1 Hilbert-Räume

Wir beschränken uns auf komplexe Hilbert-Räume und verwenden die Konvention der Physik für das Skalarprodukt.

Definition 1.1 Ein *Skalarprodukt* auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{X}$ ist eine Abbildung $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ mit

i) $\langle w, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\rangle = \lambda_1\langle w, v_1\rangle + \lambda_2\langle w, v_2\rangle$

ii) $\langle w, v\rangle = \overline{\langle v, w\rangle}$

iii) $\langle v, v\rangle \geq 0$ für alle $v \in \mathcal{X}$ und $\langle v, v\rangle = 0$ genau dann, wenn $v = 0$.

$(X, \langle\ ,\ \rangle)$ heißt *Prä-Hilbert-Raum* (oder *unitärer Vektorraum*), in dem durch $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ eine Norm induziert wird. Ist $(\mathcal{X}, \|\ \|)$ vollständig, so heißt dieser ein *Hilbert-Raum* und wird von nun an mit $\mathcal{H}$ bezeichnet.

Beispiel 1.2 Hilbert-Räume sind:

i) $\mathbb{C}^n$ mit $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{v_i} w_i$ wenn $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$.

ii) $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ mit $\langle v, w\rangle = \sum_{i=0}^\infty \overline{v_i} w_i$ wenn $v = (v_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $v = (w_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

iii) $L^2(X, \mu)$ für beliebige Maßräume mit (X, μ) mit $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_X d\mu\ \bar{f} g$.

Satz 1.3 (Cauchy-Schwarz) *In Hilbert-Räumen gilt* $\big|\langle w, v\rangle\big|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$ *für alle* $v, w \in \mathcal{H}$ *mit Gleichheit genau dann, wenn* v *und* w *linear abhängig sind.*

Insbesondere ist das Skalarprodukt beidseitig stetig.

Satz 1.4 *Eine Norm* $\|\ \|$ *geht genau dann aus einem Skalarprodukt hervor, wenn die* Parallelogrammgleichung $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$ *gilt, und in diesem Fall wird das Skalarprodukt aus der Polarisationsformel zurückgewonnen:*

$$\langle v, w\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 - \mathrm{i}\|v + \mathrm{i}w\|^2 + \mathrm{i}\|v - \mathrm{i}w\|^2\big)\ .$$

Definition 1.5 i) Zwei Vektoren $v, w \in \mathcal{H}$ heißen *orthogonal*, geschrieben $v \perp w$, wenn $\langle v, w\rangle = 0$.

ii) Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ heißt *Orthogonalsystem*, falls $v_i \perp v_{i'}$ für alle $i, i' \in I$ mit $i \neq i'$, und *Orthonormalsystem* (ONS), falls zusätzlich $\|v_i\| = 1$.

iii) Ist $W \subseteq \mathcal{H}$ eine beliebige Teilmenge, dann heißt $W^\perp := \{v \in \mathcal{H} \ :\ v \perp w$ für alle $w \in W\}$ der *Orthogonalraum* zu W.

$W^\perp$ ist stets abgeschlossener Untervektorraum von $\mathcal{H}$, und für jeden abgeschlossener Untervektorraum $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{H}$ gilt $\mathcal{H} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}^\perp$ als direkte Summe von Hilbert-Räumen.

Definition 1.6 Sei $I \neq \varnothing$ eine Indexmenge. Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren aus $\mathcal{H}$ heißt summierbar zu v, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $J_\epsilon \subseteq I$ gibt, so daß für alle endlichen Teilmengen $J \subseteq I$ mit $J_\epsilon \subseteq J$ gilt $|x - \sum_{j\in J} x_j| < \epsilon$.

In einer summierbaren Familie sind nur abzählbar viele $v_j \neq 0$, und jede Abzählung liefert die gleiche Summe.

