt sie sich ausrechnen zu $\exp(A) = S \cdot \exp(\Lambda) \cdot S^{-1}$.

**Beispiel 48.4** Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ aus Beispiel 47.12. Dann ist

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix} \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 16 & -20 & -14 \\ -5 & 10 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 16e^{-1} - 10e^2 + 24e^4 & -20e^{-1} + 20e^2 & -14e^{-1} - 10e^2 + 24e^4 \\ -15e^2 + 15e^4 & 30e^2 & -15e^2 + 15e^4 \\ -16e^{-1} + 10e^2 + 6e^4 & 20e^{-1} - 20e^2 & 14e^{-1} + 10e^2 + 6e^4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

◁

In Beispiel 48.3 ist $\Lambda^2 = E_3$ und damit auch $A^2 = (S\Lambda S^{-1}) \cdot (S\Lambda S^{-1}) = E_3$ oder

$$(A - \lambda_1 E_3)(A - \lambda_2 E_3) = 0 \, .$$

Ganz allgemein gilt, wenn man im charakteristischen Polynom $P_A(t)$ die formale Variable $t$ durch $A$ ersetzt, der

**Satz 48.5 (Cayley-Hamilton)** *Es sei $F \in \mathrm{End}(V)$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums und $P_F \in K[t]$ das charakteristische Polynom. Dann gilt $P_F(F) = 0 \in \mathrm{End}(V)$. Ausgedrückt durch Matrizen: Für beliebige $A \in M(n, K)$ mit charakteristischem Polynom $P_A \in K[t]$ gilt $P_A(A) = 0$.*

Der Beweis findet sich z.B. in G. Fischer, Lineare Algebra, §4.5. □

In Beispiel 48.3 hatten wir $P_A(t) = (t-1)(t+1)^2$ und damit $(A - E_3)(A + E_3)^2 = 0$. Tatsächlich gilt bereits $(A - E_3)(A + E_3) = 0$ für ein Polynom kleineren Grades. Allgemein läßt sich zu $F \in \mathrm{End}(V)$ ein eindeutiges *Minimalpolynom* $M_F[t]$ finden mit $M_F(F) = 0$ bzw. $M_A(A) = 0$. Das Minimalpolynom ist stets Teiler des charakteristischen Polynoms und ein wichtiges Hilfsmittel in Beweisen.

Zum Abschluß der Betrachtungen zur Diagonalisierbarkeit untersuchen wir folgendes Problem: Gegeben seien zwei diagonalisierbare Endomorphismen

$F, G \in \mathrm{End}(V)$. Unter welchen Bedingungen sind $F, G$ *simultan diagonalisierbar*, d.h. es gibt eine Basis von $V$ aus Eigenvektoren von $F$ und $G$ gleichzeitig?

**Satz 48.6** *Zwei diagonalisierbare Endomorphismen $F, G \in \mathrm{End}(V)$ sind genau dann simultan diagonalisierbar, wenn sie miteinander kommutieren, d.h. wenn $F \circ G = G \circ F$.*

*Beweis.* ($\Rightarrow$) Sind $F, G$ simultan diagonalisierbar, dann existiert eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von $V$ mit $F(v_i) = \lambda_i v_i$ und $G(v_i) = \mu_i v_i$. Dann gilt für einen beliebigen Vektor $v = \sum_{i=1}^n \kappa_i v_i \in V$

$$(F \circ G)(v) = F(G(\sum_{i=1}^n \kappa_i v_i)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \kappa_i \mu_i v_i = (G \circ F)(v) \; .$$

($\Leftarrow$) 1) Wir zerlegen den Vektorraum $V$ in die Eigenräume:

$$\begin{aligned} V &= \mathrm{Eig}(F; \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Eig}(F; \lambda_k) \\ &= \mathrm{Eig}(G; \mu_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Eig}(G; \mu_l) \; . \end{aligned}$$

Kommutieren $F$ und $G$, dann gilt $F(\mathrm{Eig}(G; \mu_j)) \subseteq \mathrm{Eig}(G; \mu_j)$ für alle $1 \leq j \leq l$, denn für $w_j \in \mathrm{Eig}(G; \mu_j)$ folgt

$$G(F(w_j)) = F(G(w_j)) = F(\mu_j w_j) = \mu_j F(w_j) \; .$$

2) Sei nun $W_{ij} := \mathrm{Eig}(F; \lambda_i) \cap \mathrm{Eig}(G; \mu_j)$. Dann ist $W_{ij} \subseteq V$ ein Untervektorraum, und es gilt $\mathrm{Eig}(F; \lambda_i) = W_{i1} \oplus \cdots \oplus W_{il}$. Denn sei $v_i \in \mathrm{Eig}(F; \lambda_i)$, dann gibt es $w_1 \in \mathrm{Eig}(G; \mu_1), \ldots, w_l \in \mathrm{Eig}(G; \mu_l)$ mit $v_i = w_1 + \cdots + w_l$ (verwende Basis von $V$ aus Eigenvektoren von $G$). Anwenden von $F$ liefert

$$F(v_i) = F(w_1) + \cdots + F(w_l) = \lambda_i v_i = \lambda_i w_1 + \cdots + \lambda_i w_l \; .$$

Nun ist $F(w_j) \subseteq \mathrm{Eig}(G; \mu_j)$, und da Vektoren $w_j, w_j'$ linear unabhängig sind für $j \neq j'$, folgt $F(w_j) = \lambda_i w_j$ für alle $1 \leq j \leq l$. Damit ist $w_j \subseteq \mathrm{Eig}(F; \lambda_i)$, also $\mathrm{Eig}(F; \lambda_i) = W_{i1} + \cdots + W_{il}$, und aus der linearen Unabhängigkeit folgt die Behauptung.

3) Sei $\mathcal{B}_{ij} = (v_1^{(ij)}, \ldots v_{s_{ij}}^{(ij)})$ eine Basis von $W_{ij}$, dann ist

$$(\mathcal{B}_{11}, \ldots, \mathcal{B}_{1l}, \mathcal{B}_{21}, \ldots, \mathcal{B}_{2l}, \ldots, \mathcal{B}_{k1}, \ldots, \mathcal{B}_{kl})$$

eine Basis von $V$, in der $F$ und $G$ simultan diagonalisierbar sind, mit $F(v_r^{(ij)}) = \lambda_i v_r^{(ij)}$ und mit $G(v_r^{(ij)}) = \mu_j v_r^{(ij)}$. □

Simultane Diagonalisierbarkeit (in verallgemeinerter Form) ist wichtig in der Quantenmechanik, wo man in einem System zwei physikalische Größen nur dann gleichzeitig messen kann, wenn die entsprechenden Endomorphismen (des Hilbert-Raums) miteinander kommutieren. Im Wasserstoffatom sind das die Energie, der Gesamtdrehimpuls, eine Komponente des Drehimpulses (üblicherweise die $z$-Komponente) und der Spin. Entsprechend schreibt sich der Hilbert-Raum als direkte Summe von Eigenunterräumen der linearen Abbildungen, welche diesen physikalischen Größen entsprechen.

# 49 Trigonalisierung

Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus erfordert zwei Bedingungen:

(1) Das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren.

(2) Die Vielfachheit der Nullstellen ist gleich der Dimension der Eigenräume.

Wir werden nun sehen, daß für Endomorphismen, die nur (1) erfüllen, eine Basis existiert, so daß die darstellende Matrix eine obere Dreiecksmatrix ist. Das genügt zur Lösung von Gleichungssystemen.

**Definition 49.1** Sei $F \in \mathrm{End}(V)$. Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ heißt *$F$-invariant*, wenn $F(W) \subseteq W$.

Offenbar sind die Eigenräume $\mathrm{Eig}(F;\lambda)$ automatisch $F$-invariant. Für die Trigonalisierung sind invariante Unterräume interessant, die keine Eigenräume sind.

