Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 2015**

Übungen zu "Mathematische Modelle der Statistischen Physik und Quantenfeldtheorie"

Abgabe: Bis 23.04.2015, 10 Uhr Blatt 02

Eine Abbildung $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ zwischen lokal-konvexen Vektorräumen $(\mathcal{X}, \mathcal{P})$ und $(\mathcal{Y}, \mathcal{Q})$ ist stetig, wenn es zu jedem $q \in \mathcal{Q}$ ein $c \geq 0$ sowie $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ gibt mit $q(f(x)) \leq c \max(p_1(x), \dots, p_n(x))$.

Aufgabe 1. Sei $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im Hilbert-Raum $\mathcal{H}$, die in der schwachen Topologie gegen $\phi \in \mathcal{H}$ konvergiert.

Zeigen Sie: $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in der Norm-Topologie gegen ϕ, wenn $\|\phi_n\|$ in $\mathbb{R}$ gegen $\|\phi\|$ konvergiert.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{H}$ unendlich-dimensionaler separabler Hilbert-Raum und $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie, daß die Abbildung $A \mapsto A^*$ stetig in der Norm-Topologie und in der schwachen Operator-Topologie ist, aber nicht stetig in der starken Operator-Topologie ist.

Hinweis: Ein Gegenbeispiel läßt sich aus dem Adjungierten S^* des Shift-Operators $S(\psi_n) = \psi_{n+1}$ konstruieren.

Aufgabe 3. Eine lineare, *nicht notwendig stetige*, Abbildung $f : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ heißt *positives lineares Funktional*, falls $f(A^*A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, und *Zustand*, falls außerdem $f(\mathrm{id}_\mathcal{H}) = 1$.

Zeigen Sie folgende Eigenschaften für ein positives lineares Funktional f:

i) $|f(B^*A)|^2 \leq f(B^*B)f(A^*A)$ für alle $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

ii) $|f(B^*AB)| \leq \|A\| f(B^*B)$ für $A \geq 0$

iii) f ist automatisch norm-stetig

Hinweise: Zeigen Sie zunächst $f(A^*) = \overline{f(A)}$, dann ist i) eine Variante von Cauchy-Schwarz. In ii) beweist man $A \leq \|A\|\mathrm{id}_\mathcal{H}$ für $A \geq 0$ und nutzt, daß sich jeder positive Operator $A \geq 0$ als $A = C^*C$ schreiben läßt.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ der Schwartz-Raum, versehen mit dem Halbnormensystem $p_{n,k}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}}(1 + |x|^n)\big|f^{(k)}(x)\big|$.

Zeigen Sie durch Angabe konkreter $c, p_1, \dots, p_n$, daß folgende Abbildungen stetig sind:

i) $Q : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\qquad (Qf)(x) := xf(x)$

ii) $P : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\qquad (Pf)(x) := -\mathrm{i}f'(x)$ (d.h. die Ableitung)

iii) $I : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, $\qquad I(f) := \int_{\mathrm{R}} dx f(x)$ (mit der Standard-Topologie in $\mathbb{C}$)