Lemma 1.7 *Sei $(v_i)_{i\in I}$ ein ONS in $\mathcal{H}$, dann gilt:*

i) *Pythagoras: $(v_i)_{i\in I}$ ist genau dann in $\mathcal{H}$ summierbar, wenn $(\|v_i|^2)_{i\in I}$ in $\mathbb{R}$ summierbar ist, und es gilt $\|\sum_{i\in I} v_i\|^2 = \sum_{i\in I} \|v_i\|^2$.*

ii) *Besselsche Ungleichung: $\displaystyle\sum_{i\in I} |\langle v_i, v\rangle|^2 \leq \|v\|^2$ für alle $v \in \mathcal{H}$, mit Gleichheit genau dann, wenn $v = \displaystyle\sum_{i\in I} \langle v_i, v\rangle v_i$ (Parsevalsche Gleichung).*

Satz/Definition 1.8 (Orthonormalbasis) *Für ein ONS $(v_i)_{i\in I}$ in einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ sind äquivalent:*

i) *$(v_i)_{i\in I}$ ist maximal, d.h. für jedes ONS $(w_i)_{i\in I}$, welches $(v_i)_{i\in I}$ enthält, gilt $(v_i)_{i\in I} = (w_i)_{i\in I}$ als Mengen.*

ii) *Gilt $v \perp v_i$ für alle $v \in X$, so folgt $v = 0$.*

iii) *$\mathcal{H} = \overline{\mathrm{span}\{v_i \;:\; i \in I\}}$ (Norm-Abschluß).*

iv) *Die Abbildung $T : \ell^2(I) \ni (x_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} x_i v_i \in \mathcal{H}$ ist ein isometrischer Isomorphismus mit Umkehrabbildung $T^{-1}(v) = (\langle v_i, v\rangle)_{i\in I}$.*

v) *Für alle $v \in \mathcal{H}$ gilt $v = \displaystyle\sum_{i\in I} \langle v_i, v\rangle v_i$ (Fourier-Entwicklung).*

vi) *Für alle $v, w \in \mathcal{H}$ gilt $\langle v, w\rangle = \displaystyle\sum_{i\in I} \langle v, v_i\rangle\langle v_i, w\rangle$.*

vii) *Für alle $v \in \mathcal{H}$ gilt $\|v\|^2 = \displaystyle\sum_{i\in I} |\langle v_i, v\rangle|^2$ (Parsevalsche Gleichung).*

Ein ONS $(v_i)_{i\in I}$, das eine (und damit alle) der Bedingungen i)–vii) erfüllt, heißt Orthonormalbasis (ONB).

Insbesondere besitzt jeder Hilbert-Raum $\mathcal{H} \neq \{0\}$ eine ONB und ist isometrisch isomorph zu $\ell^2(I)$ für eine geeignete Index-Menge I. Der Hilbert-Raum heißt *separabel*, wenn I abzählbar ist, und in diesem Fall kann eine ONB über das Verfahren von Gram-Schmidt konstruiert werden. Hilbert-Räume der Quantenmechanik und auch der Quantenfeldtheorie sind immer separabel.

2 Lineare beschränkte Operatoren auf Hilbert-Räumen

Satz 2.1 *Seien $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Hilbert-Räume. Dann ist*

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) := \{A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2 \text{ linear+stetig}\}$$

ein Banach-Raum bezüglich der Operator-Norm $\|A\| = \sup_{v \in \mathcal{H}_1\ ,\ \|v\| \leq 1} \|Av\|$.

Wir schreiben $\mathcal{B}(\mathcal{H}) := \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

Satz 2.2 (Riesz) *Der Dualraum $\mathcal{H}' = \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ eines Hilbert-Raums $\mathcal{H}$ ist isometrisch anti-isomorph zu $\mathcal{H}$ selbst vermöge der durch $j(v)(w) = \langle v, w \rangle$ definierten antilinearen Bijektion $j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ mit $\|j(v)\| = \|v\|$.*

Satz/Definition 2.3 *Zu $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ gibt es genau ein $A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, so daß für alle $v \in \mathcal{H}_1$ und $w \in \mathcal{H}_2$ gilt:*

$$\langle w, Av \rangle = \langle A^* w, v \rangle \ . \tag{*}$$

Diese durch (*) eindeutig bestimmte lineare stetige Abbildung $A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ heißt der zu A adjungierte Operator. Es gilt $\|A^*\| = \|A\|$.