**Satz 49.2** *Sei $W \subseteq V$ ein $F$-invarianter Unterraum und $F|_W : W \to W$ die Einschränkung von $F$ auf $W$. Dann ist das charakteristische Polynom $P_{F|_W}(t)$ ein Teiler von $P_F(t)$.*

*Beweis.* Sei $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = r \leq n$. Wir ergänzen eine Basis $\mathcal{B}|_W$ von $W$ zu einer Basis $\mathcal{B} = (\mathcal{B}|_W, \mathcal{B}')$ von $V$. Sei $A|_W := M^{\mathcal{B}|_W}_{\mathcal{B}|_W}(F|_W)$, dann gilt

$$A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} A|_W & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}.$$

Damit ist $P_A(t) = \det(A - t \cdot E_n) = P_{A|_W}(t) \cdot \det(A' - t \cdot E_{n-r})$. □

Sei $F \in \mathrm{End}(K^n)$ in der Standardbasis durch eine obere Dreiecksmatrix $A \in M(n, K)$, d.h. $a_{ij} = 0$ für $i > j$, dargestellt. Definieren wir $W_i := \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_r)$, dann gilt $F(W_r) \subseteq W_r$, d.h. alle $W_r$ mit $1 \leq r \leq n$ sind $F$-invariant. Abstrakter formuliert:

**Definition 49.3** Eine *Fahne* $(V_r)$ in einem $n$-dimensionalen Vektorraum $V$ ist eine Kette

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \cdots \subseteq V_n = V$$

von Untervektorräumen mit $\dim(V_r) = r$. Ist $F \in \mathrm{End}(V)$, dann heißt die Fahne $F$-invariant, wenn $F(V_r) \subseteq V_r$ für alle $0 \leq r \leq n$.

Jede Basis von $V$ definiert eine Fahne. Entscheidend ist, daß in einer $F$-invarianten Fahne gilt $F(V_1) \subseteq V_1$ mit $\dim(V_1) = 1$, so daß es einen Eigenvektor von $F$ geben muß. Aus der Definition folgt direkt:

**Satz 49.4** *Für $F \in \mathrm{End}(V)$ sind folgende Bedingungen äquivalent:*

i) *Es gibt eine $F$-invariante Fahne von $V$.*

ii) *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von $V$, so daß $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.*

*Ist das der Fall, dann heißt $F$ trigonalisierbar.*

Nun der entscheidende Satz:

**Satz 49.5** *Für $F \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$ sind folgende Bedingungen äquivalent:*

i) *$F$ ist trigonalisierbar.*

ii) *Das charakteristische Polynom von $F$ zerfällt in Linearfaktoren, d.h.*

$$P_F(t) = (-1)^n(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)\ , \qquad \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in K\ .$$

*Insbesondere gilt: Jeder Endomorphismus eines endlich-dimensionalen komplexen Vektorraums ist trigonalisierbar.*

*Beweis.* i)⇒ii) ist klar, denn ist die darstellende Matrix $A$ von $F$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ aus Satz 49.4 eine obere Dreiecksmatrix, so gilt $T_F(t) = P_A(t) = \det(A - t\cdot E_n) = (a_{11}-t)\cdots(a_{nn}-t)$, d.h. $\lambda_i = a_{ii}$.

ii)⇒i) durch Induktion nach $n = \dim(V)$. Der Fall $n = 1$ ist klar. Sei also $n \geq 2$, dann wählen wir einen Eigenvektor $v_1$ zum Eigenwert (Nullstelle) $\lambda_1$ und ergänzen $v_1$ zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, w_1, \ldots, w_{n-1})$ von $V$. Dann ist

$$V = V_1 \oplus W \qquad \text{mit} \quad V_1 := \mathrm{span}(v_1)\ ,\ W = \mathrm{span}(w_1,\ldots,w_{n-1})\ .$$

Nun ist $V_1$ ein $F$-invarianter Untervektorraum, $W$ im allgemeinen aber nicht:

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)\ .$$

Diese Darstellung definiert zwei lineare Abbildungen

$$G : W \to W\ , \qquad G(w_j) = \sum_{i=1}^{n-1} B_{ij}\cdot w_i\ ,$$
$$H : W \to V_1\ , \qquad H(w_j) = a_j \cdot v_1\ .$$

Nun gilt für das charakteristische Polynom $P_A(t) = -(t-\lambda_1)P_B(t)$. Da $P_A(t)$ nach Voraussetzung in Linearfaktoren zerfällt, zerfällt auch $P_B(t)$ in Linearfaktoren. Nach Induktionsvoraussetzung ist die durch $B$ definierte lineare Abbildung $G \in \mathrm{End}(W)$ trigonalisierbar. Es gibt also eine $G$-invariante Fahne $\{0\} = W_0 \subseteq W_1 \subseteq$

$\cdots \subseteq W_{n-1} = W$. Wir setzen $V_r := V_1 + W_{r-1}$ für $1 \leq r \leq n$. Ist $v = \mu v_1 + w \in V_r$, also $w \in W_{r-1}$, dann gilt

$$F(v) = \mu F(v_1) + F(w) = \mu\lambda_1 v_1 + G(w) + H(w) \in V_1 + W_{r-1}$$

wegen $H(w) \in V_1$ und $G(w) \in W_{r-1}$. Somit ist $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V$ eine $F$-invariante Fahne, und $F$ ist trigonalisierbar. □

**Beispiel 49.6** Eine gedämpfte Schwingung wird durch die Differentialgleichung

$$\ddot{x}\,(t) + 2\mu\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0\,, \qquad x(0) = x_0\,,\ \dot{x}(0) = v_0$$

beschrieben. Wir setzen $y_1(t) = x(t)$, $y_2(t) = \dot{x}(t)$, dann ergibt sich ein System von zwei gekoppelten linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{y} = A \cdot y \qquad \text{mit} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\,, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix}\,, \quad y(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}\,.$$

Da $A$ unabhängig von $t$ ist, ist die formale (und korrekte) Lösung gegeben durch

$$y(t) = \exp(At) \cdot y(0) \quad \text{mit} \quad \exp(At) = E_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{A \cdots A}_{n}\,,$$

jedoch lassen sich diese Produkte so nicht leicht berechnen. Der Ausweg besteht in der Trigonalisierung von $A$.

Zunächst hat $P_A(t) = t^2 + 2\mu t + \omega^2$ die komplexen Nullstellen $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$. Für $\mu = \omega$ hat die Nullstelle $\lambda = -\mu$ die Vielfachheit 2, die uns näher interessieren wird. Für $\mu = \omega$ bestimmen wir den Eigenraum zu $\lambda = -\omega$:

$$\begin{aligned} (A + \omega \cdot E_2) \cdot v &= \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix} &\overset{IV_{12}(\omega)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega \end{pmatrix} \cdot t\,. \end{aligned}$$

Damit ist $\dim(\mathrm{Eig}(A; -\omega)) = 1$, aber die Nullstelle hat Vielfachheit 2. Folglich ist $A$ nicht diagonalisierbar.

Zur Trigonalisierung wählen wir die Basis $\mathcal{B} = (v, e_2)$, dann ist

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}}_{S} \begin{pmatrix} -\omega & 1 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{pmatrix}}_{S^{-1}}\,.$$

Somit gilt

$$A^n = S \begin{pmatrix} -\omega & 1 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}^n S^{-1} = S \begin{pmatrix} (-\omega)^n & n(-\omega)^{n-1} \\ 0 & (-\omega)^n \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$\Rightarrow \exp(At) = S \begin{pmatrix} e^{-\omega t} & te^{-\omega t} \\ 0 & e^{-\omega t} \end{pmatrix} S^{-1}$$

und damit insbesondere

$$(S^{-1}y)(t) = \begin{pmatrix} e^{-\omega t} & te^{-\omega t} \\ 0 & e^{-\omega t} \end{pmatrix} S^{-1}y(0)$$

Unter Verwendung von $S^{-1}y = \begin{pmatrix} x \\ \omega x + \dot{x} \end{pmatrix}$ erhalten wir für die 2. Komponente

$$\begin{aligned} & \omega x + \dot{x} = \mathrm{e}^{-\omega t}(\omega x_0 + v_0) \\ \Rightarrow \qquad & \mathrm{e}^{-\omega t}\frac{d}{dt}(\mathrm{e}^{\omega t}x) = \mathrm{e}^{-\omega t}(\omega x_0 + v_0) \\ \Rightarrow \qquad & (\mathrm{e}^{\omega t}x) = const + t(\omega x_0 + v_0)\ , \quad t = 0 \ \Rightarrow \ const = x_0 \\ \Rightarrow \qquad & x(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}(x_0 + t\omega x_0 + tv_0)\ . \end{aligned}$$

