Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 2014**
I. Ullisch

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: Mittwoch, 23.4.2014 bis 12h00, in den Briefkästen Blatt 2

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie, daß die Signumfunktion

$$\mathrm{sign} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -1 & , \text{falls } x < 0 \\ 0 & , \text{falls } x = 0 \\ 1 & , \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

auf jedem Intervall $[a, b]$, $-\infty < a \leq b < \infty$, integrierbar ist.
Berechnen Sie $\int_a^b dx\, \mathrm{sign}(x)$.

(b) Zeigen Sie, daß die Dirichlet-Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & , \text{falls } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \\ 1 & , \text{falls } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

auf keinem Intervall $[a, b]$, $-\infty < a \leq b < \infty$, integrierbar ist. In welchen Punkten ist f stetig?

Aufgabe 2. Sei die Funktion $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$, integrierbar. Zeigen Sie:

(a) Ist f ungerade, d.h. $f(x) = -f(-x)$, dann gilt $\int_{-a}^a dx f(x) = 0$.

(b) Ist f gerade, d.h. $f(x) = f(-x)$, dann existiert $\int_0^a dx\, f(x)$, und es gilt $\int_{-a}^a dx\, f(x) = 2 \int_0^a dx\, f(x)$.

Aufgabe 3. Sei $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, wobei $0 < a < b$. Ferner sei $q_n := \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $$\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(f), \text{ wobei } S_n(f) := \sum_{k=0}^{n-1} f(aq_n^k)aq_n^k(q_n - 1).$$

Sei nun $f(x) = x^c$ für alle $x \in [a, b]$, wobei $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Zeigen Sie:

(b) $S_n(f) = \dfrac{q_n - 1}{q_n^{c+1} - 1} \left(b^{c+1} - a^{c+1}\right)$ für alle $n = 1, 2, \ldots$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f) = \dfrac{1}{c+1}(b^{c+1} - a^{c+1})$. (*Hinweis:* Was ist $\lim\limits_{q\to 1} \dfrac{q-1}{q^{c+1} - 1}$?)

Aufgabe 4. Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung den Mittelwertsatz der Differentialrechnung in der folgenden abgeschwächten Form: Ist eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $-\infty < a \leq b < \infty$, stetig differenzierbar, so gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0)$.