Prof. Dr. R. Wulkenhaar
I. Ullisch

SS 2014

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: Mittwoch, 14.5.2014 bis 12h00, in den Briefkästen — Blatt 5

Aufgabe 1. Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\int_0^\pi dx\, x \ln \sin x$;
($Hinweise$: Die Substitution $x = \pi - t$ führt auf $\int_0^{\pi/2} dt\ \ln \sin t$; anschließend wird $t = 2s$ substituiert und das resultierende Integral über $\ln \cos s$ wieder in $\ln \sin u$ überführt.

(b) $\int_0^1 dx\, \sqrt{1-x^2} \ln \left|1 - \frac{1}{x^2}\right|$.
Hinweise: Substitution $x = \sin t$ und Verwendung von $2\cos^2 t = 1 + \cos(2t)$. Im Summanden zu $\cos(2t)$ partielle Integration, im Summanden zu 1 Substitution $\tan t = s$ und Verwendung von 3c) aus Blatt 4.

Aufgabe 2. (a) Es seien $k, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $c \in (0, 1)$. Dann gilt

$$\int_0^c dx\, \frac{x^{k-1}}{1 - x^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{nm+k}}{nm + k}.$$

(b) In (a) wähle man $c = 1/\sqrt{2}$, $m = 8$ sowie $k = 1, 4, 5, 6$ und schließe mit Aufgabe 2(b), Blatt 4, auf die *Bailey-Borwein-Plouffe-Formel* (*BBP-Formel*)

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right).$$

Aufgabe 3. Beweisen Sie für $-1 < t < 1$ die Identität

$$\int_0^1 dx\, \frac{1}{\sqrt{x(1-tx)^3}} = \frac{2}{\sqrt{1-t}}$$

als Potenzreihen in t unter Verwendung der Binomialreihen für $\frac{1}{\sqrt{(1-tx)^3}} = (1 + (-tx))^{-\frac{3}{2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{1-t}} = (1 + (-t))^{-\frac{1}{2}}$.

Aufgabe 4. (a) Seien $0 \le k < 1$ und $x, c \in \mathbb{R}$, $|x| \le 1$. Zeigen Sie, daß das Integral

$$v(x, k) := \int_0^x dt\, \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}}$$

existiert und für $E(\varphi, k) := v(\sin\varphi, k)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, gilt

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi d\psi\, \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}.$$

(b) Sei $A_{2n}(\varphi) := \int_0^\varphi dx\, \sin^{2n} x$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ und alle k mit $0 \le k < 1$ gilt

$$E(\varphi, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2n-1} \binom{2n}{n} \left(\frac{k}{2}\right)^{2n} A_{2n}(\varphi).$$