Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 2015**

Übungen zu "Mathematische Modelle der Statistischen Physik und Quantenfeldtheorie"

Abgabe: Bis 16.04.2015, 10 Uhr Blatt 01

In den folgenden Aufgaben sei $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ stets ein komplexer Hilbertraum. Mit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ wird der Banach-Raum der linearen stetigen Abbildungen von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$ bezeichnet, versehen mit der Operatornorm.

Die Lösungen (d.h. Beweise) zu Aufgaben 1-3 sind nicht schwierig (falls man die Methode erahnt) und auch problemlos in der Literatur zu finden. Es lohnt sich aber diese nachzuvollziehen, um eine gewisse Vertrautheit mit den Techniken zu entwickeln.

Aufgabe 1. Beweisen Sie:

i) Für eine beliebige Teilmenge $W \subseteq \mathcal{H}$ ist $W^\perp$ ein topologisch abgeschlossener Untervektorraum von $\mathcal{H}$. (*Hinweis:* Stetigkeit des Skalarprodukts)

ii) Für einen beliebigen Untervektorraum $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{H}$ ist der Abschluß gegeben durch $\bar{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}^\perp)^\perp$
Hinweise: Nutzen Sie die Tatsache, daß jede ϵ-Umgebung von $y \in \bar{\mathcal{X}}$ einen Punkt aus $\mathcal{X}$ enthält, um $\bar{\mathcal{X}}^\perp = \mathcal{X}^\perp$ zu zeigen. Im Rest des Beweises dürfen Sie folgenden Satz benutzen, der aus der gleichmäßigen Konvexität von Hilbert-Räumen folgt:
Ist $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{H}$ abgeschlossener Untervektorraum, so gilt $\mathcal{H} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}^\perp$.

Aufgabe 2. Seien $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Beweisen Sie:

i) $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$

ii) $\|A^*A\| = \|A\|^2$ *Hinweis:* Cauchy-Schwarz

iii) $\ker A = (\mathrm{im}\, A^\star)^\perp$

iv) $(\ker A)^\perp = \overline{(\mathrm{im}\, A^\star)}$ *Hinweis:* Aufgabe 1.ii)

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\sigma(A)$ das Spektrum und $\varrho(A)$ die Resolventenmenge. Zeigen Sie

i) $\varrho(A)$ ist offen.
Hinweise: Das Inverse eines bijektiven linearen stetigen Operators hat (nach Satz vom inversen Operator) endliche Norm. Zeigen Sie, daß eine

genügend kleine (die Schranke ist anzugeben!) Verschiebung eines regulären Wertes durch eine geometrische Reihe (diese heißt hier Neumann-Reihe) abgeschätzt werden kann. Die Konvergenz dieser Reihe ist zu zeigen.

ii) Ist $|\lambda| > \|A\|$, dann $\lambda \in \varrho(A)$.

iii) $\sigma(A)$ ist kompakt.

iv) $\sigma(A) \neq \varnothing$
Hinweis: Es genügt eine Beweisskizze. Überlegen Sie sich, daß $\varrho(A) \ni z \mapsto R_z(A)$ komplex differenzierbar (d.h. holomorph) ist. Führen Sie dann den Beweis auf den Satz von Liouville zurück.

Aufgabe 4. Für je zwei Vektoren $x, y \in \mathcal{H}$ ist der zugehörige *Ket-bra-Operator* $T_{x,y} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definiert durch $T_{x,y}(v) := \langle y, v\rangle x$ für alle $v \in \mathcal{H}$.

i) Bestimmen Sie $\|T_{x,y}\|$ und $(T_{x,y})^*$ in Abhängigkeit von $x, y \in \mathcal{H}$.

ii) Bestimmen Sie $AT_{x,y}$ und $T_{x,y}A$ für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

iii) Sei $F \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein Operator mit endlich-dimensionalem Bild und $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis von $\operatorname{im}(F) = F(\mathcal{H})$.
Zeigen Sie: $F = T_{v_1, F^* v_1} + \cdots + T_{v_n, F^* v_n}$.