Satz 2.4 *Für $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ gilt:*

i) $\|A^* A\| = \|A\|^2$ *(C^*-Eigenschaft)*

ii) $\ker A = (\mathrm{im}\, A^*)^\perp$ *und* $(\ker A)^\perp = \overline{\mathrm{im}\, A^*}$

iii) $\ker A^* = (\mathrm{im}\, A)^\perp$ *und* $(\ker A^*)^\perp = \overline{\mathrm{im}\, A}$

Definition 2.5 Seien $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Hilbert-Räume, $A, N, E, P \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ und $U, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Mit $\mathrm{id}_{\mathcal{H}_i}$ werde der identische Operator bezeichnet.

i) A heißt *selbstadjungiert* (oder *hermitesch*), falls $A = A^*$.

ii) N heißt *normal*, falls $N^* N = N N^*$.

iii) E heißt *idempotent*, falls $E^2 = E$.

iv) P heißt *(Orthogonal-)Projektor* oder *(orthogonale) Projektion*, falls $P = P^2 = P^*$.

v) S heißt *isometrisch* oder *Isometrie*, falls $S^* S = \mathrm{id}_{\mathcal{H}_1}$.

vi) U heißt *unitär*, falls $U^* U = \mathrm{id}_{\mathcal{H}_1}$ *und* $U U^* = \mathrm{id}_{\mathcal{H}_2}$.

vii) S heißt *partielle Isometrie*, falls $S^* S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ Projektor ist.

Neben vielen offensichtlichen Querverbindungen gilt:

Lemma 2.6 i) *$S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ist genau dann Isometrie, wenn $\|Sv\| = \|v\|$ für alle $v \in \mathcal{H}_1$.*

ii) *$U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ist genau dann unitär, wenn U surjektiv und Isometrie ist.*

iii) *In einem komplexen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ ist $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ genau dann selbstadjungiert, wenn $\langle v, Av \rangle$ reell ist für alle $v \in \mathcal{H}$.*

Eine Isometrie ist automatisch injektiv. In endlich-dimensionalen Vektorräumen ist jede injektive lineare Abbildung auch surjektiv. Im Unendlich-dimensionalen gilt das nicht!

Beispiel 2.7 Sei $\mathcal{H}$ separabler unendlich-dimensionaler Hilbert-Raum mit ONB $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann wird durch $Sv_n := v_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und lineare Fortsetzung eine Isometrie definiert, der *einseitiger Shift*. Diese ist nicht surjektiv. Der adjungierte Operator S^* ist eine partielle Isometrie, denn $SS^* = \mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P$ für den Projektor $Pv = \langle v_0, v \rangle v_0$. ◁

Definition 2.8 Ein Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt *positiv*, geschrieben $A \geq 0$, falls $\langle v, Av \rangle \geq 0$ für alle $v \in \mathcal{H}$. Für selbstadjungierte Operatoren $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ schreiben wir $A \geq B$, falls $A - B \geq 0$.

Definition 2.9 Eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Spektralwert* von $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, wenn die lineare stetige Abbildung $A - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ nicht bijektiv ist. Die Menge aller Spektralwerte von A heißt das *Spektrum von A*, bezeichnet mit $\sigma(A)$. Dabei heißt λ *Eigenwert*, falls $\ker(A - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) \neq \{0\}$, und ein Vektor $0 \neq v \in \ker(A - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$ heißt Eigenvektor.

Das Komplement $\varrho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ ist die *Resolventenmenge* von A, und Werte $\mu \in \varrho(A)$ heißen *reguläre Werte von A*. Die Funktion $\varrho(A) \ni \mu \mapsto R_\mu(A) := (A - \mu \mathrm{id}_{\mathcal{H}})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt *Resolventenfunktion*.

Es gilt $\mu \in \varrho(A)$ genau dann, wenn $A - \mu \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ beidseitig beschränkt invertierbar ist (nach Satz vom inversen Operator).

