1 Topologische Räume

Definition 1.1 Eine *topologischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Familie $\mathcal{T}$ von Teilmengen, den *offenen Mengen*, so daß

i) $X \in \mathcal{T}$ und $\varnothing \in \mathcal{T}$.

ii) Aus $U_i \in \mathcal{T}$ folgt $\bigcup_i U_i \in \mathcal{T}$.

iii) Aus $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$ folgt $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

Eine Teilfamilie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ heißt *Basis*, falls jedes $U \in \mathcal{T}$ eine Darstellung $U = \bigcup_i U_i$ mit $U_i \in \mathcal{B}$ hat.

Definition 1.2 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

- Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, falls $X \setminus A$ offen ist.
- Eine Teilmenge $V \subseteq X$ heißt *Umgebung* eines Punktes $x \in X$, falls es ein $U \in \mathcal{T}$ gibt mit $x \in U \subseteq V$.
- $(X, \mathcal{T})$ heißt *Hausdorff-Raum*, falls es zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ eine Umgebung V_x von x und eine Umgebung V_y von y gibt mit $V_x \cap V_y = \varnothing$.
- Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(X, \mathcal{T})$ heißt *konvergent* gegen $x \in X$, falls es zu jeder Umgebung V von x ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n \in V$ für alle $n \geq N$.
- Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heißt *kompakt* (bzgl. $\mathcal{T}$), falls jede offene Überdeckung $K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}$ auf eine endliche reduziert werden kann: $\exists i_1, \ldots i_n \in I$ mit $K \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

Definition 1.3 Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ und heißt *stetig*, falls $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ für alle $U \in \mathcal{T}_Y$.

Oft ist es notwendig, dieselbe Menge X mit verschiedenen Topologien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ auszustatten. Dabei heißt eine eine Topologie $\mathcal{T}_1$ *schwächer* (eigentlich besser *gröber*) als eine Topologie $\mathcal{T}_2$, und $\mathcal{T}_2$ *stärker* (eigentlich besser *feiner*) als $\mathcal{T}_1$, wenn $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ ist, d.h. wenn jede in $\mathcal{T}_1$ offene Menge auch in $\mathcal{T}_2$ offen ist. Die schwächere Topologie enthält also weniger offene Mengen als die feinere. Es gilt

i) $Y \subseteq X :$ $\quad \mathcal{T}_1$-offen $\Rightarrow$ $\mathcal{T}_2$-offen

ii) $Y \subseteq X :$ $\quad \mathcal{T}_1$-abgeschlossen $\Rightarrow$ $\mathcal{T}_2$-abgeschlossen

iii) $(x_n) :$ $\quad \mathcal{T}_1$-konvergent $\Leftarrow$ $\mathcal{T}_2$-konvergent

iv) $K \subseteq X :$ $\quad \mathcal{T}_1$-kompakt $\Leftarrow$ $\mathcal{T}_2$-komkakt

v) $f : X \to Y :$ $\quad \mathcal{T}_1$-stetig $\Rightarrow$ $\mathcal{T}_2$-stetig

vi) $f : Y \to X :$ $\quad \mathcal{T}_1$-stetig $\Leftarrow$ $\mathcal{T}_2$-stetig

Das bedeutet, daß Konvergenz und Kompaktheit leichter in einer schwächeren Topologie erreicht werden kann. Umgekehrt ist in den schwächeren Topologien die Stetigkeit von Abbildungen $f : X \to Y$ (bei gleichem Y; Stetigkeit wird schwieriger, wenn man Y mit einer stärkeren Topologie ausstattet) schwieriger zu sichern. Ideal ist deshalb eine möglichst schwache Topologie, in der eine gewisse Klasse von Abbildungen gerade noch stetig bleibt.

Definition 1.4 Sei $(X, \| \ \|)$ normierter Vektorraum und $X' = \{f : X \to \mathbb{C}$ linear+stetig$\}$ der Dualraum. Dann ist die *schwache Topologie* auf X die schwächste Topologie, in der alle $f \in X'$ stetig sind.