Die Lösung beschreibt die Auslenkung $x(t)$ im *aperiodischen Grenzfall*. ◁

Für großes $n$ enthält eine allgemeine obere Dreiecksmatrix $T \in M(n, K)$ noch immer zu viele Einträge $\neq 0$, so daß Berechnungen von Polynomen oder Potenzreihen in $T$ zu aufwendig werden. Es läßt sich zeigen, daß die Basis derart gewählt werden kann, daß die zugehörige darstellende Matrix eines trigonalisierbaren Endomorphismus $F$ block-diagonal ist, wobei die Blöcke selbst obere Dreiecksmatrizen sind:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} T_1 & O & \dots & O \\ O & T_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \dots & O & T_k \end{pmatrix}\ , \quad T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in M(r_i, K)\ .$$

Für Polynome und Potenzreihen werden deshalb nur Potenzen von $T_i \in M(r_i, K)$ benötigt. Diese sind durch folgende Überlegung leicht zu berechnen: Es gilt $T_i = \lambda_i E_{r_i} + N_i$, wobei $N_i \in M(r_i, K)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, deren Diagonalelemente identisch Null sind. Für eine solche Matrix gilt $N_i^d = 0$ für alle $d \geq r_i$. Allgemein heißen Endomorphismen $N$, für die es ein $d \in \mathbb{N}$ gibt mit $N^d = 0$, *nilpotent*. Da $\lambda_i E_{r_i}$ und $N_i$ kommutieren, gilt einfach

$$T_i^p = \sum_{j=0}^{\min(p, r_i - 1)} \binom{p}{j} \lambda_i^{p-j} N_i^j\ .$$

Schließlich kann man durch geeignete Basiswahl den nilpotenten Endomorphismen $N = (n_{kl})$ eine Standardform geben, die *Jordansche Normalform*. In dieser sind auch alle Einträge oberhalb der ersten Nebendiagonalen gleich 0, d.h. $n_{kl} = 0$

für alle $l \neq k{+}1$, und in der ersten Nebendiagonalen ($l = k{+}1$) stehen abwechselnde Folgen von 1 und 0. Genauer gibt es zu $N = (n_{kl}) \in M(r, K)$ mit $N^d = 0$, $d$ minimal, eindeutig bestimmte $s_1, \ldots, s_d \in \mathbb{N}$ mit $r = ds_d + (d-1)s_{d-1} + \cdots + 2s_2 + s_1$ und eine Basis $\mathcal{J}$ von $K^r$, so daß $M_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}(N) = (j_k \delta_{l,k+1})$ mit

$$(j_1, \ldots, j_{r-1}, 0)$$
$$= \Bigg( \underbrace{\underbrace{1, \ldots, 1, 0}_{d}, \ldots, \underbrace{1, \ldots, 1, 0}_{d}}_{s_d}, \underbrace{\underbrace{1, \ldots, 1, 0}_{d-1}, \ldots, \underbrace{1, \ldots, 1, 0}_{d-1}}_{s_{d-1}}, \ldots, \underbrace{\underbrace{0}_{1}, \ldots, \underbrace{0}_{1}}_{s_1} \Bigg) .$$

## 50 Selbstadjungierte und unitäre Endomorphismen

**Definition 50.1** Sei $V$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Ein Endomorphismus $F^* \in \mathrm{End}(V)$ heißt zu $F$ *adjungiert*, wenn

$$\langle v, F(w) \rangle = \langle F^*(v), w \rangle \qquad \forall v, w \in V .$$

**Satz 50.2** *Sei $V$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Falls der zu $F$ adjungierte Endomorphismus $F^* \in \mathrm{End}(V)$ existiert, so gilt:*

i) *$F^*$ ist eindeutig.*

ii) $\ker(F^*) = (\mathrm{im}(F))^\perp$

iii) $\mathrm{im}(F^*) = (\ker(F))^\perp$

*Beweis.* i) Gäbe es zwei Lösungen $F_1^*$ und $F_2^*$ mit $\langle v, F(w) \rangle = \langle F_1^*(v), w \rangle = \langle F_2^*(v), w \rangle$ für alle $v, w \in V$, so folgt

$$0 = \langle F_1^*(v), w \rangle - \langle F_2^*(v), w \rangle = \langle F_1^*(v) - F_2^*(v), w \rangle$$

für alle $v, w$, insbesondere für $w = F_1^*(v) - F_2^*(v)$. Damit ist $F_1^* = F_2^*$.

ii) Sei $v \in \big(\mathrm{im}(F)\big)^\perp$, so ist $0 = \langle v, F(w) \rangle = \langle F^*(v), w \rangle$ für alle $w \in V$, und damit $\ker(F^*) = \big(\mathrm{im}(F)\big)^\perp$.

iii) Sei $w \in \ker(F)$, dann ist $0 = \langle v, F(w) \rangle = \langle F^*(v), w \rangle$ für alle $v \in V$. Das bedeutet $\mathrm{im}(F^*) = (\ker(F))^\perp$. □

**Satz 50.3** *Sei $V$ ein endlich-dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Dann gibt es zu jedem $F \in \mathrm{End}(V)$ den adjungierten Endomorphismus $F^*$, und bezüglich einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von $V$ gilt $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F^*) = \big(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)\big)^* := \overline{\big(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)\big)^t}$.*

*Beweis.* Nach Satz 43.8 besitzt $V$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. In dieser Basis sei $F(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$, d.h. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = (a_{ij})$. Dann gilt

$$\langle v_k, F(v_j) \rangle = \sum_{i=1}^n a_{ij} \langle v_k, v_i \rangle = a_{kj} = \sum_{i=1}^n \langle \overline{a_{ki}} v_i, v_j \rangle .$$

Damit hat $F^*(v_k) := \sum_{i=1}^n b_{ik} v_i$ mit $b_{ik} = \overline{a_{ki}}$ die Eigenschaft eines adjungierten Endomorphismus, und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F^*) = (b_{ij}) = \overline{(a_{ij})^t}$. □

**Definition 50.4** Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus $F \in \mathrm{End}(V)$ heißt

i) *selbstadjungiert* (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ auch *symmetrisch*), wenn $F = F^*$ gilt, d.h. $\langle v, F(w)\rangle = \langle F(v), w\rangle$ für alle $v, w \in V$,

ii) *orthogonal* bzw. *unitär*, wenn $F \circ F^* = F^* \circ F = \mathrm{id}_V$ gilt, d.h. $\langle F(v), F(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$,

iii) *normal*, falls $F \circ F^* = F^* \circ F$ gilt.

Orthogonale, unitäre und selbstadjungierte Endomorphismen sind folglich auch normal. Die Definition überträgt sich wegen Satz 50.3 auf Matrizen: Eine Matrix $A \in M(n, K)$ heißt *selbstadjungiert* oder *hermitesch*, wenn $A = A^* = \overline{A^t}$ gilt, und *orthogonal* bzw. *unitär*, wenn $A^* = A^{-1}$ ist. Es folgt $|\det A| = 1$ für orthogonale bzw. unitäre Matrizen. Die Bedingungen $A^t \cdot A = E_n$ bzw. $A^* \cdot A = E_n$ bedeuten, daß die Spalten von $A$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$ bilden. Analog bedeutet $A \cdot A^t = E_n$ bzw. $A \cdot A^* = E_n$, daß die Zeilen von $A$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$ bilden.

**Satz 50.5**

- $O(n) := \{A \in GL(n;\mathbb{R}) : A^{-1} = A^t\}$ *ist Untergruppe der* $GL(n;\mathbb{R})$ *(orthogonale Gruppe).*
- $SO(n) := \{A \in O(n) : \det A = 1\}$ *ist Untergruppe der* $GL(n;\mathbb{R})$ *(spezielle orthogonale Gruppe).*
- $U(n) := \{A \in GL(n;\mathbb{C}) : A^{-1} = A^*\}$ *ist Untergruppe der* $GL(n;\mathbb{C})$ *(unitäre Gruppe).*
- $SU(n) := \{A \in U(n) : \det A = 1\}$ *ist Untergruppe der* $GL(n;\mathbb{C})$ *(spezielle unitäre Gruppe).*

*Beweis.* Für $A, B \in O(n)$ ist $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^tA^t = (AB)^t$ sowie $(A^{-1})^{-1} = A = (A^{-1})^t$, damit ist $O(n)$ Untergruppe. Für $A, B \in SO(n)$ ist $\det(AB) = (\det A)(\det B) = 1$, damit ist $SO(n)$ Untergruppe. Analog für $U(n)$ und $SU(n)$. □

