Prof. Dr. R. Wulkenhaar
I. Ullisch

SS 2014

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: Mittwoch, 25.06.2014 bis 12h00, in den Briefkästen — Blatt 10

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & -10 & -6 \\ 3 & -2 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Sei $n \geq 2$ und K ein Körper mit $x, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \ldots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. *(Vandermonde-Determinante)* Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ und

$$B(n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie per Induktion, daß $\det B(n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$.

Aufgabe 4. (a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Zeigen Sie, daß $\mathrm{U}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{K}) : AA^* = E_n\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ ist, wobei $A^* = \overline{A^t}$ die hermitesch Adjungierte bezeichnet.

Diese Untergruppe heißt bei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die *orthogonale* und bei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die *unitäre Gruppe* und wird auch mit $\mathrm{O}_n = \mathrm{O}(n) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{U}_n = \mathrm{U}(n) = \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ bezeichnet.

(b) Welche Werte kann $\det A$ für $A \in \mathrm{U}_n$ und für $A \in \mathrm{O}_n$ annehmen?

(c) Zeigen Sie, daß die *spezielle orthogonale Gruppe* $\mathrm{SO}_n = \mathrm{SO}(n) = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n : \det A = 1\}$ und die *spezielle unitäre Gruppe* $\mathrm{SU}_n = \mathrm{SU}(n) = \mathrm{SU}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{U}_n : \det A = 1\}$ Untergruppen von O_n bzw. U_n bilden.

(d) Beweisen oder widerlegen Sie: $G := \{\, A \in \mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{Z}) : \det A \neq 0 \,\}$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Bestimmen Sie ggfs. eine größtmögliche Teilmenge H von G, so daß H eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ ist.