Man wird auch versuchen, die Hausdorff-Eigenschaft zu bewahren, denn diese sichert (bei Existenz) eindeutige Grenzwerte von Folgen. Für die schwache Topologie auf normierten Vektorräumen folgt Hausdorff aus Hahn-Banach. Verliert man das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, dann kann die Topologie eines Raumes nicht mehr durch Folgen erfaßt werden; man braucht Netze:

Definition 1.5 Eine nichtleere Menge Λ heißt *gerichtet*, falls es eine Relation $\leq$ auf Λ gibt mit

i) $\lambda_1 \leq \lambda_2$ und $\lambda_2 \leq \lambda_3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \leq \lambda_3$.

ii) Für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ gibt es ein $\lambda_3 \in \Lambda$ mit $\lambda_1 \leq \lambda_3$ und $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und Λ eine gerichtete Menge. Ist $x_\lambda \in X$ für alle $\lambda \in \Lambda$, so heißt $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein *Netz* in X. Ein Netz $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ heißt *konvergent* gegen ein $x \in X$, falls es zu jeder Umgebung V von x ein $\mu \in \Lambda$ gibt mit $x_\lambda \in V$ für alle $\lambda \geq \mu$. Wir schreiben dann $x_\lambda \to x$.

Jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein Netz bezüglich der gerichteten Menge $\mathbb{N}$ mit der üblichen $\leq$-Relation, und die Konvergenzbegriffe stimmen überein. Alle Beziehungen zwischen Topologie metrischer Räume und Konvergenz von Folgen bleiben auch in allgemeinen topologischen Räumen richtig, wenn man Folgen durch Netze ersetzt. Die einzige Falle ist, daß ein konvergentes Netz nicht beschränkt sein muß.

Satz 1.6 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn jedes konvergente Netz einen eindeutigen Grenzwert hat.*

Satz 1.7 *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für jedes gegen $x \in X$ konvergente Netz $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ gilt, daß das Netz $(f(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ gegen $f(y)$ konvergiert.*

Satz 1.8 *Eine Teilmenge $K \subseteq X$ ist genau dann kompakt, wenn jedes Netz $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ mit $x_\lambda \in K$ ein konvergentes Teilnetz hat.*

Schließlich:

Definition 1.9 Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, falls es zu jedem $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis gibt, d.h. es gibt abzählbar viele Umgebungen $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von x, so daß es zu jeder Umgebung V von x ein $U_i \subseteq V$ gibt.

Das Axiom gilt in metrischen Räumen (Wähle $\frac{1}{n}$-Kugeln um x). Für schwache Topologien auf Hilbert-Räumen und für schwache Operator-Topologien gilt es nur, wenn der Hilbert-Raum separabel ist die Teilmengen beschränkt sind.

2 Lokal-konvexe Vektorräume

In einer wichtigen Klasse von toplogischen Räumen ist die Topologie durch ein System von Halbnormen erklärt. Viele Techniken der Analysis und Funktionalanalysis bleiben in diesen Räumen gültig.

Definition 2.1 Eine *Halbnorm* auf einem reellen oder komplexen Vektorraum $\mathcal{X}$ ist eine Abbildung $p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ mit $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ und $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Definition 2.2 Sei $\mathcal{P} = \{p_i \;:\; i \in I\}$ ein System von Halbnormen $p_i : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ auf einem Vektorraum $\mathcal{X}$. Für $x \in \mathcal{X}$, $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ und $\epsilon > 0$ setze

$$U(x; p_1, \ldots, p_n, \epsilon) := \{y \in \mathcal{X} \;:\; p_k(x - y) < \epsilon \;\forall k = 1, \ldots, n\} .$$

Eine (nichtleere) Teilmenge $\mathcal{O} \subseteq X$ heißt *offen bezüglich* $\mathcal{P}$ (oder $\mathcal{P}$*-offen*), falls es zu jedem $x \in \mathcal{O}$ ein $\epsilon > 0$ und $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ gibt mit $U(x; p_1, \ldots, p_n, \epsilon) \subseteq \mathcal{O}$.

Ist $\mathcal{P} = \{\| \;\|\}$ für eine Norm $\| \;\|$ auf $\mathcal{X}$, so ist $U(x; \| \;\|, \epsilon) = U_\epsilon(x)$ genau die ϵ-Umgebung von x.

