Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 2015**

Übungen zu "Mathematische Modelle der Statistischen Physik und Quantenfeldtheorie"

Abgabe: Bis 11.06.2015, 10 Uhr Blatt 06

Aufgabe 1. Die reduzierte Wightman-Distribution des freien Skalarfeldes war

$$W_2(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int_{\mathbb{R}^{D-1}} \frac{d\vec{p}}{2\omega_m(\vec{p})} e^{-\mathrm{i}\xi\cdot\widetilde{p_m}} \;, \qquad p_m = (\omega_m(\vec{p}), \vec{p}) \;.$$

mit $\omega_m(\vec{p}) = \sqrt{\|\vec{p}\|^2 + m^2}$.

i) Zeigen Sie (ggf. erneut) $\widehat{W_2}(q) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \int_{\mathbb{R}} d\xi^0 \, \frac{e^{\mathrm{i}\xi^0(q^0 - \omega_m(\vec{q}))}}{2\omega_m(\vec{q})}$.

ii) Berechnen Sie die zugehörige Schwinger-Funktion $\mathcal{S}_2(x,y)$ für $x^0 < y^0$ durch Berechnung des Integrals über $q \in \overline{V_+}$.
Hinweis. Die Integrationsreihenfolge ist erst q^0, dann ξ^0.

iii) Zeigen Sie, daß das Ergebnis von ii) äquivalent ist zu (Euklidische Norm und Skalarprodukt)

$$\mathcal{S}_2(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{\mathbb{R}^D} dq \, \frac{e^{\mathrm{i}\langle x-y, q\rangle}}{\|q\|^2 + m^2}$$

Aufgabe 2. i) Bestimmen Sie ein Polynom $P(x,y)$ minimalen Grades und ein möglichst kleines $K \in \mathbb{N}$, so daß für die Schwinger-2-Punktfunktion aus 1.iii) gilt

$$|\mathcal{S}_2(x,y)| \leq P(x,y)(1 + \|x-y\|^{-K})$$

ii) Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^D)$ mit $\operatorname{supp} f \subseteq \{x \in \mathbb{R}^D \;:\; 0 < x^0\}$. Überprüfen Sie für die Schwinger-2-Punktfunktion aus 1.iii) die Reflexionspositivität bezüglich der Folge $(0, f, 0, \dots)$, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^{2D}} d(x,y) \; \mathcal{S}_2(x,y) \overline{f(-x^0, \vec{x})} f(y^0, \vec{y}) \geq 0 \;.$$

iii) Welche weitere Positivität bezüglich einer Folge $(0, f, 0, \dots)$ mit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^D)$ gilt für die Schwinger-2-Punktfunktion aus 1.iii)?

Aufgabe 3 Wir betrachten in $D = 2$ Dimensionen ein Quantenfeld $\Phi = \Phi(x_+)$, das als Distribution nur von $x_+ := x^0 + x^1$ abhängt, nicht aber von $x_- := x^0 - x^1$. Entsprechend ist $\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_+ \Phi(x_+) f_+(x_+)$ mit $f_+(x_+) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx_- f(x_+, x_-)$.

i) Zeigen Sie: Ist $x_+ \neq y_+$, so folgt im distributionellen Sinn $[\Phi(x_+), \Phi(y_+)] = 0$. Schließen Sie dann $[\Phi(x_+), \Phi(y_+)] = -\mathrm{i}\sum_{k=0}^{n} c_k \delta^{(2k+1)}(x_+ - y_+)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $c_k \in \mathbb{R}$.

ii) Bestimmen Sie die allgemeinste Wightman-Distribution $\mathcal{W}_2(x_+, y_+) = \langle \Omega, \Phi(x_+)\Phi(y_+)\Omega \rangle$, die mit der Lokalität nach i) sowie Translationsinvarianz verträglich ist.

iii) Sei $\xi_+ = x_+ - y_+$ und $W_2(\xi) = \mathcal{W}_2(0, -\xi)$. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\widehat{W_2}(q) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} d\xi \quad e^{\mathrm{i}\xi\cdot\tilde{q}}\, W_2(\xi)$. Welche weitere Einschränkung an W_2 ergibt sich aus der Trägereigenschaft von $\widehat{W_2}(q)$?

iv) Berechnen Sie schließlich $W_2(\xi_+ - \mathrm{i}\epsilon)$ durch Laplace-Transformation unter Berücksichtigung der Trägereigenschaften.

Aufgabe 4. Berechnen Sie für die Boltzmann-Verteilung zum eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillator explizit als Funktion der Temperatur:

i) die freie Energie F,

ii) die Entropie S,

iii) die Gesamtenergie U,

iv) die spezifische Wärme c.