Jeder Eigenwert ist Spektralwert, insbesondere auch die Eigenwerte quadratischer Matrizen. Es gibt aber auch andere Arten von Spektralwerten:

Beispiel 2.10 i) Sei (X, μ) ein Maßraum und $\mathcal{H} = L^2(X, \mu)$. Dann definiert jede stetige beschränkte Funktion $f \in C_b(X)$ durch Multiplikation einen linearen beschränkten Operator $f \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Das Spektrum von f besteht aus den Funktionswerten: Denn ist $f(x) = \lambda$ für ein $x \in X$, so gibt es zu $f - \lambda 1$ keine inverse Funktion. Aber λ ist (außer für f konstant) kein Eigenwert.

ii) Der Shift S aus Beispiel 2.7 hat den Spektralwert 0, da S nicht surjektiv ist. Dagegen hat S keinen Eigenwert. ◁

Bemerkung 2.11 Man unterscheidet für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folgende Spektraltypen:

i) $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ A - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \text{ nicht injektiv } \}$ heißt *Punktspektrum*.

ii) $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \;:\; A-\lambda \mathrm{id}_{\mathcal{H}} X$ injektiv, nicht surjektiv, aber mit dichtem Bild $\}$ heißt *kontinuierliches Spektrum.*

iii) $\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \;:\; A - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ injektiv, ohne dichtes Bild $\}$ heißt *Residualspektrum.*

Satz 2.12 *Für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt:*

i) *$\varrho(A)$ ist offen.*

ii) *$\sigma(A)$ ist kompakt, nicht leer und enthalten in der Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt 0 und Radius $\|A\|$.*

Theorem 2.13 *Sei $\mathcal{H}$ Hilbert-Raum und $A, P, U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

i) *A ist genau dann selbstadjungiert, wenn $\sigma(A)$ eine kompakte Teilmenge des reellen Intervalls $[-\|A\|, \|A\|]$ ist.*

ii) *A ist genau dann positiv, wenn $\sigma(A)$ eine kompakte Teilmenge des reellen Intervalls $[0, \|A\|]$ ist.*

iii) *P ist genau dann Projektor, wenn $\sigma(P)$ höchstens aus den Zahlen 0 und 1 besteht.*

iv) *U ist genau dann unitär, wenn $\sigma(U)$ kompakte Teilmenge des Einheitskreises $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ ist.*

Ferner gilt $\sigma(A^*) = \{\bar{\lambda} \;:\; \lambda \in \sigma(A)\}$ für beliebige und $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} \;:\; \lambda \in \sigma(A)\}$ für invertierbare $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Jedes Polynom $p = p(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k$ mit $c_k \in \mathbb{C}$ defininiert durch $p(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k$, mit $A^0 := \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$, einen linearen stetigen Operator $p(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Für diesen gilt $\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) \;:\; \lambda \in \sigma(A)\} =: p(\sigma(A))$.

Theorem 2.14 (stetiger Funktionalkalkül) *Ist $\mathcal{H}$ komplexer Hilbert-Raum, $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert und f eine stetige Funktion auf dem kompakten Hausdorff-Raum $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|]$. Dann gibt es genau ein $f(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ derart, daß die Zuordnung $\mathcal{C}(\sigma(A)) \ni f \mapsto f(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ stetig ist und für Polynome die elementare Bedeutung hat.*

Die Theoreme 2.13 und 2.14 haben fundamentale Bedeutung für die Theorie der Operatoralgebren. Wir geben eine Reihe von Anwendungen an:

Theorem 2.15 *Sei $\mathcal{H}$ komplexer Hilbert-Raum.*

i) *Jeder selbstadjungierte Operator $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ besitzt eine eindeutige Zerlegung $A = A_+ - A_-$ mit $A_+, A_- \geq 0$ und $A_+A_- = A_-A_+ = 0$. Es gilt $\|A\| = \max(\|A_+\|, \|A_-\|)$. Insbesondere ist jeder lineare stetige Operator eine eindeutige Linearkombination von (höchstens) 4 positiven Operatoren.*

ii) *Jeder positive Operator* $0 \leq A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *hat eine eindeutige positive Quadratwurzel* $0 \leq A^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, *mit* $A = (A^{\frac{1}{2}})^2$.

iii) *(Polarzerlegung)* *Zu* $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *existiert eindeutig eine partielle Isometrie* $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *von* $(\ker A)^{\perp}$ *nach* $(\ker A^*)^{\perp}$, *so daß gilt* $A = S|A|$. *Dabei ist* $|A| := (A^*A)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *der* Betrag *von* A.

iv) *Jeder lineare Operator* $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *ist Linearkombination von höchstens 4 unitären Operatoren.*