Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 2015**

Übungen zu "Mathematische Modelle der Statistischen Physik und Quantenfeldtheorie"

Abgabe: Bis 22.05.2015, 10 Uhr Blatt 05

Aufgabe 1. Wir betrachten den Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{R}^3, d\mu_m)$ mit dem Skalarprodukt $\langle \hat{v}, \hat{w} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{p}}{2\sqrt{m^2+\|\vec{p}\|^2}}\, \overline{\hat{v}(\vec{p})}\hat{w}(\vec{p})$.

i) Nach (dreidimensionaler) Fourier-Transformation läßt sich dieses Skalarprodukt als $\langle \hat{v}, \hat{w} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} d\vec{x}\, d\vec{y}\, \overline{v(\vec{x})}K(\vec{x}-\vec{y})w(\vec{y})$ schreiben. Geben Sie den Intergralkernoperator $K(\vec{\xi})$ an.

ii) Verwenden Sie die Identität $\frac{1}{\sqrt{m^2+\|\vec{p}\|^2}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} e^{-\alpha(m^2+\|\vec{p}\|^2)}$, um in $K(\vec{\xi})$ das $\vec{p}$-Integral zu berechnen (Vertauschen der $\vec{p}, \alpha$-Integrale darf als erlaubt angesehen werden).

iii) Diskutieren Sie das Verhalten von $K(\vec{\xi})$ für $\|\vec{\xi}\| \to 0$ und $\|\vec{\xi}\| \to \infty$.
Bemerkung: Das α-Integral ist eine modifizierte Bessel-Funktion.

Aufgabe 2. Der (eindimensionale) harmonische Oszillator $H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2 - 1)$ kann als $(D = 1)$-dimensionale Quantenfeldtheorie aufgefaßt werden. Dabei ist $\Omega = \psi_0$ der Grundzustand und $\Phi(f) := \sqrt{2}\int_{-\infty}^\infty dt\; f(t) e^{\mathrm{i}Ht}Qe^{-\mathrm{i}Ht}$ das Quantenfeld.

i) Zeigen Sie, daß $U_{(a)}\psi = e^{\mathrm{i}Ha}\psi$ das Axiom [WA1] erfüllt.
Hinweis: Die Poincaré-Gruppe besteht nur aus Translationen in $\mathbb{R}$.

ii) Auf welche Forderung reduziert sich die Spektrumsbedingung [WA2]? Ist diese erfüllt?

iii) Berechnen Sie $Q(t) := e^{\mathrm{i}Ht}Qe^{-\mathrm{i}Ht}$.
Hinweis: Man drücke Q, H durch a, a^* aus und löse die aus $\frac{d}{dt}e^{\mathrm{i}Ht}ae^{-\mathrm{i}Ht}$ und $\frac{d}{dt}e^{\mathrm{i}Ht}a^*e^{-\mathrm{i}Ht}$ folgenden Differentialgleichungen.

iv) Berechnen Sie die Wightman-Distributionen
$\mathcal{W}_n(f_1, \ldots, f_n) := \langle \Omega, \Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n)\Omega \rangle$.

Aufgabe 3. Diese Aufgabe konstruiert die Zeit-0-Felder, symbolisch $\varphi_m(\vec{x}) = \Phi(0,\vec{x})$ und $\pi_m(\vec{x}) = \partial_t\Phi(t,\vec{x})\big|_{t=0}$. Sie sind nicht Poincaré-kovariant, sondern liefern Anfangsdaten für die Lösung $\Phi(t,\vec{x})$ der Klein-Gordon-Gleichung. Wir können z.B. $D=4$ annehmen, d.h. $\vec{p},\vec{x}\in\mathbb{R}^3$.

