Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 2015**

Übungen zu "Mathematische Modelle der Statistischen Physik und Quantenfeldtheorie"

Abgabe: Bis 07.05.2015, 10 Uhr Blatt 04

Aufgabe 1. Sei T ein kompakter Operator auf einem unendlich-dimensionalen separablen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ und $\lambda \in \varrho(T)$ regulärer Wert (insbesondere $\lambda \neq 0$). Dann werde durch $(T - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} = S - \frac{1}{\lambda}\mathrm{id}$ ein Operator $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definiert.

Zeigen Sie:

i) S ist kompakt.

ii) $\ker S = \ker T$ und $\operatorname{im} S \subseteq \operatorname{im} T$.

iii) Ist T zusätzlich selbstadjungiert, dann ist jeder Eigenvektor von T auch Eigenvektor von S. Geben Sie den zugehörigen Eigenwert an.

iv) Sei T wieder kompakt und selbstadjungiert. Geben Sie $S\psi$ für beliebiges $\psi \in \mathcal{H}$ an, ausgedrückt durch Größen aus dem Spektraltheorem für T.

Aufgabe 2. Wir betrachten die Abbildung

$$h : \mathbb{R}^4 \ni x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto h(x) := \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - \mathrm{i}x^2 \\ x^1 + \mathrm{i}x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})_{sa}\,,$$

wobei $M_2(\mathbb{C})_{sa}$ den Vektorraum der hermiteschen komplexen (2×2)-Matrizen bezeichnet. Außerdem sei $\tilde{x} = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$.

i) Überzeugen Sie sich, daß h bijektiv ist und $x \cdot \tilde{x} = \det h(x)$ erfüllt. Wie läßt sich $x \cdot \tilde{y}$ durch Determinanten ausdrücken?

ii) Zeigen Sie: Es gibt ein $C \in GL(2, \mathbb{C})$ mit $h(\tilde{x}) = C^{-1}\overline{h(x)}C$.

iii) Jedes $T \in M_2(\mathbb{C})$ induziert durch $x \mapsto F_T(x) := h^{-1}(T^* h(x) T)$ einen Endomorphismus von $\mathbb{R}^4$. Für welche solche T gilt $F_T(x) \cdot \widetilde{F_T(x)} = x \cdot \tilde{y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^4$? Welche Gruppe G wird durch diese T erzeugt?

iv) Zeigen Sie, daß F_T die Zeitorientierung erhält.

Aufgabe 3. Die Standard-Darstellung $\gamma : \mathbb{R}^4 \to C\ell_{1,3}$, die nicht von der Form $M_2(\mathbb{H})$ ist, ist

$$\gamma(x) := \begin{pmatrix} 0 & h(\tilde{x}) \\ h(x) & 0 \end{pmatrix}$$

mit $h(x)$ wie in Aufgabe 2.

i) Geben Sie die allgemeine Form von Elementen aus $\mathrm{Spin}(1,3)$ in dieser Darstellung an.
Hinweis: Verwenden Sie die Matrix C aus Aufgabe 2.ii)

ii) Bestimmen Sie durch Vergleich der Gruppenwirkung $a^{-1}\gamma(x)a =: \gamma(R_a(x))$, für $a \in \mathrm{Spin}(1,3)$, mit der in Aufgabe 2.iii) bestimmten Gruppenwirkung $F_T(x) = h^{-1}(T^* h(x) T)$, für $T \in G$, den gemeinsamen Durchschnitt von G mit $\mathrm{Spin}(1,3)$.
Hinweis: Beweisen Sie $C(A^t)^{-1}C^{-1} = \frac{A}{\det A}$ für beliebiges $A \in GL(2, \mathbb{C})$, wenn C wieder die Matrix aus Aufgabe 2.ii) ist.

Aufgabe 4. Seien a_j^*, a_j mit $j = 1, \ldots, N$ Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auf dem Fock-Raum von $\mathbb{C}^N$, d.h.

$$[a_j, a_k] = 0 \ , \quad [a_j^*, a_k^*] = 0 \ , \quad [a_j, a_k^*] = \delta_{jk} \ .$$

i) Zeigen Sie: Es gibt $\lambda_{lj}, \mu_{lj} \in \mathbb{C}$ (nicht alle μ_{lj} gleich 0) derart, daß auch $c_l := \sum_{j=1}^N (\lambda_{lj} a_j + \mu_{lj} a_j^*)$ und $c_l^* := \sum_{j=1}^N (\overline{\lambda_{lj}} a_j^* + \overline{\mu_{lj}} a_j)$ die Relationen

$$[c_j, c_k] = 0 \ , \quad [c_j^*, c_k^*] = 0 \ , \quad [c_j, c_k^*] = \delta_{jk}$$

erfüllen.

ii) Geben Sie eine Konstruktion an für ein neues Vakuum Ω_c mit $c_l \Omega_c = 0$ für alle $l \in \{1, \ldots, N\}$.

Bemerkung: Schon die Fälle $N = 1$ und $N = 2$ sind lehrreich.