Prof. Dr. R. Wulkenhaar
I. Ullisch

SS 2014

Probeklausur zur Mathematik für Physiker II

Vorbemerkungen:

- Zur Teilnahme an der 1. Klausur am 25.7.2014 bzw. 10.10.2014 sind erforderlich:
  - (1a) Eine Anmeldung im QISPOS zur 1. Klausur (Modulabschlußprüfung).
  - (2a) Eine Anmeldung im Kursbuchungssystem unter id 1691-1693. Letzer Termin für die Anmeldung ist der 21.7.2014. Bitte schreiben Sie die Klausur in jenen Hörsaal, für den Sie sich angemeldet haben.
- Die Klausureinsicht für die 1. Klausur ist am 12.8.2014 von 10h00 bis 11h00. Der Raum wird noch bekanntgegeben.
- Zur Teilnahme an der 2. Klausur am 10.10.2014 sind erforderlich:
  - (1b) Eine Anmeldung im QISPOS zur 2. Klausur (Modulabschlußprüfung). Falls die 1. Klausur mitgeschrieben und nicht bestanden wurde, kann diese Anmeldung erst ab Eintrag der Ergebnisse der 1. Klausur erfolgen, also erst einige Tage nach Klausureinsicht.
  - (2b) Eine Anmeldung im Kursbuchungssystem unter id 1694. Letzer Termin für die Anmeldung ist der 6.10.2014.
- 5 der folgenden 6 Aufgaben waren Klausuraufgaben im SS 2012.
- Alle Lösungsschritte sind nachvollziehbar zu begründen.
- Die Klausuren werden zusätzlich zu Aufgaben von ähnlicher Art auch einen theoretischen Teil beinhalten, in dem wichtige Definitionen und Sätze des Semesters abgefragt werden.
- Einziges zugelassenes Hilfsmittel ist ein selbst zusammengestelltes A4-Blatt (ein- oder zweiseitig) mit Notizen. Dieses Blatt kann handgeschrieben oder per Computer erstellt sein. Dabei ist jedoch die Schriftgröße so zu wählen, daß (abgesehen von üblichen Brillen) keine optischen Hilfsmittel wie Lupen oder Mikroskope zum Lesen erforderlich sind.
- Insbesondere sind Taschenrechner, Mobiltelephone und ähnliche Hilfsmittel bei der Klausur nicht zulässig.
- Papier (A4) bringen Sie bitte selbst mit. Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite (nicht neues Blatt) begonnen werden.
- Es wird während der Klausur überprüft, ob Ihr Name mit dem auf der Klausur angegebenen übereinstimmt. Bitte bringen Sie deshalb einen Ausweis (o.ä.) mit Lichtbild mit.
- Die Probeklausur wird am 10.7.2014 ab 18h00 im M3 vorgerechnet.

Aufgabe 1. Berechnen Sie folgende Integrale (deren Konvergenz gegebenenfalls zu begründen ist):

(a) $\displaystyle\int_0^1 dx\, \frac{1}{x^2+5x+6}$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\, \frac{1}{3+\cos x}$

(c) $\displaystyle\int_0^e dx\, (\ln x)^2$

Aufgabe 2. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ und $r = \operatorname{rang}(A)$.

Bestimmen Sie Matrizen $L, R \in GL(3,\mathbb{R})$, so daß gilt $A = L \cdot \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot R^{-1}$.

Hinweis: Beschränken Sie sich auf Umformungen, mit denen L eine untere Dreiecksmatrix bleibt.

Aufgabe 3. Es sei $f(x) = x^2$ für $-\pi \le x \le \pi$.

(a) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten $\hat{f}(k) = \langle e_k, f\rangle$ in der Fourierreihe $(Sf)(x) := \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle e_k, f\rangle e_k(x)$, wobei $e_k(x) := e^{\mathrm{i}kx}$ für $k \in \mathbb{Z}$ und $\langle f, g\rangle := \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \overline{f(x)}g(x)$.

(b) Welche Formel ergibt sich aus der Identität $f(x) = (Sf)(x)$? *Hinweis zur Kontrolle:* Für $x = \pi$ folgt aus dieser Formel die bekannte Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Aufgabe 4. Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -9 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in M(3,\mathbb{R})$. Bestimmen Sie alle Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{R}$ von A und die zugehörigen Eigenräume.

Aufgabe 5. Berechnen Sie $\sin(A) := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}$ für $A = \begin{pmatrix} -\frac{3\pi}{4} & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6. Auf dem Vektorraum $P[x]$ der Polynome in $x \in \mathbb{R}_+$ mit reellen Koeffizienten werde durch $\langle p(x), q(x)\rangle := \displaystyle\int_0^{\infty} dt\, e^{-t} p(t) q(t)$ ein Skalarprodukt erklärt.

(a) Bestimmen Sie durch das Verfahren von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis von $U := \operatorname{span}(1, x)$.

(b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $P_U(x^2)$ sowie deren Länge $\|P_U(x^2)\|$.

(c) Berechnen Sie den Kosinus des Winkels zwischen x^2 und $P_U(x^2)$.

Bemerkung: Die Konvergenz der Integrale muß nicht begründet werden. Die Konstruktion nach (a) für $\operatorname{span}(1, x, \dots, x^n)$ führt (bis auf Vorzeichen) auf die *Laguerre-Polynome*.