Ausgehend von der in der Vorlesung behandelten QFT $(\mathcal{H},\mathcal{D},\Phi,U,\Omega)$ des freien Skalarfeldes werde eingeführt:

- eine Abbildung $C : L^2(X_m,d\mu_m) \to L^2(X_m,d\mu_m)$ durch $(Cv)(p_m) := \overline{v(\widetilde{p_m})}$, mit $\widetilde{(p^0,\vec{p})} = (p^0,-\vec{p})$,
- zu jedem $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ Operatoren $\varphi_m(f),\pi_m(f) : \mathcal{D}\to\mathcal{D}$, definiert für *reellwertige* f durch

  $$\varphi_m(f) = a^*(\mathcal{F}_m f) + a(C\mathcal{F}_m f)\;, \qquad \pi_m(f) = \mathrm{i}a^*(\omega_m\cdot\mathcal{F}_m f) - \mathrm{i}a(\omega_m\cdot C\mathcal{F}_m f)\;,$$

  dann $\mathbb{C}$-linear fortgesetzt wie in der Konstruktion von $\Phi(f)$.

i) Zeigen Sie: $[\varphi_m(f_1),\varphi_m(f_2)] = [\pi_m(f_1),\pi_m(f_2)] = 0$ für alle $f_1,f_2\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$.

ii) Berechnen Sie $[\varphi_m(f_1),\pi_m(f_2)]$.

iii) Zeigen Sie, daß der Kommutator $[\varphi_m(f_1),\pi_m(f_2)]$ sinnvoll bleibt, wenn $f_i(x^0,\vec{x}) \to (\delta\check{f}_i)(x^0,\vec{x}) := \delta(x^0)\check{f}_i(\vec{x})$ konvergiert. Dabei ist δ die Dirac-Distribution, $\int_{-\infty}^{\infty} dx^0\;\delta(x^0)f(x^0) = f(0)$. [Hintergrund: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ ist dicht in $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^k))'$]. Geben Sie $[\varphi_m(\delta\check{f}_1),\pi_m(\delta\check{f}_2)]$ an.

Aufgabe 4. Ist $\mathcal{W}_N$ die Wightman-Distribution einer Quantenfeldtheorie, dann definieren wir eine Distribution

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}\mathcal{W}_N(x_1,\dots,x_N)\\ &:=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_N}\Theta(x^0_{\sigma(1)}-x^0_{\sigma(2)})\Theta(x^0_{\sigma(2)}-x^0_{\sigma(3)})\cdots\Theta(x^0_{\sigma(N-1)}-x^0_{\sigma(N)})\mathcal{W}_N(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(N)})\;.\end{aligned}$$

Dabei ist $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x\geq 0\\ 0 & \text{für } x<0\end{cases}$ die Heaviside-Funktion (eigentlich eine Distribution). Summiert wird über alle Permutationen, wobei jedoch für paarweise verschiedene x_j diese Summe aus nur einem einzigen Summanden besteht. Die Multiplikation von Distributionen erfordert große Vorsicht; in diesem Fall läßt sich aber alles rechtfertigen. Entsprechend setzt man

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\mathcal{W}_N(f_1,\dots,f_N) &:= \int_{\mathbb{R}^{ND}} d(x_1,\dots,x_N)\;\mathcal{T}\mathcal{W}_N(x_1,\dots,x_N)f_1(x_1)\cdots f_N(x_N)\\ &\equiv \langle\Omega,\mathcal{T}\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_N)\Omega\rangle\;.\end{aligned}$$

Man nennt den so definierten Operator $\mathcal{T}\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_N)$ das *zeitgeordnete Produkt*. Die folgenden Teilaufgaben beziehen sich auf das freie Skalarfeld:

i) Geben Sie den Integralkern $\mathcal{TW}_2(x, y)$ an.

ii) Zeigen Sie: $\mathcal{TW}_2(x, y) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^D} \int_{\mathbb{R}^D} dp \, \frac{e^{-\mathrm{i}p \cdot \widetilde{(x-y)}}}{p \cdot \tilde{p} - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ für $x \neq y$.

iii) Drücken Sie $\mathcal{TW}_N(x_1, \ldots, x_N)$ als Funktion von $\mathcal{TW}_2$ aus.

Bemerkungen: Die Distribution $\mathcal{TW}_2(x, y)$ heißt kausale 2-Punktfunktion oder Feynman-Propagator. Der Beweis von ii) benutzt den Residuensatz. Der Limes $\epsilon \to 0$ ist erst nach Anwendung des Residuensatzes zu bilden.