Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 2015**

Übungen zu "Mathematische Modelle der Statistischen Physik und Quantenfeldtheorie"

Abgabe: Bis 30.04.2015, 10 Uhr Blatt 03

Sei $\mathcal{H}$ unendlich-dimensionaler separabler Hilbert-Raum und $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ der Vektorraum der *kompakten Operatoren* auf $\mathcal{H}$. Ist $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, so auch $T^*T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, und nach Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren gilt:

$\mathcal{H}$ hat eine ONB $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Eigenvektoren von T^*T, genauer $T^*T\psi_n = \mu_n^2\psi_n$ für eine monoton fallende Nullfolge $(\mu_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $\mu_n^2 > 0$ endliche Vielfachheit hat.

Die positiven Wurzeln $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots > 0$ heißen *singuläre Werte* von T, meist bezeichnet mit $s_n(T) := \mu_n$. Man sagt, T gehört zum *Schatten-Ideal* $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ für ein $1 \leq p \leq \infty$, falls $(s_{n+1}(T))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$. Operatoren $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ heißen *Spurklasse-Operatoren*, Operatoren $T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ heißen *Hilbert-Schmidt-Operatoren.*

Aufgabe 1 Sei $(\mu_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der singulären Werte von $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie:

i) Es gibt (nicht notwendig vollständige) Orthonormalsysteme $(\psi_n)_{n\in M}$ und $(\phi_n)_{n\in M}$ in $\mathcal{H}$ mit $T\psi = \sum_{n\in M} \mu_n\langle\psi_n, \psi\rangle\phi_n$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$.

ii) $\mu_n = \inf\limits_{\eta_1,\dots,\eta_{n-1}\in\mathcal{H}} \Big(\sup\limits_{\xi\in(\mathrm{span}(\eta_1,\dots,\eta_{n-1}))^\perp, \|\xi\|=1} \|T\xi\| \Big)$
mit $\mu_1 = \sup_{\xi\in\mathcal{H},\|\xi\|=1} \|T\xi\| \equiv \|T\|$.

Hinweise: i) Nach einzig sinnvoller Wahl der ψ_n ergeben sich die ϕ_n durch Wahl von $\psi \mapsto \psi_n$ in der zu zeigenden Formel. Zu diskutieren ist aber $\ker T$.
ii) Hier sind getrennt $\geq$ und $\leq$ zu zeigen. In einem Fall wählt man $\eta_k = \psi_k$ und ψ_k nach i). Im anderen Fall zeigt man, daß es zu jedem $(n-1)$-dimensionalen Untervektorraum von $\mathcal{H}$ ein dazu orthogonales $\psi \in \mathrm{span}(\psi_1, \dots, \psi_n)$ gibt. Dieses liefert eine untere Schranke für $\|T\xi\|$.

Aufgabe 2. Ist $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ ein Spurklasse-Operator und $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB in $\mathcal{H}$, dann heißt $\mathrm{Tr}(T) := \sum_{n=0}^\infty \langle\eta_n, T\eta_n\rangle$ die *Spur* von T. Zeigen Sie:

i) Die Reihe konvergiert absolut für beliebige ONB in $\mathcal{H}$, und jede ONB liefert den gleichen Wert für die Spur.

ii) Ist U ein unitärer Operator, d.h. $U^*U = UU^* = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$, dann gilt $\mathrm{Tr}(U^*TU) = \mathrm{Tr}(T)$.

iii) $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ ist ein Vektorraum, auf dem durch $\|T\|_1 := \|(\mu_n)_{n=1}^\infty\|_1 = \sum_{n=1}^\infty \mu_n = \mathrm{Tr}((T^*T)^{\frac{1}{2}})$ für $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ eine Norm definiert ist.

iv) Für $A \in \mathcal{B}(H)$ sind $TA, AT \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ und $\mathrm{Tr}([A,T]) = 0$.

Hinweise: i) kann mit Aufgabe 1.i) gezeigt werden. Eine Möglichkeit, iii) zu beweisen, ist zunächst mittels 1.i) zu zeigen:

$$\|T\|_1 = \sup\{\sum_{j\in J} |\langle \xi_j, T\eta_j\rangle| \ : \ (\xi_j)_{j\in J}, (\eta_j)_{j\in J} \text{ ONS in } \mathcal{H}\} \ .$$

In iv) genügt zu zeigen (weshalb?), daß UT und TU Spurklasse sind für U unitär, und daß $\mathrm{Tr}(TU) = \mathrm{Tr}(UT)$ gilt.

Aufgabe 3.+4. Seien P_j, Q_j, L_j und $H = \frac{1}{2}P^2 - \frac{1}{\sqrt{Q^2}}$ Impuls-, Orts-, Drehimpuls- und Hamilton-Operatoren auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ und $A_l := \frac{Q_l}{\sqrt{Q^2}} - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jkl}(P_jL_k + L_kP_j)$. Dabei ist $j,k,l \in \{1,2,3\}$,

$$\epsilon_{jkl} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (jkl) \text{ eine gerade Permutation von (123) ist,} \\ -1 & \text{falls } (jkl) \text{ eine ungerade Permutation von (123) ist,} \\ 0 & \text{falls } (jkl) \text{ zwei oder drei gleiche Indizes enthält,} \end{cases}$$

sowie $X \cdot Y = \sum_{j=1}^3 X_jY_j$ und $X^2 := X \cdot X$.
Zeigen Sie:

$$[L_j, A_k] = \mathrm{i}\sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl}A_l \ , \qquad 0 = L\cdot A = A \cdot L \ , \quad [H, A_j] = 0 \ ,$$
$$[A_j, A_k] = -\mathrm{i}\sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl}L_lH \ , \qquad A^2 = 1 + 2H + 2HL^2 \ .$$

Auf dem Unterraum $\mathcal{H}_- := \chi_{\mathbb{R}_-^\times}(H)\mathcal{H}$ von $\mathcal{H}$, auf dem der Hamilton-Operator negativ ist, werden folgende Operatoren erklärt:

$$J_j := \frac{1}{2}\big(L_j + (-2H)^{-\frac{1}{2}}A_j\big) \ , \qquad K_j := \frac{1}{2}\big(L_j - (-2H)^{-\frac{1}{2}}A_j\big) \ .$$

Zeigen Sie:

$$[J_j, J_k] = \mathrm{i}\sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl}J_l \ , \qquad [K_j, K_k] = \mathrm{i}\sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl}K_l \ ,$$
$$[J_j, K_k] = 0 \ , \qquad J^2 = K^2 = -\frac{1}{4}(1 + (2H)^{-1}) \ .$$