**Beispiel 50.6** Im $\mathbb{R}^2$ mit dem kanonischen Skalarprodukt ist die Standardbasis eine Orthonormalbasis. Die Bedingung für orthogonale Matrizen lautet

$$O(2) := \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{array}{l} a, b, c, d \in \mathbb{R}\ ,\ A^t \cdot A = E_2 \\ \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \text{ und } ac + bd = 0 \end{array} \right\}.$$

Setzen wir $a = \cos\phi$, $b = \sin\phi$, $c = \sin\theta$, $d = \cos\theta$, so verbleibt $\sin(\phi+\theta) = 0$ mit den beiden verschiedenen Lösungen $\phi = -\theta$ und $\phi = \pi - \theta$. Somit gilt:

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \,:\, \theta \in [0, 2\pi[ \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \,:\, \phi \in [0, 2\pi[ \right\}.$$

Die erste Menge beschreibt Drehungen im $\mathbb{R}^2$ und die zweite eine Kombination aus Drehungen und einer Spiegelung. Das sind gerade die Transformationen im $\mathbb{R}^2$, welche Winkel und Abstände erhalten. Die Gruppe $SO(2)$ besteht nur aus der ersten durch $\theta$ parametrisierten Menge. ◁

**Satz 50.7** *Ist $F \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal bzw. unitär, so gilt*

i) $\|F(v)\| = \|v\| \qquad \forall v \in V.$

ii) *Ist umgekehrt $\|F(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$, so ist $F$ orthogonal bzw. unitär.*

iii) $v \perp w \quad \Rightarrow \quad F(v) \perp F(w).$

iv) *$F$ ist Isomorphismus und $F^{-1}$ ist ebenfalls orthogonal bzw. unitär.*

v) *Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwert von $F$, so ist $|\lambda| = 1$.*

*Beweis.* i) und iii) sind klar.

ii) In euklidischen oder unitären Vektorräumen gelten die Polarisationsformeln

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= \tfrac{1}{4}\big(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 - \mathrm{i}\|v+\mathrm{i}w\|^2 + \mathrm{i}\|v-\mathrm{i}w\|^2\big) && \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C}\,, \\ \langle v, w\rangle &= \tfrac{1}{4}\big(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\big) && \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Somit folgt aus ii) auch $\langle F(v), F(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$.

iv) Aus i) folgt, daß $F$ injektiv ist: Wäre $F(v) = F(w)$, so ist $0 = \|F(v-w)\| = \|v-w\|$. Wegen $F(F^*(v)) = v$ ist $F$ surjektiv, also bijektiv. Die Ersetzung $v \mapsto F^{-1}(v)$ liefert Orthogonalität/Unitarität von $F^{-1}$.

v) Ist $v$ Eigenvektor von $F$ zum Eigenwert $\lambda$, so ist

$$\|v\| = \|F(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| \qquad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1 \text{ wegen } v \neq 0\,. \qquad \square$$

Damit erhalten orthogonale/unitäre Endomorphismen die Normen, Abstände und Winkel und haben somit eine wichtige geometrische Interpretation als *Isometrien.*

**Satz 50.8** *Ist $F \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert, dann sind alle Eigenwerte von $F$ reell. Insbesondere hat eine hermitesche Matrix nur reelle Eigenwerte.*

*Beweis.* Ist $F(v) = \lambda v$ mit $v \neq 0$, so gilt

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle v, F(v)\rangle = \langle F(v), v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$$

und damit $\lambda = \overline{\lambda}$. $\square$

**Satz 50.9** *Es sei $(V, \langle\ .\ \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$ normal. Dann gilt:*

i) $\ker F = \ker F^*$

ii) *Ist $\lambda$ Eigenwert von $F$, dann ist $\bar{\lambda}$ Eigenwert von $F^*$, und es gilt* $\mathrm{Eig}(F;\lambda) = \mathrm{Eig}(F^*;\bar{\lambda})$.

iii) *Sind $\lambda_1, \lambda_2$ Eigenwerte von $F$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so gilt* $\mathrm{Eig}(F;\lambda_1) \perp \mathrm{Eig}(F;\lambda_2)$.

*Beweis.* i) Sei $v \in \ker F$, so folgt

$$0 = \langle F(v), F(v)\rangle = \langle F^* \circ F(v), v\rangle = \langle F \circ F^*(v), v\rangle = \langle F^*(v), F^*(v)\rangle\ ,$$

also auch $v \in \ker F^*$. Ebenso $\ker F^* \subseteq \ker F$.

ii) Es gilt $(F - \lambda \mathrm{id}_V)^* = F^* - \overline{\lambda}\mathrm{id}_V$. Mit $F$ ist auch $F - \lambda\mathrm{id}_V$ normal. Dann folgt aus i)

$$\mathrm{Eig}(F;\lambda) = \ker(F - \lambda\,\mathrm{id}_V) = \ker(F - \lambda\,\mathrm{id}_V)^* = \ker(F^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}_V) = \mathrm{Eig}(F^*;\bar{\lambda})\ .$$

Sei $v \in \mathrm{Eig}(F;\lambda_1)$, $w \in \mathrm{Eig}(F;\lambda_2)$, so folgt

$$\lambda_2\langle v, w\rangle = \langle v, \lambda_2 w\rangle = \langle v, F(w)\rangle = \langle F^*(v), w\rangle = \langle \overline{\lambda_1} v, w\rangle = \lambda_1\langle v, w\rangle$$

also $0 = (\lambda_2 - \lambda_1)\langle v, w\rangle$. □

Trigonalisierung ist entscheidend für:

**Theorem 50.10** *Es sei $(V, \langle\ .\ \rangle)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$ normal. Dann besitzt $V$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ aus Eigenvektoren von $F$. Insbesondere ist $F$ diagonalisierbar.*

Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von $F$ und $\mathrm{Eig}(F;\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, k$ die zugehörigen paarweise orthogonalen Eigenräume. Nach Satz 43.8 besitzt $\mathrm{Eig}(F;\lambda_i)$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_i = (v_{i1}, \ldots, v_{in_i})$. Nach Satz 50.9 ist $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ ein Orthonormalsystem aus Eigenvektoren von $F$. Wir zeigen: $\mathcal{B}'$ ist Orthonormalbasis von $V$.

Sei $W := \bigoplus_{i=1}^k \mathrm{Eig}(F;\lambda_i)$. Nach Satz 43.11 ist $V = W \oplus W^\perp$. Angenommen, es gäbe ein $0 \neq v \in W^\perp$. Dann gilt für beliebiges $w \in W$ die Identität $\langle F(v), w\rangle = \langle v, F^*(w)\rangle = 0$, da $F^*(W) \subseteq W$. Somit ist $F\big|_{W^\perp} \in \mathrm{End}(W^\perp)$ und damit nach Satz 49.5 in $W^\perp$ trigonalisierbar. Insbesondere besitzt $F\big|_{W^\perp}$ einen Eigenvektor (Definition 49.3). Dieser ist aber auch Eigenvektor von $F \in \mathrm{End}(V)$ und damit bereits in $W$ enthalten, Widerspruch. □

Wir können nicht erwarten, daß sich dieses Theorem auf den reellen Fall überträgt, da Endomorphismen eines reellen Vektorraums nicht trigonalisierbar sein müssen. Insbesondere lassen sich die Matrizen aus $SO(2)$ nicht diagonalisieren. Es gilt aber:

**Satz 50.11** *Jeder selbstadjungierte Endomorphismus eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums $V$ ist diagonalisierbar.*

*Beweis.* Wie im vorigen Theorem bis zur Konstruktion von $F \in \mathrm{End}(W^\perp)$. Einziger Unterschied ist, daß $W^\perp = V$ sein könnte. Offenbar ist $F\big|_{W^\perp}$ auch auf $W^\perp$ selbstadjungiert. Das charakteristische Polynom zerfällt zunächst über $\mathbb{C}$ in komplexe Linearfaktoren. Nach Satz 50.8 sind alle Eigenwerte reell, d.h. das charakteristische Polynom zerfällt sogar in reelle Linearfaktoren. Damit ist $F\big|_{W^\perp} \in \mathrm{End}(W^\perp)$ in $W^\perp$ reell trigonalisierbar, und es gibt einen Eigenvektor.□

**Satz 50.12** *Ist $A \in M(n, \mathbb{K})$ eine reelle symmetrische bzw. hermitesche Matrix, dann gibt es eine orthogonale bzw. unitäre Matrix $T \in O(n)$ bzw. $T \in U(n)$ mit*

$$A = T\Lambda T^* \,, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \,,$$

*wobei $\lambda_i \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von $A$ sind.*