Satz 2.3 *Sei $\mathcal{P}$ ein System von Halbnormen auf einem Vektorraum $\mathcal{X}$ und $\mathcal{T} := \{\mathcal{O} \subseteq \mathcal{X}$ offen bzgl. $\mathcal{P}\}$. Dann ist $(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \equiv (\mathcal{X}, \mathcal{P})$ ein topologischer Vektorraum (den wir einen lokal-konvexen Vektorraum nennen). Ferner gilt:*

i) *$\mathcal{U}_x := \{U(x; p_1, \ldots, p_n, \epsilon) \;:\; \epsilon > 0\,,\; n \in \mathbb{N}\,,\; p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}\}$ ist Umgebungsbasis von $x \in \mathcal{X}$.*

ii) *$\mathcal{T}$ ist die schwächste Topologie, in der alle $p \in \mathcal{P}$ stetig sind.*

iii) *Ein Netz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in $\mathcal{X}$ konvergiert genau dann in $\mathcal{T}$ gegen $x \in \mathcal{X}$, wenn $p(x_\lambda - x) \to 0$ für alle $p \in \mathcal{P}$.*

Beispiel 2.4 Sei X ein topologischer Raum. Auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen $\mathcal{C}(X)$ betrachten wir die Familie $\mathcal{P} := \{p_x \;:\; x \in X\}$ der Halbnormen $p_x(f) = |f(x)|$. Nach Satz 2.3.iii) konvergiert eine Folge (f_n) in $\mathcal{C}(X)$ genau dann bezüglich $\mathcal{P}$ gegen $f \in \mathcal{C}(X)$, wenn $p_x(f_n - f) \to 0$ für alle $x \in X$. Offenbar ist das die *punktweise Konvergenz* der Folge (f_n). Es gilt $f = 0 \quad\Leftrightarrow\quad p_x(f) = 0 \;\forall x \in X$, d.h. Grenzwerte sind eindeutig (Hausdorff-Eigenschaft). $\triangleleft$

Allgemein gilt:

Satz 2.5 *Ein lokal-konvexer Vektorraum $(\mathcal{X}, \mathcal{P})$ ist geanu dann ein Hausdorff-Raum, wenn aus $p(x) = 0$ für alle $p \in \mathcal{P}$ folgt $x = 0$.*

Beispiel 2.6 Stetige Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ müssen nicht beschränkt sein. Durch $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $p_n(f) := \sup_{x\in[-n,n]} |f(x)|$ wird ein System von Halbnormen auf $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ erklärt. Wieder gilt $f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_n(f) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}^{\times}$, so daß ein sinnvoller Konvergenzbegriff erhalten wird (*gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta*). $\triangleleft$

Beispiel 2.7 Sei $\mathcal{X}$ normierter Vektorraum, dann ist die *schwache Topologie* auf X die lokal-konvexe Topologie erzeugt durch das Halbnormensystem $\mathcal{P} = \{p_{x'} \ :\ x' \in \mathcal{X}'\}$, mit $p_{x'}(x) = |x'(x)|$. Nach Hahn-Banach-Theorem ist es ein Hausdorff-Raum. $\triangleleft$

Ist $\mathcal{H}$ Hilbert-Raum, dann ist $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ nach Rieszschem Darstellungssatz. Somit konvergiert eine Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der schwachen Topologie gegen $\psi \in \mathcal{H}$, wenn für alle $\phi \in \mathcal{H}$ gilt $\lim_{n\to\infty} |\langle\phi, \psi_n - \psi\rangle| = 0$.

Sei jetzt (ψ_n) eine ONB in $\mathcal{H}$. Als Folge ist (ψ_n) natürlich nicht norm-konvergent, denn $\|\psi_n - \psi_{n+1}\| = \sqrt{2}$. Dagegen ist (ψ_n) schwach-konvergent gegen 0. Denn $\phi = \sum_k c_k\psi_k$ und dann $|\langle\phi, \psi_n - 0\rangle| = |c_n|$. Wegen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Insbesondere folgt, daß die Einheitssphäre in $\mathcal{H}$ nicht schwach-abgeschlossen ist (der Einheitsball ist es).