*Beweis.* Die Matrix $A = \overline{A^t} = (a_{ij})$, also $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$, definiert einen selbstadjungierten Endomorphismus $F = F^* \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ durch $F(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, wobei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis ist. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von $F$, d.h. $F(v_i) = \lambda_i v_i$. Wir zerlegen $v_i$ nach der Standardbasis: $v_i = \sum_{k=1}^n t_{ki} e_k$. Aus der Orthonormalität folgt $\langle v_i, v_j \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{t_{ki}} t_{kj} = \delta_{ij}$, und damit $T^*T = E_n$ für $T = (t_{ij})$. Andererseits gilt nach der Parsevalschen Gleichung

$$\delta_{kj} = \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle e_k, v_i \rangle \langle v_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n t_{ki} \overline{t_{ji}} \,,$$

also $TT^* = E_n$ und damit $T \in O(n)$ bzw. $T \in U(n)$. Nun gilt

$$F(v_k) = \sum_{j=1}^n t_{jk} F(e_j) = \sum_{i,j=1}^n t_{jk} a_{ij} e_i = \lambda_k v_k = \sum_{l=1}^n \lambda_k t_{lk} e_l \,.$$

Da die $e_i$ linear unabhängig sind, folgt $\sum_{j=1}^n a_{ij} t_{jk} = t_{ik} \lambda_k$ für alle $k$. Wir multiplizieren mit $\overline{t_{lk}}$ und summieren über $k$:

$$\sum_{k,j=1}^n a_{ij} t_{jk} \overline{t_{lk}} = a_{il} = \sum_{k=1}^n t_{ik} \lambda_k \overline{t_{lk}} = (T\Lambda T^*)_{il} \,. \qquad \square$$

Wir wissen, daß die Spalten $(v_1, \ldots, v_n)$ von $T$ eine Orthonormalbasis bilden, mit $Av_i = \lambda_i v_i$. Die Matrix $T$ dreht also die Standardorthonormalbasis $(e_i)$ in die Eigenbasis $(v_1, \ldots, v_n)$, in der $A$ diagonal ist. Diese Drehung heißt *Hauptachsentransformation*. Sie ist z.B. wichtig bei der Rotation asymmetrischer Körper.

Solchen Körpern läßt sich ein Trägheitstensor zuordnen, was im wesentlichen einer symmetrischen Matrix $I = (I_{kl})$ entspricht. Dann läßt sich das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich Rotation um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ berechnen zu

$$J_\omega = \frac{1}{\|\omega^2\|}\langle \omega, I\omega\rangle = \frac{1}{\|\omega^2\|}\sum_{k,l=1}^{3} I_{kl}\omega_k\omega_l \ .$$

Wir wissen, daß $I$ als symmetrische Matrix diagonalisierbar ist und der $\mathbb{R}^3$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $I$ besitzt. Diese Basisvektoren heißen die *Hauptträgheitsachsen* des Körpers. Es zeigt sich, daß im allgemeinen nur die Rotation um zwei orthogonale Achsen stabil ist, nämlich um die Eigenvektoren von $I$ zum größten und kleinsten Eigenwert. (Aus physikalischen Gründen sind sämtliche Eigenwerte von $I$ positiv.)

Die Drehung der Standardbasis in die Basis der Hauptträgheitsachsen vermittelt durch ein $T \in SO(3)$ parametrisiert man zweckmäßigwerweise durch *Eulersche Winkel*:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Zuerst wird die ONB $(e_1, e_2, e_3)$ um einen Winkel $\alpha$ um $e_3$ gedreht. Es entsteht die ONB $(e_1', e_2', e_3)$. Es folgt eine Rotation um den Winkel $\beta$ um $e_1'$ zur ONB $(e_1', e_2'', e_3'')$. Schließlich dreht man um den Winkel $\gamma$ um $e_3''$.

Ist $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum, dann definiert jeder Endomorphismus $F \in \mathrm{End}(V)$ eine Abbildung $L : V \times V \to \mathbb{K}$ durch $L(v, w) := \langle v, F(w)\rangle$, die linear in der 2. Komponente (Axiom (S1) aus Definition 15.1) und semilinar in der 1. Komponente ist. Abbildungen $L : V \times V \to \mathbb{K}$ mit diesen beiden Eigenschaften heißen *Bilinearformen* bzw. *Sesquilinearformen*. Gilt zusätzlich (S2) aus Definition 15.1, so heißt die Bilinearform *symmetrisch* bzw. die Sesquilinearform *hermitesch*. Wegen

$$\langle v, F(w)\rangle = \langle F^*(v), w\rangle = \overline{\langle w, F^*(v)\rangle}$$

(falls $F^*$ existiert) gilt (S2) für $L(v, w) := \langle v, F(w)\rangle$ genau dann, wenn $F$ selbstadjungiert ist. Schließlich kann man sich fragen, wann (S3) gilt:

**Definition 50.13** Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine symmetrische Bilinearform bzw. hermitesche Sesquilinearform $L : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt

- *positiv semidefinit*, wenn $L(v, v) \geq 0$ für alle $v \in V$,
- *nicht ausgeartet*, wenn $L(v, v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$,

- *positiv definit*, wenn $L$ positiv semidefinit und nicht-ausgeartet ist.

Ein Skalarprodukt auf $V$ ist damit eine positiv definite symmetrische Bilinearform bzw. positiv definite hermitesche Sesquilinearform.

Wir interessieren uns nun für die Frage, wie man entscheiden kann, ob eine symmetrische Bilinearform positiv definit ist (und somit ein Skalarprodukt definiert).

**Satz 50.14** *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Die durch einen selbstadjungierten Endomorphismus $F = F^* \in \mathrm{End}(V)$ über $L(v,w) = \langle v, F(w)\rangle$ definierte Bilinearform bzw. Sesquilinearform $L$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von $F$ positiv sind.*

*Beweis.* Nach Theorem 50.10 bzw. Satz 50.11 besitzt $V$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ aus Eigenvektoren von $F$. Es sei $F(v_i) = \lambda_i v_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ nach Satz 50.8. Dann gilt für einen beliebigen Vektor $v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n \in V$

$$\begin{aligned} L(v,v) = \langle v, F(v)\rangle &= \Big\langle \sum_{j=1}^n \mu_j v_j, \sum_{j=1}^n \mu_i F(v_i)\Big\rangle = \sum_{i,j=1}^n \overline{\mu_j}\mu_i\lambda_i\langle v_i, v_j\rangle \\ &= \lambda_1|\mu_1|^2 + \cdots + \lambda_n|\mu_n|^2\ . \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Allerdings ist die Bestimmung der Eigenwerte meist nur numerisch möglich. Ein einfacheres Kriterium im reellen Fall kann wie folgt erhalten werden:

**Satz 50.15** *Sei $A \in M(n,\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix und $A_k \in M(k,\mathbb{R})$ die linke obere Teilmatrix von $A$ aus $k$ Zeilen und Spalten. Dann ist $A$ genau dann positiv definit, wenn $\det A_k > 0$ für alle $1 \le k \le n$.*

*Beweis.* ($\Rightarrow$) Ist $A = A^t \in M(n,\mathbb{R})$ positiv definit, dann ist $\det A = \det(T\Lambda T^t) = \det\Lambda(\det T)^2 = \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_n > 0$. Die Matrix $A_k$ beschreibt die Einschränkung der durch $A$ definierten Bilinearform auf den Untervektorraum

$$V_k := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ :\ x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}\ .$$

Ist $A$ positiv definit, dann ist auch $\langle x, Ax\rangle > 0$ für alle $x \in V_k$ mit $x \neq 0$. Folglich ist $\det A_k > 0$.

($\Leftarrow$) wird durch Induktion nach $n$ bewiesen. Sei in Blockdarstellung

$$A = A^t = \left(\begin{array}{c|c} B & b \\ \hline b^t & c \end{array}\right) \in M(n,\mathbb{R}) \qquad \begin{array}{l} B = B^t \in M(n-1,\mathbb{R})\ , \quad c \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R}^{n-1}\ \text{(Spaltenvektor)}\ . \end{array}$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt aus $\det A_k = \det B_k > 0$ für $1 \le k \le n-1$, daß $B$ positiv definit ist. Damit gilt $B = T\Lambda T^t$, wobei $T \in O(n-1)$ und $\Lambda \in$

$M(n-1,\mathbb{R})$ eine Diagonalmatrix mit *positiven Eigenwerten* $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}$ von $B$ auf der Diagonale ist. Dann ist

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \Lambda & T^t b \\ \hline b^t T & c \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)^t \\ &= \left(\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E_{n-1} & 0 \\ \hline b^t T\Lambda^{-1} & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \Lambda & 0 \\ \hline 0 & c - b^t T\Lambda^{-1}T^t b \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E_{n-1} & \Lambda^{-1}T^t b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)^t . \end{aligned}$$

Nun ist $\det A = (\det T)^2(\det\Lambda)(c - b^tT\Lambda^{-1}T^tb)$ genau dann positiv, wenn $c - b^tT\Lambda^{-1}T^tb > 0$. Andererseits ist $x^tAx > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $y^t \left(\begin{array}{c|c} \Lambda & 0 \\ \hline 0 & c - b^tT\Lambda^{-1}T^tb \end{array}\right) y > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$. □

*Achtung:* In obiger Darstellung für $A$ ist $\left(\begin{array}{c|c} E_{n-1} & \Lambda^{-1}T^tb \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ keine orthogonale Matrix für $b \neq 0$, so daß $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}, c - b^tT\Lambda^{-1}T^tb$ *nicht* die Eigenwerte von $A$ sind!

## 51 Lineare beschränkte Operatoren auf Hilbert-Räumen

Hilbert-Räume sind unitäre (oder euklidische) Vektorräume $(H, \langle\ ,\ \rangle)$, die bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Metrik vollständig sind, d.h. jede Cauchy-Folge von Vektoren aus $H$ ist konvergent. Diese Vollständigkeit erlaubt es, viele der in endlich-dimensionalen Vektorräumen vorgestellten Strukturen zu übertragen. Hilbert-Räume besitzen immer Orthonormalbasen. In einer wichtigen Klasse, den separablen Hilbert-Räumen, sind diese ONB $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abzählbar und durch das Verfahren von Gram-Schmidt konstruierbar. Damit besitzt jeder Vektor $v \in H$ eine konvergente Fourier-Entwicklung $v = \sum_{n=0}^{\infty}\langle v_n, v\rangle v_n$. Wir behandeln in diesem Abschnitt das Analogon der Endomorphismen endlich-dimensionaler Vektorräume. Dabei spielt der Dualraum eine entscheidende Rolle.

**Definition 51.1** Es sei $(V, \|\ \|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine lineare Abbildung $f : V \to \mathbb{K}$ heißt *beschränkt*, wenn es ein $0 \leq C < \infty$ gibt, so daß für alle $v \in V$ gilt $|f(v)| \leq C\|v\|$.

**Satz 51.2** *Es sei $(V, \|\ \|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$. Die Menge*

$$V' = \mathcal{B}(V,\mathbb{K}) := \{ f : V \to \mathbb{K} \ :\ f \text{ linear und beschränkt } \}$$

*aller linearen beschränkten Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{K}$ ist ein Banach-Raum bezüglich der* Operator-Norm

$$\|f\|_{op} := \sup_{v\in V\ ,\ \|v\|\leq 1} |f(v)| \ .$$

*Dieser Banach-Raum $V'$ heißt der* Dualraum *von $V$.*

*Beweis.* Betrachtet man nur die Linearität, dann ist $V' = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ als Homomorphismus von Vektorräumen selbst wieder ein Vektorraum. Zu zeigen ist jedoch, daß aus $f, g \in V'$ auch $f + g \in V'$ folgt. Das ergibt sich jedoch aus dem Beweis, daß $\| \ \|_{op}$ eine Norm ist. $\|\lambda f\|_{op} = |\lambda| \|f\|_{op}$ ist klar. Die Dreiecksungleichung folgt aus

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{op} &= \sup_{v\in V\ ,\ \|v\|\leq 1} |f(v)+g(v)| \leq \sup_{v\in V\ ,\ \|v\|\leq 1} (|f(v)|+|g(v)|) \\ &\leq \sup_{v\in V\ ,\ \|v\|\leq 1} |f(v)| + \sup_{w\in V\ ,\ \|w\|\leq 1} |g(v)| = \|f\|_{op} + \|g\|_{op} \ . \end{aligned}$$

Schließlich bedeutet $\|f\|_{op} = 0$, daß $f(v) = 0$ für alle $v \in V$, also ist $f$ die Nullabbildung.

Wegen $|f(v) - f(w)| \leq \|f\|_{op} \|v - w\|$ ist $f$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $\|f\|_{op}$, insbesondere stetig. Sei $X = \{v \in V \ : \ \|v\| = 1\}$ die Einheitssphäre in $V$, dann ist die Einschränkung $f|_X : X \to \mathbb{K}$ ebenfalls stetig. In Satz 33.4 hatten wir bewiesen, daß für einen metrischen Raum $X$ der Vektorraum $\mathcal{C}_b(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ stetig } : \|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty\}$ vollständig ist. Hier ist $X = \{v \in V \ : \ \|v\| \leq 1\}$ der Einheitsball und $\|f\| = \|f\|_{op}$. □

In Hilbert-Räumen (vollständigen unitären/euklidischen Verktorräumen) entsteht der Dualraum durch eine besondere Konstruktion. Ein Untervektorraum $U$ eines Hilbert-Raums heißt abgeschlossen, wenn $U \subseteq H$ als Teilmenge metrischer Räume abgeschlossen ist, d.h. wenn der Grenzwert jeder in $H$ konvergenten Folge von Punkten aus $U$ bereits in $U$ enthalten ist.

**Satz 51.3** *Sei $(H, \langle \ , \ \rangle)$ ein Hilbert-Raum und $U \subseteq H$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Dann gilt:*

i) *Zu jedem $v \in H$ existiert genau ein $w \in U$ mit $\|v - w\| = \min_{u\in U} \|v - u\| =: d(v, U)$.*

ii) *Es gilt $v - w \in U^\perp$, so daß $P_U(v) := w$ die orthogonale Projektion von $v$ auf $U$ definiert.*

iii) *$H = U \oplus U^\perp$.*

*Beweis.* i) Sei $\gamma := \inf_{u\in U} \|v - u\|$. Dann gibt es eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Vektoren $u_n \in U$, so daß die Folge $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\gamma_n := \|v - u_n\|$ gegen $\gamma$ konvergiert. In jedem unitären Vektorraum gilt die *Parallelogrammgleichung*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \qquad \text{für alle } v, w \in V \ .$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|^2 &= \|(v - u_n) - (v - u_m)\|^2 \\ &= 2\|v - u_n\|^2 + 2\|v - u_m\|^2 - 4\|v - \tfrac{1}{2}(u_n + u_m)\|^2 \ . \end{aligned}$$

Wegen $\frac{1}{2}(u_n+u_m)\in U$ ist $\gamma\le\|v-\frac{1}{2}(u_n+u_m)\|\le\frac{1}{2}(\|v-u_n\|+\|v-u_m\|)$. Da $\|v-u_n\|$ und $\|v-u_m\|$ gegen $\gamma$ konvergieren, konvergiert auch $\|v-\frac{1}{2}(u_n+u_m)\|^2$ gegen $\gamma$ und $\|u_m-u_n\|^2$ gegen 0 für $m,n\to\infty$. Somit ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Wegen der Vollständigkeit konvergiert diese gegen ein $w\in H$, und wegen der Abgeschlossenheit von $U$ gilt sogar $w\in U$.