Beispiel 2.8 Sei $\mathcal{X}$ normierter Vektorraum, dann ist die schwach-*-Topologie auf dem Dualraum $\mathcal{X}'$ die lokal-konvexe Topologie erzeugt durch das Halbnormensystem $\mathcal{P} = \{p_x \ :\ x \in \mathcal{X}\}$, mit $p_x(x') = |x'(x)|$. Es ist wieder eine Hausdorff-Topologie mit folgender sehr wichtiger Eigenschaft:

Theorem 2.9 (Banach-Alaoglu) *Der Einheitsball $B_{\mathcal{X}'} := \{x' \in \mathcal{X}' \ :\ \|x'\| \leq 1\}$ ist schwach-*-kompakt.*

Hier ist zu betonen, daß der Einheitsball genau dann norm-kompakt ist, wenn der normierte Vektorraum endlich-dimensional ist. $\triangleleft$

Beispiel 2.10 Seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ normierte Vektorräume, dann werden auf $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ folgende Operator-Topologien eingeführt:

i) Die *starke Operator-Topologie* wird durch das Halbnormensystem $\mathcal{P} = \{p_x \ :\ x \in \mathcal{X}\}$ mit $p_x(T) := \|T(x)\|$ erzeugt. Ist $\|T(x)\| = 0$, so $T(x) = 0$ für alle $x \in \mathcal{X}$, somit $T = 0$, und $\mathcal{T}$ trennt die Punkte. Ein Netz $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ konvergiert somit genau dann gegen $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, wenn $T_\lambda(x) \to T(x)$ für alle $x \in X$. Die starke Operator-Topologie ist schwächer als die (Operator-)Norm-Topologie.

ii) Die *schwache Operator-Topologie* wird erzeugt durch das Halbnormensystem $\mathcal{P} = \{p_{x,y'} \ : \ x \in \mathcal{X}\ ,\ y' \in \mathcal{Y}'\}$ mit $p_{x,y'}(T) := |y'(T(x))|$. Da Y' die Punkte aus $\mathcal{Y}$ trennt, ist $p_{x,y'}(T) = 0$ für alle $p_{x,y'} \in \mathcal{P}$ genau dann, wenn $T = 0$, somit ist die schwache Operatortopologie hausdorffsch. Ein Netz $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ konvergiert somit genau dann gegen $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, wenn $y'(T_\lambda(x)) \to y'(T(x))$ für alle $x \in \mathcal{X}$ und alle $y' \in \mathcal{Y}'$. Speziell ist $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ schwach-konvergent gegen T, falls $\lim_\lambda |\langle\phi, (T_\lambda - T)\rangle| = 0$ für alle $\psi, \phi \in \mathcal{H}$. Die schwache Operator-Topologie ist schwächer als die starke Operator-Topologie und noch schwächer als die (Operator-)Norm-Topologie. $\triangleleft$

Da es in der Quantenmechanik nur auf die Erwartungswerte von Operatoren ankommt, ist die schwache Operator-Topologie die natürlichste Wahl. Das folgende durch von Neumann bewiesene Theorem hat weitreichende Konsequenzen:

Theorem 2.11 *Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine $*$-Unteralgebra, die $\mathrm{id}_\mathcal{H}$ enthält. Dann sind äquivalent:*

i) $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$

ii) *$\mathcal{M}$ ist abgeschlossen in der starken Operator-Topologie.*

iii) *$\mathcal{M}$ ist abgeschlossen in der schwachen Operator-Topologie.*

Dabei ist $\mathcal{M}' := \big\{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \ : \ [T, A] = 0 \ \forall A \in \mathcal{M}\big\}$ die *Kommutante* von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'' = (\mathcal{M}')'$. Eine Algebra nach Theorem 2.11 heißt *von Neumann-Algebra.*