Wir zeigen anschließend $v-w\in U^\perp$, dann folgt die Eindeutigkeit von $w$ wie in Satz 43.5.

ii) Sei also $0\neq u\in U$ beliebig und $\lambda:=\frac{\langle v-w,u\rangle}{\|u\|^2}\in\mathbb{K}$. Dann bedeutet die Minimalität $\|v-w\|^2\le\|v-w-\lambda u\|^2$. Andererseits ist

$$\begin{aligned}\|v-w-\lambda u\|^2&=\|v-w\|^2+|\lambda|^2\|u\|^2-\lambda\langle v-w,u\rangle-\overline{\lambda}\langle u,v-w\rangle\\&=\|v-w\|^2-|\lambda|^2\|u\|^2\,,\end{aligned}$$

also $\lambda=0$ und damit $v-w\in U^\perp$.

iii) Somit ist $v=(v-P_U(v))+P_U(v)\in U^\perp+U$, also $H=U+U^\perp$ und $U\cap U^\perp=\{0\}$ nach Satz 43.11. □

**Satz 51.4 (Riesz)** *Sei $H$ ein Hilbert-Raum, $(H',\|\ \|_{op})$ sein Dualraum und $j:H\to H'$ definiert durch $j(v)(w):=\langle v,w\rangle$. Dann gilt:*

i) *$j$ ist antilinear, d.h. $j(\lambda v+\mu w)=\overline{\lambda}j(v)+\overline{\mu}j(w)$.*

ii) *$j$ ist isometrisch, also injektiv.*

iii) *$j$ ist surjektiv, also ein Anti-Isomorphismus. (gilt nicht für Prä-Hilbert-Räume!)*

*Beweis.* i) folgt aus der Definition.

ii) Zu zeigen ist $\|j(v)\|_{op}=\|v\|$ für alle $v\in H$. Das ist klar für $v=0$. Ansonsten ($v\neq0$) betrachten wir

$$\|j(v)\|_{op}=\sup_{w\in H\,,\,\|w\|\le1}|j(v)(w)|=\sup_{w\in H\,,\,\|w\|\le1}|\langle v,w\rangle|\le\|v\|\,,$$

also $\|j(v)\|_{op}\le\|v\|$. Andererseits ist für die spezielle Wahl $j(v)\big(\frac{v}{\|v\|}\big)=\|v\|$ und damit $\|j(v)\|_{op}\ge\|v\|$.

iii) Sei $0\neq f\in H'$ und sei $U:=\ker f\subseteq H$. Nach Definition ist $f$ Lipschitzstetig mit Lipschtz-Konstanten $\|f\|_{op}$, also stetig und deshalb $U=f^{-1}\{0\}$ abgeschlossen als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung.

Da $f\neq0$, gibt es Vektoren $0\neq v\in H$ mit $f(v)\neq0$, insbesondere ist $U\neq H$. Wegen $H=U\oplus U^\perp$ gibt es $0\neq v\in U^\perp$ mit $\|v\|=1$. Sei $\lambda:=f(v)$. Dann gilt für alle $w\in H$

$$f\big(f(w)v-f(v)w\big)=f(w)f(v)-f(v)f(w)=0\,,$$

also $f(w)v - f(v)w \in U$ und weiter

$$0 = \langle \underbrace{v}_{\in U^\perp}, \underbrace{f(w)v - f(v)w}_{\in U} \rangle = f(w)\|v\|^2 - f(v)\langle v, w\rangle \,,$$

also $f(w) = \lambda\langle v, w\rangle = \langle \overline{\lambda} v, w\rangle$ und damit $f = j(\overline{\lambda} v)$. □

Man kann zeigen, daß eine Norm auf $V$ genau dann aus einem Skalarprodukt auf $V$ hervorgeht, wenn die Parallelogrammgleichung gilt, und in diesem Fall liefern die Polarisationsformeln das Skalarprodukt zurück. Da in $H'$ die Parallelogrammgleichung gilt, wird $H'$ mit dieser Konstruktion wieder ein Hilbert-Raum.

Wir nutzen den Rieszschen Darstellungssatz, um die Existenz des *adjungierten Operators* zu beweisen.

**Definition 51.5** Es sei $H$ ein Hilbert-Raum. Ein linearer beschränkter Operator $A$ auf $H$ ist eine lineare Abbildung $A : H \to H$ mit $\|A\|_{op} := \sup_{v\in H\,,\ \|v\|\leq 1} \|Av\| < \infty$. Mit $\mathcal{B}(H)$ wird die Menge aller linearen beschränkten Operatoren auf $H$ bezeichnet.

Analog zu Satz 51.2 beweist man, daß $\mathcal{B}(H)$ ein Banach-Raum ist.

**Satz 51.6** *Es sei $H$ ein Hilbert-Raum und $A \in \mathcal{B}(H)$ ein linearer beschränkter Operator. Dann existiert genau ein linearer beschränkter Operator $A^* \in \mathcal{B}(H)$, der zu $A$ adjungierte Operator, mit $\langle A^* v, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$ für alle $v, w \in H$. Es gilt $\|A^*\|_{op} = \|A\|_{op}$.*

*Beweis.* Für jedes $v \in H$ ist das lineare Funktional $f_v : H \to \mathbb{K}$ mit $f_v(w) := \langle v, Aw\rangle$ beschränkt wegen

$$|f_v(w)| = |\langle v, Aw\rangle| \leq \|v\|\|Aw\| \leq \|A\|_{op}\|v\|\|w\| \,.$$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert genau ein Vektor $A^* v \in H$ mit $f_v = j(A^* v)$, d.h. $f_v(w) = \langle v, Aw\rangle = \langle A^* v, w\rangle$. Die so konstruierte Abbildung $A^* : H \to H$ ist linear:

$$\begin{aligned}\langle A^*(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2), w\rangle &= \langle (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2), Aw\rangle = \overline{\lambda_1}\langle v_1, Aw\rangle + \overline{\lambda_2}\langle v_2, Aw\rangle \\ &= \overline{\lambda_1}\langle A^*(v_1), w\rangle + \overline{\lambda_2}\langle A^*(v_2), w\rangle = \langle \lambda_1 A^*(v_1) + \lambda_2 A^*(v_2), w\rangle,\end{aligned}$$

also $\langle A^*(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) - (\lambda_1 A^*(v_1) + \lambda_2 A^*(v_2)), w\rangle = 0$ für alle $w \in H$, und daraus $A^*(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 A^*(v_1) + \lambda_2 A^*(v_2)$. Für die Operatornormen sei $v \in H$ mit $\|v\| \leq 1$ gegeben, dann gilt mit Cauchy-Schwarz

$$\|A^* v\|^2 = \langle A^* v, A^* v\rangle = \langle v, AA^* v\rangle \leq \|v\|\|AA^* v\| \leq \|A\|_{op}\|A^* v\| \,,$$

also $\|A^*\|_{op} \leq \|A\|_{op}$. Durch analoge Abschätzung von $\|Aw\|$ beweist man die Umkehrung $\|A^*\|_{op} \leq \|A\|_{op}$. Daraus folgt $A^* \in \mathcal{B}(H)$. □

**Satz 51.7** *Für $A \in \mathcal{B}(H)$ gilt:*

i) $\|A^*A\|_{op} = \|A\|_{op}^2$ *(C*-Eigenschaft)*

ii) $\ker A = (\text{im } A^*)^\perp$

iii) $\ker A^* = (\text{im } A)^\perp$

*Beweis.* ii)+iii) folgen wie in Satz 50.2. Wegen $\|A^*A\|_{op} = \sup_{v,\|v\|\leq 1} \|A^*Av\|$ und $\|A^*Av\| \leq \|A^*\|_{op}\|Av\| \leq \|A^*\|_{op}\|A\|_{op}\|v\|$ sowie $\|A^*\|_{op} = \|A\|_{op}$ folgt $\|A^*A\|_{op} \leq \|A\|_{op}^2$. Für die Umkehrung gilt mit Cauchy-Schwarz

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av\rangle = \langle A^*Av, v\rangle \leq \|A^*Av\|\,\|v\| \leq \|A^*A\|_{op}\,\|v\|^2$$

und dann $\|A\|_{op} = \sup_{v\in B_{H_1}} \|Av\| \leq \sqrt{\|A^*A\|_{op}}$. □

Die folgenden Definitionen besonderer Operatoren sind von großer Bedeutung:

**Definition 51.8** Sei $H$ Hilbert-Raum und $A, N, E, P, U, S \in \mathcal{B}(H)$. Mit $\text{id}_H \in \mathcal{B}(H)$ werde der identische Operator bezeichnet, $\text{id}_H v = v$ für alle $v \in H$.

i) $A$ heißt *selbstadjungiert* (oder *hermitesch*), falls $A = A^*$.

ii) $N$ heißt *normal*, falls $N^*N = NN^*$.

iii) $E$ heißt *idempotent*, falls $E^2 = E$.

iv) $P$ heißt *(Orthogonal-)Projektor* oder *(orthogonale) Projektion*, falls $P = P^2 = P^*$.

v) $U$ heißt *unitär*, falls $U^*U = \text{id}_H$ *und* $UU^* = \text{id}_H$.

vi) $S$ heißt *isometrisch* oder *Isometrie*, falls $S^*S = \text{id}_H$.

vii) $S$ heißt *partielle Isometrie*, falls $S^*S = P$ Projektor ist.