Beispiel 2.12 Während der Vektorraum $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^D)$ der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen ein Banach-Raum ist, kann auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^D)$ keine Norm erklärt werden. Jedoch definiert $p_{n,\alpha}(x) := \sup_{t\in[-n-1,n+1]^D} |(\partial^\alpha x)(t)|$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}^D$ (Multi-Index) eine Halbnorm auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^D)$. Dann definiert $\mathcal{P} = \{p_{n,\alpha}\}$ ein Halbnormensystem, welches $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^D)$ zu einem lokal-konvexen Vektorraum macht. $\triangleleft$

Beispiel 2.13 Der Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^D)$ ist der Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen, welche im Unendlichen schneller als jede Potenz verschwinden. Durch das Halbnormensystem $\mathcal{P} = \{p_{n,\alpha} \ : \ n \in \mathbb{N}\ ,\ \alpha \in \mathbb{N}^D\}$ mit $p_{n,\alpha}(x) := \sup_{t\in\mathbb{R}^D} |(1 + \|t\|^n)(\partial^\alpha x)(t)|$ wird $\mathcal{S}(\mathbb{R}^D)$ zu einem lokalkonvexen Vektorraum. $\triangleleft$

Satz 2.14 *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ lokal-konvexer Vektorraum. Dann sind äquivalent:*

i) *$(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ist metrisierbar, d.h. es gibt eine Metrik d auf $\mathcal{X}$, welche $\mathcal{T}$ erzeugt.*

ii) *$0 \in \mathcal{X}$ besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis.*

iii) *Es gibt ein abzählbares Halbnormensystem* $\mathcal{P} = \{p_n \; : \; n \in \mathbb{N}\}$, *welches* $\mathcal{T}$ *erzeugt.*

Eine solche Metrik kann durch $d(x, y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}$ definiert werden. Als wichtige Konsequenz gilt das erste Abzählbarkeitsaxiom, und die Topologie kann durch Folgen erfaßt werden.

Definition 2.15 Ein metrisierbarer lokal-konvexer Vektorraum $\mathcal{X}$, der bezüglich einer translations-invarianten Metrik vollständig ist, heißt *Fréchet-Raum*.

Metrisierbarkeit von $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^D)$ und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^D)$ sind offensichtlich, Fréchet kann bewiesen werden.

Satz 2.16 *Seien* $(\mathcal{X}, \mathcal{P})$ *und* $(\mathcal{Y}, \mathcal{Q})$ *lokal-konvexe Vektorräume. Eine lineare Abbildung* $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *ist genau dann stetig, wenn es für jedes* $q \in \mathcal{Q}$ *ein* $c \geq 0$ *und* $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ *mit* $q(T(x)) \leq c \max(p_1(x), \ldots, p_n(x)$ *für alle* $x \in \mathcal{X}$.

Insbesondere kann so der Dualraum $\mathcal{X}'$ aller bezüglich $\mathcal{P}$ stetigen linearen Abbildungen $f : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ erklärt werden. War $(\mathcal{X}, \| \, \|)$ normierter Vektorraum und $(\mathcal{X}, \| \, \|)'$ sein Dualraum bezüglich der Norm-Topologie, dann definiert dieser einen lokal-konvexen Vektorraum $(\mathcal{X}, \mathcal{P} = \{p_{x'}\})$, von dem wieder der Dualraum $(\mathcal{X}, \mathcal{P})'$ bezüglich der schwachen Topologie erklärt ist. Dieses ist aber der gleiche Raum!

Hahn-Banach gilt auch in lokal-konvexen Vektorräumen, so daß der Dualraum immer ein Hausdorff-Raum ist.

Beispiel 2.17 Der Dualraum $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^D))'$ des Schwartz-Raums heißt Vektorraum der *temperierten Distributionen*. Diese spielen eine große Rolle in der Quantenfeldtheorie und allgemeiner in der Theorie partieller Differentialgleichungen. Es sind sozusagen die langsam wachsenden Distributionen. Ein wichtiges Beispiel ist die Diracsche δ-Distribution $\delta_t(f) := f(t)$ für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^D)$. Diese ist linear, und $|\delta_t(f)| \leq p_{0,0}(f) = \sup_{t \in \mathbb{R}^D} |f(t)|$, d.h. δ_t ist stetig. ◁