Einige offensichtliche Konsequenzen sind:

i) Jeder selbstadjungierte Operator (somit jeder Projektor) und jeder unitäre Operator ist normal.

ii) Für jeden Operator $B \in \mathcal{B}(H)$ ist $B^*B \in \mathcal{B}(H)$ selbstadjungiert. Für $B \in \mathcal{B}(H)$ ist $B + B^*$ selbstadjungiert.

iii) Ist $H$ komplexer Hilbert-Raum, dann besitzt jeder Operator $B \in \mathcal{B}(H)$ eine eindeutige Zerlegung $B = A_1 + \mathrm{i}A_2$ mit $A_1, A_2$ selbstadjungiert: Setze $A_1 := \frac{1}{2}(B + B^*)$ und $A_2 := \frac{1}{2\mathrm{i}}(B - B^*)$.

iv) Jeder unitäre Operator ist isometrisch.

**Lemma 51.9** *Sei $P \in \mathcal{B}(H)$ Projektor. Dann gilt:*

i) $P = 0$ *oder* $\|P\|_{op} = 1$

ii) $\text{im } P = \ker(\text{id}_H - P)$*, insbesondere ist* $\text{im } P$ *abgeschlossen.*

iii) $H = \operatorname{im} P \oplus \ker P$.

*Beweis.* i) folgt aus $\|P\|_{op} = \|P^2\|_{op} = \|P^*P\|_{op} = \|P\|_{op}^2$.

ii) Sei $w \in \operatorname{im} P$, also $w = Pv$ für ein $v \in H$. Dann gilt $(\mathrm{id}_H - P)w = (P - P^2)v = 0$, also $\operatorname{im} P \subseteq \ker(\mathrm{id}_H - P)$. Ist umgekehrt $(\mathrm{id}_H - P)w = 0$, dann $w = Pw \in \operatorname{im} P$.

iii) $H = \ker P \oplus (\ker P)^\perp = \ker P \oplus \overline{\operatorname{im} P^*} = \ker P \oplus \operatorname{im} P$. □

Man kann zeigen:

**Satz 51.10** *In einem komplexen Hilbert-Raum $H$ ist $A \in \mathcal{B}(H)$ genau dann selbstadjungiert, wenn $\langle v, Av\rangle$ reell ist für alle $v \in H$. Es gilt $\|A\|_{op} = \sup_{v\in H\,:\,\|v\|\le 1} |\langle v, Av\rangle|$.*

**Definition 51.11** Ein Operator $A \in \mathcal{B}(H)$ heißt *positiv*, geschrieben $A \ge 0$, falls $\langle v, Av\rangle \ge 0$ für alle $v \in H$. Für selbstadjungierte Operatoren $A, B \in \mathcal{B}(H)$ schreiben wir $A \ge B$, falls $A - B \ge 0$.

Aus der Definition folgt, daß in einem komplexen Hilbert-Raum jeder positive Operator auch selbstadjungiert ist. Sind $A, B$ positiv und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, so ist auch $\alpha A + \beta B \ge 0$. Für alle $B \in \mathcal{B}(H)$ ist $A = B^*B$ positiv, denn $\langle v, B^*Bv\rangle = \langle Bv, Bv\rangle \ge 0$ für alle $v \in H$. Insbesondere ist jeder Projektor positiv wegen $P = P^*P$.

**Definition 51.12** Sei $H$ komplexer Hilbert-Raum und $A \in \mathcal{B}(H)$. Eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Spektralwert* von $A$, wenn die lineare beschränkte Abbildung $A - \lambda\mathrm{id}_H : H \to H$ nicht bijektiv ist. Die Menge $\mathrm{sp}(A)$ aller Spektralwerte von $A$ heißt das *Spektrum von* $A$. Dabei heißt $\lambda$ *Eigenwert*, falls $\ker(A - \lambda\mathrm{id}_H) \ne \{0\}$, d.h. wenn $A - \lambda\mathrm{id}_H$ nicht injektiv ist. Ein Vektor $0 \ne v \in \ker(A - \lambda\mathrm{id}_H)$ heißt Eigenvektor.

Es läßt sich zeigen, daß das Spektrum von $A$ eine lichtleere kompakte Teilmenge der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \;:\; \|z\| \le \|A\|_{op}\}$ ist. Im Gegensatz zum endlichdimensionalen Fall gibt es Spektralwerte $\lambda$, für die $A - \lambda\mathrm{id}_H$ zwar injektiv, aber nicht surjektiv ist.

**Beispiel 51.13** Das Standardbeispiel ist der *Verschiebungsoperator* $S$. Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare ONB in $H$, so wird durch $Sv_n := v_{n+1}$ der Operator $S \in \mathcal{B}(H)$ eindeutig definiert, und nach Zerlegung $v = \sum_{n=0}^\infty c_n v_n$ folgt $\langle Sv, Sv\rangle = \langle v, v\rangle$. Somit ist $S$ eine Isometrie, $S^*S = \mathrm{id}_H$. Dann ist $S - \lambda\mathrm{id}_H$ für beliebige $\lambda$ injektiv. Aber $S$ ist nicht surjektiv, denn $v_0$ liegt nicht im Bild von $S$. Somit ist 0 Spektralwert, aber es gibt keinen einzigen Eigenwert. ◁

Man kann zeigen:

**Theorem 51.14** *Sei $H$ Hilbert-Raum.*

i) *Ein Operator $A \in \mathcal{B}(H)$ ist genau dann selbstadjungiert, d.h. $A = A^*$, wenn das Spektrum von $A$ eine kompakte Teilmenge des reellen Intervalls $[-\|A\|_{op}, \|A\|_{op}]$.*

ii) *Ein Operator $A \in \mathcal{B}(H)$ ist ganau dann positiv, wenn $\mathrm{sp}(A)$ eine kompakte Teilmenge des reellen Intervalls $[0, \|A\|_{op}]$ ist.*

iii) *Ein Operator $P \in \mathcal{B}(H)$ ist genau dann Projektor, wenn $\mathrm{sp}(P) \subseteq \{0, 1\}$ höchstens aus den Zahlen 0 und 1 besteht.*

iv) *Ein Operator $U \in \mathcal{B}(H)$ ist genau dann unitär, d.h. $U^*U = UU^* = \mathrm{id}_H$, wenn das Spektrum von $U$ eine kompakte Teilmenge des Einheitskreises $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ ist.*

*Ferner gilt für normale Operatoren $N$:* $\mathrm{sp}(N^*) = \{\bar{\lambda} \ : \ \lambda \in \mathrm{sp}(N)\}$. *Ist $N$ invertierbar, dann gilt* $\mathrm{sp}(N^{-1}) = \{\lambda^{-1} \ : \ \lambda \in \mathrm{sp}(N)\}$.

Eine zentrale Rolle spielen sogenannte Funktionalkalküle. Ist $f : V \to \mathbb{C}$ in einer Umgebung $V$ des Spektrums eines Operators $A \in \mathcal{B}(H)$ erklärt und dort stetig, so läßt sich der Operator $f(A) \in \mathcal{B}(H)$ definieren. Damit kann z.B. der Betrag $|A| := (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ eines Operators eingeführt werden. Es gilt dann die Polarzerlegung $A = S|A|$, wobei $S \in \mathcal{B}(H)$ eine partielle Isometrie (von $(\ker A)^\perp$ nach $(\ker A^*)^\perp$) ist.

Die Spektraltheorie linearer Operatoren auf Hilbert-Räumen bildet die Grundlage für die mathematische Beschreibung der Quantenmechanik. In vereinfachter Betrachtung werden die Zustände eines Systems durch Vektoren $v \in H$ im Hilbert-Raum beschrieben, und physikalische Größen sind lineare Operatoren $A$ auf $H$. Eine Messung der Größe $A$ überführt den ursprünglichen Zustand $v$ in einen Eigenzustand $v_e$ von $A$, und der zugehörige Eigenwert $\lambda_e$ von $A$ zum Eigenvektor $v_e$ ist der Meßwert. Dieser wird mit einer Wahrscheinlichkeit $|\langle v_e, v\rangle|^2$ gemessen. Tatsächlich benötigt die Quantenmechanik *unbeschränkte Operatoren* und ihre Spektraltheorie, welche einige abweichende Eigenschaften hat.